Meccanica dei Robot – 24 Novembre 2011

1) Il sistema di riferimento Cartesiano xy ruota ad una velocità angolare costante Ω rispetto al sistema inerziale fisso XY, come indicato in Figura 1. Una particella di massa m si muove nel piano xy sotto l'azione di una forza di componenti arbitrarie $F_x(t)$ ed $F_y(t)$. (i) Determinare le equazioni differenziali di moto della particella nel sistema di riferimento xy. (ii) Risolvere nuovamente il problema nel caso in cui la particella sia vincolata a muoversi lungo una scanalatura nel piano xy descritta dalla curva di equazioni $x^2+y^2-R^2=0$, con R costante.

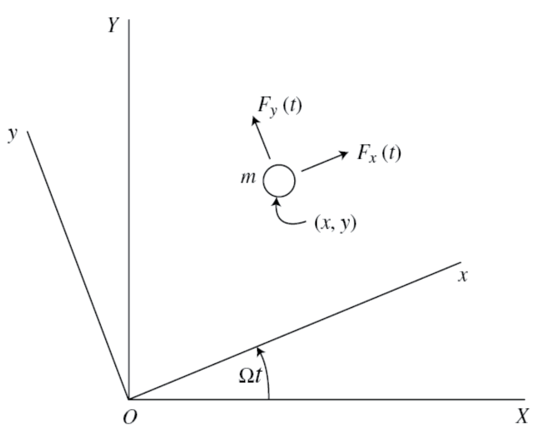


Figura 1: Particella in moto su un piano rotante.

2) La Figura 2 mostra lo schema funzionale di un satellite in cui il controllo di assetto è realizzato mediante i tre volani (dischi omogenei spessi) calettati sui tre assi principali d'inerzia e baricentrici b_1, b_2 e b_3 per il corpo principale. I dischi ruotano attorno ad assi passanti per i loro baricentri e di simmetria assiale per i dischi stessi. Le Ω_i (i=1,2,3) rappresentano le velocità angolari relative del disco i-esimo rispetto al corpo principale, mentre le ω_i sono le componenti della velocità angolare del corpo principale in assi corpo. Naturalmente, i tre volani saranno attuati da motori posizionati sul corpo principale del satellite (mediante coppie interne al sistema complessivo, per questo non indicate in Figura).

Dopo aver scelto una parametrizzazione per l'orientazione del satellite, introdotto le opportune matrici d'inerzia dei corpi e note le distanze (costanti) fra G ed i baricentri dei tre dischi, si calcoli: (i) la velocità angolare del corpo principale del satellite; (ii) le velocità angolari di ciascun volano; (iii) l'energia cinetica complessiva del sistema; (iv) scegliendo a piacere o la via Lagrangiana o le equazioni di Eulero, si ricavino le equazioni del moto nell'ipotesi che il sistema sia soggetto alla sola azione delle coppie interne dei motori che portano in rotazione i volani, senza che vi sia alcuna azione esterna applicata al satellite (satellite libero nello spazio).

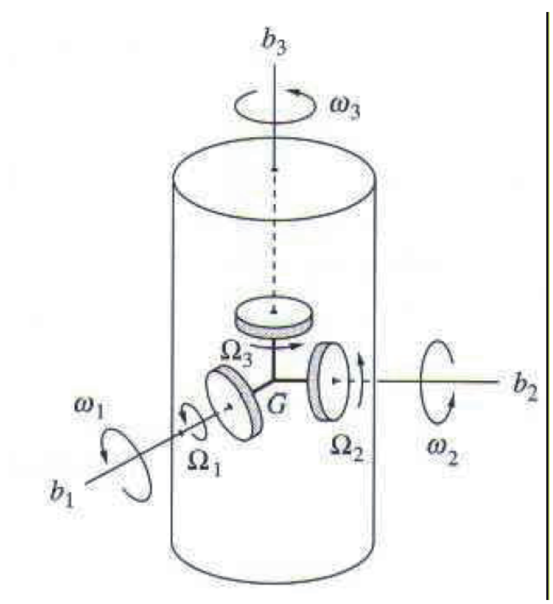
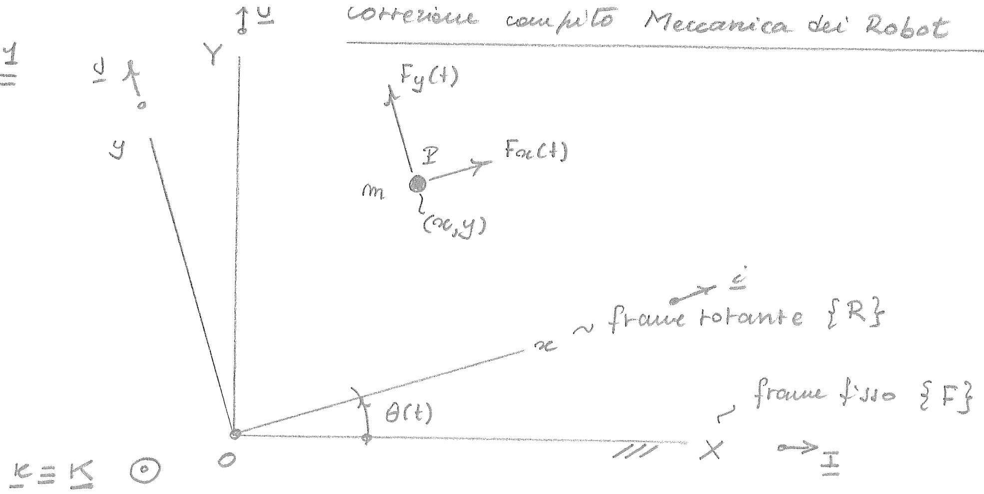


Figura 2: Satellite controllato mediante volani.

Es. 1



•) $\theta(t) = \Omega t$, Ω = costante = (

•) coordinate della particella di massa m in frame rotante sono (x,y)

•) " " " in frame fisso sono (X,Y)

•) (F_x, F_y) componenti di forza applicata esternam. alla particella in $\{R\}$

(i) Equazioni del moto particella soggetta a (F_x, F_y) in frame rotante e nell'altro.

Consideriamo (dato che non è specificato) che il piano su cui si muove m sia piano orizzontale. Sul livello di tale piano prendiamo $U=0$ cosicché eq. ni di Lagrange hanno forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1,2) \qquad \text{con} \quad \underline{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Facciamo la scelta di prendere (x,y) come coordinate Lagrangiane poiché vogliamo ottenere delle equazioni differenziali di moto proprio in tali coordinate.

Calcoliamo la velocità della particella

$$\underline{v}_P = \underline{v}_P^{(tr.)} + \underline{v}_P^{(rel)} = \underbrace{\dot{\theta}\,\underline{k} \times \overset{(x\underline{i}+y\underline{j})}{\underline{OP}}}_{\underline{v}_P^{(tr.)}} + \underbrace{\dot{x}\,\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j}}_{\underline{v}_P^{(rel)}} = \Omega x\,\underline{j} - \Omega y\,\underline{i} + \dot{x}\,\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j}$$

$$= (\dot{x} - \Omega y)\,\underline{i} + (\dot{y} + \Omega x)\,\underline{j}$$

Dunque la T (en. cinetica) risulta:

$$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 \right] = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Omega^2 (x^2 + y^2) + 2\Omega (x\dot{y} - y\dot{x}) \right]$$

Di conseguenza si ha che:

$\underline{i=1}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m\Omega y \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial x} = m\Omega^2 x + m\Omega \dot{y} \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} - m\Omega\dot{y}$$

$\underline{i=2}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\Omega x \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial y} = m\Omega^2 y - m\Omega \dot{x} \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} + m\Omega\dot{x}$$

Dunque, le due equazioni di moto sono

$$m\ddot{x} - m\Omega\dot{y} - m\Omega^2 x - m\Omega\dot{y} = F_x(t)$$

$$m\ddot{y} + m\Omega\dot{x} - m\Omega^2 y + m\Omega\dot{x} = F_y(t)$$

ossia:

$$\begin{cases} m\ddot{x} - 2m\Omega\dot{y} - m\Omega^2 x = F_x(t) \\ m\ddot{y} + 2m\Omega\dot{x} - m\Omega^2 y = F_y(t) \end{cases} \qquad (1)$$

Ovviamente, tale risultato poteva essere calcolato direttamente applicando la 1ª eq.ne cardinale della dinamica $\underline{F} = m\underline{a}_P$ ed ottenendo $\underline{a}_P$ dalla derivazione di $\underline{v}_P$. Nota bene che per derivare $\underline{v}_P$ si può scrivere

$$\frac{d\underline{v}_P}{dt} = \frac{d\underline{v}_P^{(rel)}}{dt} + \underbrace{\dot{\theta}\underline{k}}_{\text{veloc. ang. del frame } \{R\} \text{ rotante}} \times \underline{v}_P$$

poiché $\underline{v}_P$ è espresso come somma di due versori rotanti $\underline{i}(t)$ e $\underline{j}(t)$

Ossia in dettaglio:

$$\frac{d\underline{v}_P}{dt} \triangleq \underline{a}_P = (\ddot{x} - \Omega\dot{y})\underline{i} + (\ddot{y} + \Omega\dot{x})\underline{j} + \overset{\Omega}{\overset{\|}{\dot{\theta}}}\underline{k} \times \left[(\dot{x} - \Omega y)\underline{i} + (\dot{y} + \Omega x)\right.$$

$$= (\ddot{x} - \Omega\dot{y} - \Omega\dot{y} - \Omega^2 x)\underline{i} + (\ddot{y} + \Omega\dot{x} + \Omega\dot{x} - \Omega^2 y)\underline{j}$$

$$= (\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x)\underline{i} + (\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y)\underline{j}$$

Allora

$m\underline{a}_P = F_x(t)\underline{i} + F_y(t)\underline{j}$ è, in componenti, esattamente il sistema (1)

La struttura ben nota "della robotica" è ottenibile in questo semplice caso "a posteriori" ed è data da

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}}_{\text{termini lineari nelle acceleraz.}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}}_{\text{termini giroscopici}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{bmatrix}}_{\text{forze attive}} + \underbrace{\begin{bmatrix} m\Omega^2 x \\ m\Omega^2 y \end{bmatrix}}_{\text{forze centrifughe (apparenti)}}$$

Il termine delle forze attive è immediato: volendo fare il calcolo rigoroso si avrebbe es. per Q_x

$$Q_x = \underline{F} \cdot \frac{\partial(OP)}{\partial x} = (F_x\underline{i} + F_y\underline{j}) \cdot \frac{\partial(x\underline{i} + y\underline{j})}{\partial x} =$$

$$= (F_x\underline{i} + F_y\underline{j}) \cdot \underline{i} = F_x$$ e così via anche per $Q_y = F_y$

(ii) Se la particella è vincolata a stare su circonferenza $(x^2+y^2-R^2=0)$ allora si può introdurre il vincolo in forma Pfaffiana $2x\dot{x}+2y\dot{y}=0$ ossia

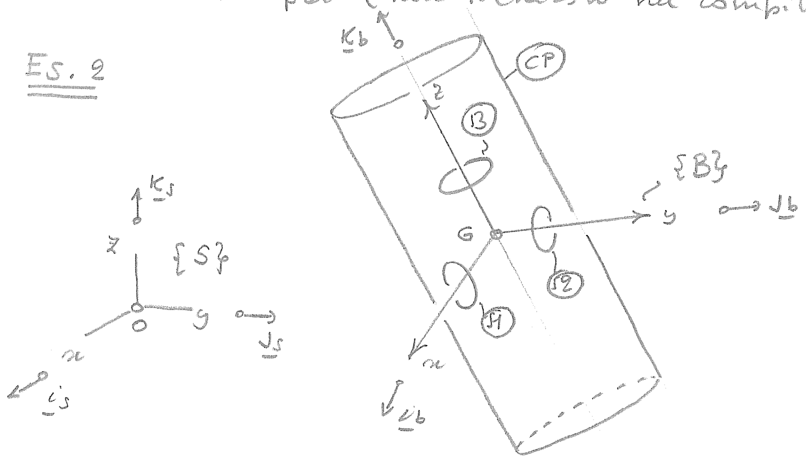
$$[x \quad y]\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=0 \iff A(\underline{q})\,\dot{\underline{q}}=0 \qquad A\in\mathbb{R}^{1\times 2}$$

Allora nelle equazioni di moto viene aggiunto il termine di forze vincolari $A^T\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$ ossia si ha

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2m\Omega\\ 2m\Omega & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\lambda=\begin{bmatrix}F_x(t)\\ F_y(t)\end{bmatrix}+m\Omega^2\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\\ [x \quad y]\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=0\end{cases}$$

Da risolvere poi (non richiesto nel compito) con le tecniche viste nel corso.

Es. 2



$${}^s[\underline{OG}]=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$ coord di G in $\{S\}$

(CP) = corpo principale

(S_i) = satellite i-esimo

Il corpo principale del satellite è un corpo rigido nello spazio, del quale siamo interessati a valutare l'orientazione. Possiamo introdurre la param. di SO(3) ZYZ per la quale le componenti di velocità angolare in assi corpo sono calcolabili nel modo che segue

$${}^b\underline{\omega}_{sb}={}^bJ(\psi,\theta,\varphi)\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} \quad \text{con} \quad {}^b\underline{\omega}_{sb}=(R_{sb}^T\,\dot{R}_{sb})^\vee \quad \text{con}$$

$$R_{sb}=R_{ZYZ}(\psi,\theta,\varphi)$$

La
$$R_{ZYZ}(\psi,\theta,\varphi)=\begin{bmatrix}c\theta c\phi c\psi-s\phi s\psi & -c\theta c\psi s\phi-c\phi s\psi & c\psi s\theta\\ c\psi s\phi+c\theta c\phi s\psi & c\phi c\psi-c\theta s\phi s\psi & s\theta s\psi\\ -c\phi s\theta & s\theta s\phi & c\theta\end{bmatrix}$$

e la ${}^bJ(\psi,\theta,\varphi)$ risulta

$${}^bJ(\psi,\theta,\varphi)=\begin{bmatrix}-\sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \cos\theta & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Definendo $\underline{\varphi}=\begin{bmatrix}\psi\\ \theta\\ \varphi\end{bmatrix}$ allora ${}^b\underline{\omega}_{sb}={}^bJ(\psi,\theta,\varphi)\,\dot{\underline{\varphi}}$

Il corpo principale avrà inerzia descritta da M e ${}^{b}\mathcal{I}_G = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$

con $I_x = I_y \neq I_z$ (non interessano adesso i dettagli sulla geometria delle masse)

Allora la sua <u>energia cinetica</u> sarà data da: (corpo principale)

$$T_{CP} = T_{CP}^{(tr)} + T_{CP}^{(rot)} = \frac{1}{2} M [\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \underline{\dot{\varphi}}^T\, {}^{b}\mathcal{J}^T(\psi,\theta,\varphi)\, {}^{b}\mathcal{I}_G\, {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi)\, \underline{\dot{\varphi}}$$

(volano)

Il satellite 1, colettato su $\underline{i}_b$, avrà velocità angolare data da:

$${}^{b}\underline{\omega}_{s1} = {}^{b}\underline{\omega}_{s1}^{(rel)} + {}^{b}\underline{\omega}_{s1}^{(tr)} = \Omega_1\, {}^{b}\underline{i}_b + {}^{b}\underline{\omega}_{sb} = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \middle| {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi)\right] \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \underline{\dot{\varphi}} \end{bmatrix}$$

Analogamente il satellite 2 e 3 avranno vel. angolari date da:

$${}^{b}\underline{\omega}_{s2} = {}^{b}\underline{\omega}_{s2}^{(rel)} + {}^{b}\underline{\omega}_{s2}^{(tr)} = \Omega_2\, {}^{b}\underline{j}_b + {}^{b}\underline{\omega}_{sb} = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi)\right] \begin{bmatrix} \Omega_2 \\ \underline{\dot{\varphi}} \end{bmatrix}$$

$${}^{b}\underline{\omega}_{s3} = {}^{b}\underline{\omega}_{s3}^{(rel)} + {}^{b}\underline{\omega}_{s3}^{(tr)} = \Omega_3\, {}^{b}\underline{k}_b + {}^{b}\underline{\omega}_{sb} = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi)\right] \begin{bmatrix} \Omega_3 \\ \underline{\dot{\varphi}} \end{bmatrix}$$

Queste formule rispondono alle domande (i) e (ii).

Per avere l'<u>energia cinetica</u> <u>complessiva</u> del sistema occorre calcolare oltre alla T_{CP} (già calcolata) l'energia cinetica di ciascun volano (detto anche momentum wheel).

Il volano 1 (satellite 1) ha T_{s1} calcolabile come

$$T_{s1} = T_{s1}^{(rot)} + T_{s1}^{(tr)} = \frac{1}{2} [\Omega_1 \,|\, \underline{\dot{\varphi}}^T] \begin{bmatrix} (1\ \ 0\ \ 0) \\ \hline {}^{b}\mathcal{J}^T(\psi,\theta,\varphi) \end{bmatrix} {}^{b}\mathcal{I}_{s1} \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \middle| {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi)\right] \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \hline \underline{\dot{\varphi}} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{2} m_{s1} \|\underline{v}_{s1}\|^2 \qquad \text{comodo usare } {}^{s}\underline{v}_{s1} \text{ (ossia in } \{S\})$$

dove

$${}^{s}\underline{v}_{s1} = {}^{s}\underline{v}_G + {}^{s}R_b\left({}^{b}\underline{\omega}_{sb} \times {}^{b}\underline{GS}_1\right) = \dot{x}\, {}^{s}\underline{i}_s + \dot{y}\, {}^{s}\underline{j}_s + \dot{z}\, {}^{s}\underline{k}_s +$$

$$+ {}^{s}R_b\left[\left({}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi)\, \underline{\dot{\varphi}}\right) \times \left(\ell \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right] =$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\dot{x} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\dot{y} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\dot{z} - {}^{s}R_b\left[\ell \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi)\, \underline{\dot{\varphi}}\right] =$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\dot{x} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\dot{y} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\dot{z} + H_1(\psi,\theta,\varphi)\, \underline{\dot{\varphi}} = [I_3 \,|\, + H_1(\psi,\theta,\varphi)] \begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{\varphi}} \end{bmatrix}$$

Dunque la ${}^{s}\underline{v}_{s1}$ avrà una struttura di questo tipo con

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\dot{\varphi}} = \begin{pmatrix}\dot{\psi}\\\dot{\theta}\\\dot{\varphi}\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H_1(\psi,\theta,\varphi) \triangleq -{}^{s}R_b(\psi,\theta,\varphi)\left[\ell \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi)\right]$$

Quindi $\|v_{s_1}\|^2$ sarà

$$[\dot{\underline{x}}^T \mid \dot{\underline{\varphi}}^T] \begin{bmatrix} I_3 \\ \hline H_1^T(\psi,\theta,\varphi) \end{bmatrix} [I_3 \mid H_1(\psi,\theta,\varphi)] \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \hline \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix} = [\dot{\underline{x}}^T \ \dot{\underline{\varphi}}^T] \begin{bmatrix} I_3 & H_1(\psi,\theta,\varphi) \\ H_1^T(\psi,\theta,\varphi) & H_1^T H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix}$$

Analogamente, per gli altri volani si avrà:

$$^{s}\underline{v}_{s_2} = [I_3 \mid H_2(\psi,\theta,\varphi)] \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \hline \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad H_2(\psi,\theta,\varphi) \triangleq -{}^{s}R_b(\psi,\theta,\varphi) \left[\ell \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi) \right]$$

$$^{s}\underline{v}_{s_3} = [I_3 \mid H_3(\psi,\theta,\varphi)] \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad H_3(\psi,\theta,\varphi) \triangleq -{}^{s}R_b(\psi,\theta,\varphi) \left[\ell \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi) \right]$$

Allora per T_{s_1} si avrà:

$$T_{s_1} = \frac{1}{2} [\Omega_1 \mid \dot{\underline{\varphi}}^T] \left[\begin{array}{c|c} {}^{b}\mathbb{J}_{s_1}(1,1) & {}^{b}\mathbb{J}_{s_1}(1,:)\, {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi) \\ \hline {}^{b}\mathcal{J}^T(\psi,\theta,\varphi)\, {}^{b}\mathbb{J}_{s_1}(:,1) & {}^{b}\mathcal{J}^T(\psi,\theta,\varphi)\, {}^{b}\mathbb{J}_{s_1}\, {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi) \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \hline \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} m_{s_1} [\dot{\underline{x}}^T \mid \dot{\underline{\varphi}}^T] \left[\begin{array}{c|c} I_3 & H_1 \\ \hline H_1^T & H_1^T H_1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \hline \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix}$$

In modo analogo per T_{s_2} e T_{s_3} si avrà:

$$T_{s_2} = \frac{1}{2} [\Omega_2 \mid \dot{\underline{\varphi}}^T] \left[\begin{array}{c|c} {}^{b}\mathbb{J}_{s_2}(2,2) & {}^{b}\mathbb{J}_{s_2}(2,:)\, {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi) \\ \hline {}^{b}\mathcal{J}^T(\psi,\theta,\varphi)\, {}^{b}\mathbb{J}_{s_2}(:,2) & {}^{b}\mathcal{J}^T(\psi,\theta,\varphi)\, {}^{b}\mathbb{J}_{s_2}\, {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi) \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Omega_2 \\ \hline \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} m_{s_2} [\dot{\underline{x}}^T \mid \dot{\underline{\varphi}}^T] \left[\begin{array}{c|c} I_3 & H_2 \\ \hline H_2 & H_2^T H_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \hline \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix}$$

$$T_{s_3} = \frac{1}{2} [\Omega_3 \mid \dot{\underline{\varphi}}^T] \left[\begin{array}{c|c} {}^{b}\mathbb{J}_{s_3}(3,3) & {}^{b}\mathbb{J}_{s_3}(3,:)\, {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi) \\ \hline {}^{b}\mathcal{J}^T(\psi,\theta,\varphi)\, {}^{b}\mathbb{J}_{s_3}(:,3) & {}^{b}\mathcal{J}^T(\psi,\theta,\varphi)\, {}^{b}\mathbb{J}_{s_3}\, {}^{b}\mathcal{J}(\psi,\theta,\varphi) \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Omega_3 \\ \hline \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} m_{s_3} [\dot{\underline{x}}^T \mid \dot{\underline{\varphi}}^T] \left[\begin{array}{c|c} I_3 & H_3 \\ \hline H_3 & H_3^T H_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \hline \dot{\underline{\varphi}} \end{bmatrix}$$

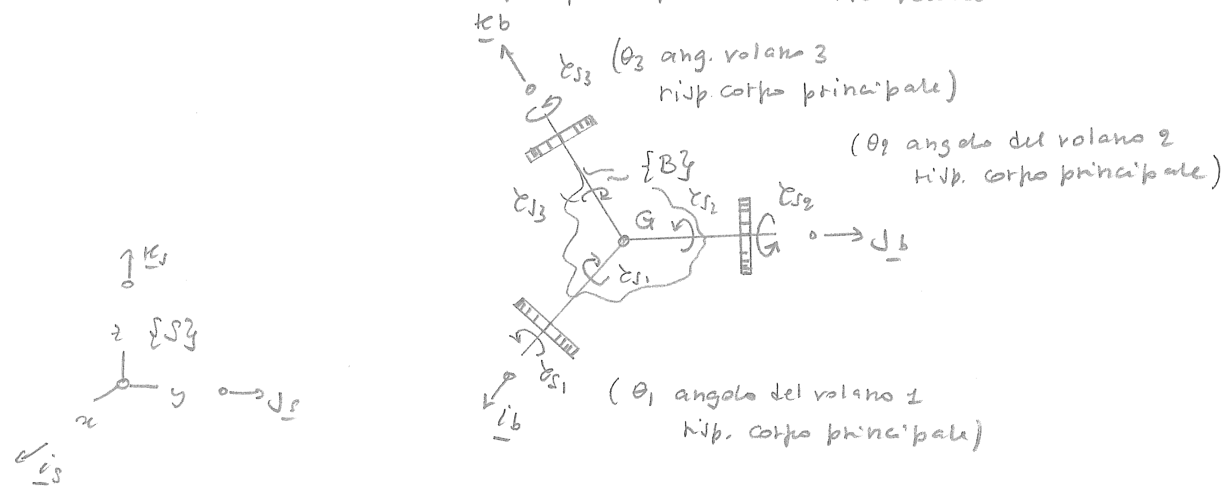
A questo punto (si omettono i calcoli espliciti) si possono scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema completo. Si noti che si avranno come coordinate lagrangiane le $(x, y, z) \triangleq \underline{x}$; $(\psi, \theta, \varphi) \triangleq \underline{\varphi}$ e $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \triangleq \underline{\theta}$ con $(\dot{\theta}_1 = \Omega_1 ; \dot{\theta}_2 = \Omega_2 ; \dot{\theta}_3 = \Omega_3)$

che compaiono solo derivate nel tempo nelle eq.ni del moto, ossia come $\underline{\dot\theta}$ e $\underline{\ddot\theta}$ e mai come $\underline{\theta}$ poiché l'energia cinetica non dipende dalla config. dei volani ($\underline{\theta}$) ma solo dalla loro velocità ed accelerazioni, si avrà un sistema di 9 eq.ni diff. del 2° ordine.

Il contributo della componente Lagrangiana delle forze (coppie) attive viene calcolato nel modo seguente:

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N_F} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{\dot r}_i}{\partial \dot q_h} + \sum_{j=1}^{N_M} \underline{M}_j \cdot \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \dot q_h}$$

Es. consideriamo il corpo principale ed i tre volani



Nel nostro caso ci sono solo coppie indicate in figura, il loro contributo rientrerà SOLO nelle eq.ni relative alle $\underline{\varphi}$ ed alle $\underline{\theta}$ ed in particolare i contributi in termini di Q_{θ_1} (ad es.) verranno calcolati come:

$$Q_{\theta_1} = \tau_{s_1} \underline{i}_b \cdot \frac{\partial(\underline{\omega}_{s_1})}{\partial \dot\theta_1} = \tau_{s_1} \underline{i}_b \cdot \frac{\partial(-\Omega_1 \underline{i}_b + \underline{J}(\psi,\theta,\varphi)\,\underline{\dot\varphi})}{\partial \Omega_1} =$$

$$= \tau_{s_1} \underline{i}_b \cdot \underline{i}_b = \tau_{s_1}$$

Analogamente

$$Q_{\theta_2} = \tau_{s_2} \quad ; \quad Q_{\theta_3} = \tau_{s_3}$$

Quando invece si andranno a calcolare i contributi tipo Q_ψ allora vi avrà

$$Q_\psi = -\tau_{s_1} \underline{i}_b \cdot \frac{\partial(\underline{\omega}_{sb})}{\partial \dot\psi} - \tau_{s_2} \underline{j}_b \cdot \frac{\partial(\underline{\omega}_{sb})}{\partial \dot\psi} - \tau_{s_3} \underline{k}_b \cdot \frac{\partial(\underline{\omega}_{sb})}{\partial \dot\psi} =$$

in assi corpo, compon. $\{B\}$

$$= -({}^b\underline{i}_b \tau_{s_1} + {}^b\underline{j}_b \tau_{s_2} + {}^b\underline{k}_b \tau_{s_3}) \cdot \frac{\partial({}^b\underline{\omega}_{sb})}{\partial \dot\psi} =$$

$$= -\left({}^b\underline{i}_b^T \tau_{s1} + {}^b\underline{j}_b^T \tau_{s2} + {}^b\underline{k}_b^T \tau_{s3} \right) \frac{\partial \left(J(:,1)\dot{\psi} + J(:,2)\dot{\theta} + J(:,3)\dot{\varphi} \right)}{\partial \dot{\psi}} =$$

$$= -\left[(1\ 0\ 0)\, J(:,1)\, \tau_{s1} + (0\ 1\ 0)\, J(:,1)\, \tau_{s2} + (0\ 0\ 1)\, J(:,1)\, \tau_{s3} \right] =$$

$$= -\left[J(1,1)\, \tau_{s1} + J(2,1)\, \tau_{s2} + J(3,1)\, \tau_{s3} \right]$$

e così via per Q_θ e Q_φ.

Ovviamente le $Q_x = Q_y = Q_z = 0$ in assenza di forze applicate, gravità, etc...