Compito di Meccanica dei Robot – 24 Luglio 2012

1) Un corpo rigido a forma di parallelepipedo è sospeso elasticamente al telaio come rappresentato in Figura 1. L'obiettivo di questo esercizio è studiarne la dinamica (linearizzata) nell'intorno della configurazione di riferimento, ossia per "piccoli" spostamenti/rotazioni. Si consideri che nella configurazione rappresentata le molle lineari, tutte di costante elastica k, siano a riposo e si trascurino le azioni gravitazionali.

Note la massa m, il tensore d'inerzia baricentrico e principale d'inerzia ${}^{l}\mathcal{J}_{O_l}$, e le dimensioni $2l$, $2l$ e $2h$ dei lati del parallelepipedo, si risponda ai seguenti quesiti:

(i) si introduca una parametrizzazione (comoda per la successiva linearizzazione) per esprimere la configurazione del blocco; nell'ipotesi di voler ottenere delle equazioni dinamiche valide nell'intorno della configurazione di Figura: (ii) si esprimano i termini inerziali; (iiia) si esprimano le forze elastiche, (iiib) si discuta la stabilità dell'equilibrio nella configurazione di Figura; (iv) si esprima il contributo alle forze generalizzate dei due carichi inseguitori $F_1(t)$ ed $F_2(t)$ applicati, rispettivamente, in P_1 e P_2 ed in direzione P_1G e P_2E; (v) come cambiano le equazioni del moto nel caso in cui si rimuovano le ipotesi di piccoli spostamenti e si voglia studiare la dinamica "in grande"?

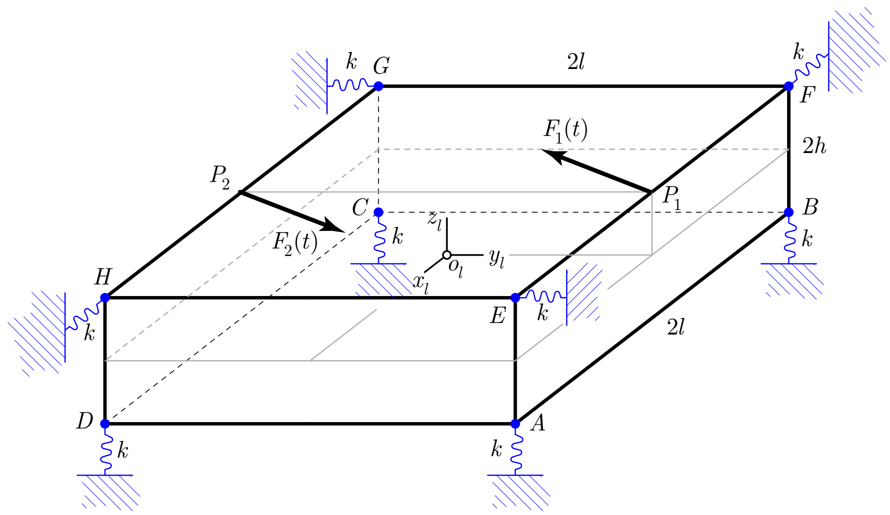

Figura 1: Corpo rigido sospeso elasticamente.

2) Si illustri e discuta l'utilizzo della decomposizione ai valori singolari (SVD) di una matrice per la valutazione della manipolabilità cinematica ed in forza di un manipolatore seriale.

i) Nell'ottica di voler studiare la dinamica del blocco nell'intorno della configurazione rappresentata in Figura, si può impiegare come parametrizzazione della rotazione gli angoli XYZ, poiché con tale scelta (come vedremo meglio in seguito) le compon. di ${}^{o}\underline{\omega}$, nell'intorno della conf.g. di Figura, possono essere confuse con le derivate degli angoli di rotazione caratteristici della parametrizzazione.

Infatti $\;{}^{o}_{e}R(\psi,\theta,\varphi) = R_x(\psi)\,R_y(\theta)\,R_z(\varphi)$

in base alle definizione

$$ {}^{o}\omega_{oe} = \left({}^{o}_{e}\dot{R}\;{}^{o}_{e}R^{T}\right)^{\vee} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s\theta \\ 0 & c\psi & -c\theta s\psi \\ 0 & s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\psi \\ \dot\theta \\ \dot\varphi \end{bmatrix} =: J_{xyz}(\psi,\theta,\varphi)\,\dot{\underline{\varphi}} \qquad \text{, dove } \underline{\varphi} = [\psi\;\theta\;\varphi] $$

Nell'ottica di ottenere termini lineari nelle equazioni del moto del blocco si considera che $\psi \simeq 0$, $\theta \simeq 0$, $\varphi \simeq 0$. Questo consente di scrivere che

$$ {}^{o}\omega_{oe} \simeq J_{xyz}(0,0,0)\,\dot{\underline{\varphi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\dot{\underline{\varphi}} = \dot{\underline{\varphi}} $$

Quindi nell'intorno della conf.g. di Figura le componenti della ${}^{o}\omega_{oe}$ coincidono con le derivate $\dot\psi$, $\dot\theta$ e $\dot\varphi$ se si sceglie la param. XYZ.

Quindi d'ora in poi, assumendo piccole rotazioni, si scriverà ${}^{o}\omega_{oe} = \dot{\underline{\varphi}}$ e $J_{xyz} = \mathbb{I}$.

Dunque una "piccola rotazione" sarà esprimibile come $\delta\underline{\varphi} = {}^{o}\omega_{oe}\,\delta t = \dot{\underline{\varphi}}\,\delta t$ con $\delta\underline{\varphi} = [\delta\psi\;\delta\theta\;\delta\varphi]^T$.

i piccoli spostamenti del baricentro O_e saranno esprimibili come la "piccola" traslazione $\delta\underline{x} = [\delta x\;\delta y\;\delta z]^T = \delta\underline{O_e}$

Uno spostam. di un generico punto del blocco sarà allora approssimabile come $\delta\underline{P} = \delta\underline{x} + \widehat{\delta\underline{\varphi}}\,\underline{O_eP}$

dato che $\underline{O_eP}$ rimarrà praticam. parallelo a se stesso, allora ${}^{e}\underline{O_eP} = {}^{o}\underline{O_eP}$

Quindi ad esempio

$$ \delta\underline{A} = \delta\underline{x} + \widehat{\delta\underline{\varphi}}\,\underline{O_eA} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\delta\varphi & \delta\theta \\ \delta\varphi & 0 & -\delta\psi \\ -\delta\theta & \delta\psi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ e \\ -h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x - e\,\delta\varphi - h\,\delta\theta \\ \delta y + e\,\delta\varphi + h\,\delta\psi \\ \delta z - e\,\delta\theta + e\,\delta\psi \end{bmatrix} $$

e così via per gli altri punti.

Ovviamente:

$\underline{O_eA} = [e\;\;e\;\;-h]^T$ $\qquad$ $\underline{O_eE} = [e\;\;e\;\;h]^T$

$\underline{O_eB} = [-e\;\;e\;\;-h]^T$ $\qquad$ $\underline{O_eF} = [-e\;\;e\;\;h]^T$

$\underline{O_eC} = [-e\;\;-e\;\;-h]^T$ $\qquad$ $\underline{O_eG} = [-e\;\;-e\;\;h]^T$

$\underline{O_eD} = [e\;\;-e\;\;-h]^T$ $\qquad$ $\underline{O_eH} = [e\;\;-e\;\;h]^T$

(iii a) Contributo delle forze elastiche è ricavabile da un potenziale elastico. Per ottenere termini lineari nella dinamica occorre che il potenziale elastico sia quadratico. Ciò può risultare solo se si considera che gli spostamenti in corrispondenza dei punti di attacco delle molle al corpo rigido sono piccoli (come prima) e se si considera solo la componente di spostamento del corpo della molla nella direzione in cui agisce la molla.

Es. la U_A, energia potenziale associata alla def.ne della molla in A, è

$$U_A = \frac{1}{2} k \underbrace{\delta A_z}_{\substack{\text{compon. } z \\ \text{dello spostam. di} \\ A}}{}^2 = \frac{1}{2} k \left[\delta z + \ell \delta\psi - \ell \delta\theta\right]^2$$

notare che questo è un contributo quadratico che porterà solo termini lineari nella eq.ne della dinamica

Dunque l'energia potenziale totale risulta (considerando $U = 0$ nella config. di riferimento)

$$U = U_A + U_B + U_C + U_D + \dots + U_H =$$

$$= \frac{1}{2} k \left[\delta A_z^2 + \delta B_z^2 + \delta C_z^2 + \delta D_z^2 + \delta E_y^2 + \delta F_x^2 + \delta G_y^2 + \delta H_x^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} k \Big[(\delta z - \ell\delta\theta + \ell\delta\psi)^2 + (\delta z + \ell\delta\theta + \ell\delta\psi)^2 + (\delta z + \ell\delta\theta - \ell\delta\psi)^2 + (\delta z - \ell\delta\theta - \ell\delta\psi)^2 + (\delta y + \ell\delta\varphi - h\delta\psi)^2 + (\delta x + h\delta\theta - \ell\delta\varphi)^2 + (\delta y - \ell\delta\varphi - h\delta\psi)^2 + (\delta x + h\delta\theta + \ell\delta\varphi)^2\Big]$$

Dunque il termine lineare (nella configurazione $\underline{\delta q} = [\underline{\delta x}^T \ \underline{\delta\varphi}^T]^T$) che andrà nelle equazioni di moto risulta (dalla parte delle forze)

$$\underline{Q_e} = -\left[\frac{\partial U}{\partial \underline{\delta q}}\right]^T = -\begin{bmatrix} 2k(\delta x + h\delta\theta) \\ 2k(\delta y - h\delta\psi) \\ 4k\delta z \\ 2k(-h\delta y + (h^2+2\ell^2)\delta\psi) \\ 2k(h\delta x + (h^2+2\ell^2)\delta\theta) \\ 4k\ell^2\delta\varphi \end{bmatrix}$$

Naturalmente, essendo questo vettore lineare nella config. $\underline{\delta q}$, si può fattorizzare come prodotto matrice di rigidezza del sistema di sospensione $*\ \underline{\delta q}$, ossia

$$\underline{Q_e} = -K_q \underline{\delta q} \quad \text{dove}$$

$$K_q = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 & 0 & 2hk & 0 \\ 0 & 2k & 0 & -2hk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2hk & 0 & 2k(h^2+2\ell^2) & 0 & 0 \\ 2hk & 0 & 0 & 0 & 2k(h^2+2\ell^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4k\ell^2 \end{bmatrix}$$

La K_q è una matrice simmetrica di rigidezza. La stabilità marginale dell'equilibrio è associata al fatto che essa è positiva definita (cosa che andrebbe verificata)

(ii) Per ciò che riguarda i termini inerziali, stante ${}^{o}\omega_{oe} = \dot{\underline{\varphi}}$ si può scrivere una energia cinetica T del tipo (e ${}^{o}R_e = I$)

$$T = \frac{1}{2} m \, \underline{v}_{oe}^T \underline{v}_{oe} + \frac{1}{2} \dot{\underline{\varphi}}^T \, {}^{e}\mathcal{J}_{oe} \, \dot{\underline{\varphi}} = \frac{1}{2} m [\delta\dot{x} \; \delta\dot{y} \; \delta\dot{z}] \begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\delta\dot{\psi} \; \delta\dot{\theta} \; \delta\dot{\varphi}] \, {}^{e}\mathcal{J}_{oe} \begin{bmatrix} \delta\dot{\psi} \\ \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [\delta\dot{x} \; \delta\dot{y} \; \delta\dot{z} \; \delta\dot{\psi} \; \delta\dot{\theta} \; \delta\dot{\varphi}] \left[\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 0 & & & \\ 0 & m & 0 & & \emptyset & \\ 0 & 0 & m & & & \\ \hline & & & \mathcal{J}_x & 0 & 0 \\ & \emptyset & & 0 & \mathcal{J}_y & 0 \\ & & & 0 & 0 & \mathcal{J}_z \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \\ \delta\dot{\psi} \\ \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Nota bene: si sono indicati con $\delta x, \delta y, \dots, \delta\psi, \delta\theta, \delta\varphi$ le coordinate, ossia le componenti il vettore di conf. $\mathcal{S}$, per ricordarsi che assumono valori piccoli.

Allora questa espressione $T(\delta\dot{q})$ fornisce solo termini derivanti da

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial(\delta\dot{\underline{q}})}\right)\right]^T$$ ed infatti $$\frac{\partial T}{\partial \delta\dot{\underline{q}}} = [\delta\dot{x} \; \delta\dot{y} \; \delta\dot{z} \; \delta\dot{\psi} \; \delta\dot{\theta} \; \delta\dot{\varphi}] \left[\begin{array}{c|c} M & \\ \hline & {}^{e}\mathcal{J}_{oe} \end{array} \right] = \delta\dot{\underline{q}}^T B$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \delta\dot{q}}\right)\right]^T = B \, \delta\ddot{\underline{q}}$$

(iv) Per quanto riguarda le forze attive non conservative generate dai carichi inseguitori $F_1(t)$ ed $F_2(t)$ si ha:

$$\underline{P_1G} = G - P_1 = O_e G - O_e P_1 = (-\ell, -\ell, h) - (0, \ell, h) = \begin{bmatrix} -\ell \\ -2\ell \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \ell$$

il modulo di $\underline{P_1G}$ è $\ell\sqrt{1+4} = \ell\sqrt{5}$

allora il versore $$\underline{\lambda}_1 = \frac{\underline{P_1G}}{\|P_1G\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

analogamente il versore $$\underline{\lambda}_2 = \frac{\underline{P_2E}}{\|P_2E\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota bene che dato che $\underline{\lambda}_1$ e $\underline{\lambda}_2$ sono $\in$ al rigido, ma di fatto per le hp. di piccoli spostamenti/rotazioni il rigido non varia macroscopicamente conf. $\mathcal{S}$, allora tali $\underline{\lambda}_1$ e $\underline{\lambda}_2$ sono costanti.

Quindi nel calcolo della compo. Lagr. delle forze attive si ha:

$$\tau_h = Q_h = F_1(t) \, \underline{\lambda}_1 \cdot \frac{\partial(\underline{OP_1})}{\partial(\delta q_h)} + F_2(t) \, \underline{\lambda}_2 \cdot \frac{\partial(\underline{OP_2})}{\partial(\delta q_h)}$$

ma $$\underline{OP_1} = \underline{\delta P_1} = \underline{\delta x} + \underline{\delta\varphi}^{\wedge} \, O_e P_1 = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\delta\varphi & \delta\theta \\ \delta\varphi & 0 & -\delta\psi \\ -\delta\theta & \delta\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x - \ell\delta\varphi + h\delta\theta \\ \delta y - h\,\delta\psi \\ \delta z + \ell\,\delta\psi \end{bmatrix}$$

allora $\Rightarrow$ $\delta \underline{P}_1 = \begin{bmatrix} \delta x - l\,\delta\varphi + h\,\delta\theta \\ \delta y - h\,\delta\psi \\ \delta z + l\,\delta\psi \end{bmatrix}$

e

$$\underline{OP}_2 = \delta \underline{P}_2 = \delta \underline{x} + \widehat{\delta\varphi}\; {}^0\underline{e P_2} = \begin{bmatrix} \delta x + l\,\delta\varphi + h\,\delta\theta \\ \delta y - h\,\delta\psi \\ \delta z - l\,\delta\psi \end{bmatrix}$$

Dunque

$$Q_{\delta x} = F_1(t)\,\underline{l}_1 \cdot \frac{\partial(\delta \underline{P}_1)}{\partial(\delta x)} + F_2(t)\,\underline{l}_2 \cdot \frac{\partial(\delta \underline{P}_2)}{\partial(\delta x)} = F_1\,\underline{l}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + F_2\,\underline{l}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + F_2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(F_2 - F_1)$$

$$Q_{\delta y} = F_1\,\underline{l}_1 \cdot \frac{\partial(\delta \underline{P}_1)}{\partial(\delta y)} + F_2\,\underline{l}_2 \cdot \frac{\partial(\delta \underline{P}_2)}{\partial(\delta y)} = F_1\,\underline{l}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + F_2\,\underline{l}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= F_1\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + F_2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}(F_2 - F_1)$$

$$Q_{\delta z} = F_1\,\underline{l}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + F_2\,\underline{l}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$Q_{\delta\psi} = F_1\,\underline{l}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -h \\ l \end{bmatrix} + F_2\,\underline{l}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -h \\ -l \end{bmatrix}$$

$$Q_{\delta\theta} = F_1\,\underline{l}_1 \cdot \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + F_2\,\underline{l}_2 \cdot \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{\delta\varphi} = F_1\,\underline{l}_1 \cdot \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + F_2\,\underline{l}_2 \cdot \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(V) L'esercizio "più grande" è fatto usando nessuna ipotesi e seguendo le procedure classiche che si sono viste a lezione. In particolare

- ${}^0\omega_{0e} = J_{XYZ}(\psi, \theta, \varphi)\,\dot{\underline{\varphi}}$
- gli spostam. dei punti sono scritti usando ${}^0\underline{p}(\underline{q}; {}^e\underline{p})$ con

  $${}^0\tilde{\underline{p}}(\underline{q}; {}^e\underline{p}) = {}^0A_e(\underline{q})\,{}^e\tilde{\underline{p}} \quad \text{con} \quad {}^0A_e(\underline{q}) = \begin{bmatrix} {}^0R_e(\psi,\theta,\varphi) & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  e ${}^e\tilde{\underline{p}}$ coords homog. locali dei punti di interesse
- Quindi $B = B(\underline{q})$, ci saranno anche term centr. e Coriolis nella din.
- $U(\underline{q})$ non lineare e $\frac{\partial U}{\partial \underline{q}}$ non lineare
- i versori $\underline{l}_1$ e $\underline{l}_2$ dip. da (ψ, θ, φ) e $\underline{OP}_1$ e $\underline{OP}_2$ da calcolarsi come sopra