

## Compito di Meccanica dei Robot – 21 Luglio 2011

- 1) In Figura 1 un gripper planare 3R completamente attuato afferra nelle 5 configurazioni da (a) ad (e) differenti oggetti. Con la dizione “sliding” (pannelli (a), (c), (d), (e)) si fa riferimento al fatto che l’oggetto ed il link/telaio non possono separarsi ma solo strisciare relativamente l’uno rispetto all’altro in direzione tangente al contatto; con “PCWF” (pannelli (b), (d), (e)) si indica che è consentito solo il moto relativo di rotazione fra le parti in contatto; infine l’incastro (pannello (c)), impone alle due parti interessate di muoversi solidalmente. Facendo riferimento alle tecniche studiate per l’analisi di velocità e di forza nei manipolatori paralleli, si determinino per le 5 prese in Figura: (i) i Jacobiani dei differenti gripper  $\mathbf{J}$ ; (ii) le matrici di grasp  $\mathbf{G}$ ; (iii) le matrici di selezione  $\mathbf{H}$ ; (iv) le matrici Pfaffiane di vincolo  $\mathbf{A}$ . Si studino e si cerchi di parametrizzare (se esistono): (v) i moti labili dell’oggetto, i moti ridondanti del gripper, i moti coordinati; (vi) le forze interne per l’oggetto, le forze strutturali per il gripper e le forze strutturali interne per il sistema gripper-oggetto.

(Si assuma per il raggio del disco  $a = 1$  in unità di misura lineare scelta a piacere).

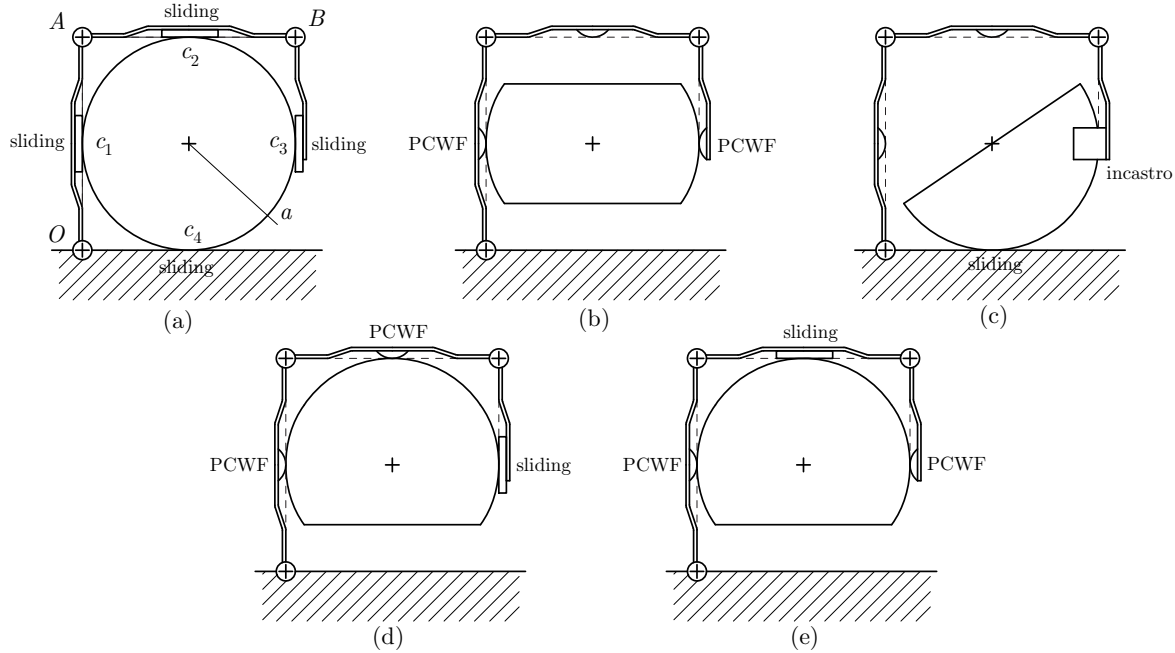


Figura 1: Configurazioni di presa per un gripper planare 3R.

- 2) Si *dimostrino* le regole di composizione di rototraslazioni successive in assi fissi ed in assi correnti.
- 3) Si *dimostrino* per via “geometrica” e per via “statica” come si ricava il Jacobiano geometrico di un manipolatore seriale con particolare riferimento alla convenzione di Denavit-Hartenberg.

# Compito Robotica 21.7.2011

---

## Caricamento package

```
In[1]:= << ScrewCalculusPro`ScrewCalculusPro`
```

---

## Jacobiano - proprietà del sistema "lato mano"

Calcoliamo il Jacobiano del sistema con 4 punti di contatto c\_1, c\_2, c\_3 e c\_4. Attenzione che dato che il punto c\_4 lato telaio non è controllabile mediante gli angoli del manipolatore 3R, l'ultima parte di J è un blocco nullo di dimensione 3x3

```
In[2]:= J = {
  {-a, 0, 0},
  {0, 0, 0},
  {1, 0, 0},
  {-2 a, 0, 0},
  {a, a, 0},
  {1, 1, 0},
  {-a, a, a},
  {2 a, 2 a, 0},
  {1, 1, 1},
  {0, 0, 0},
  {0, 0, 0},
  {0, 0, 0}};
```

Visualizziamo meglio la matrice

```
In[3]:= MatrixForm[J]
```

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valutiamo il nullo di J (vettore nullo)

```
In[4]:= NullSpace[J]
```

Out[4]= {}

Infatti il suo rango è 3

```
In[5]:= MatrixRank[J]
```

Out[5]= 3

**Transpose[NullSpace[Transpose[J]]] // MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a} & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Grasp - proprietà del sistema "lato oggetto"

Ricordandosi che la forma della generica G nel 2D è data da

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & x & 1 \end{bmatrix}$$

si ha per i 4 punti di contatto  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$

```
In[6]:= G1 = {
  {1, 0, 0},
  {0, 1, 0},
  {0, -a, 1}
}
```

```
Out[6]= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, -a, 1}}
```

```
In[7]:= G2 = {
  {1, 0, 0},
  {0, 1, 0},
  {-a, 0, 1}
}
```

```
Out[7]= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {-a, 0, 1}}
```

```
In[8]:= G3 = {
  {1, 0, 0},
  {0, 1, 0},
  {0, a, 1}
}
```

```
Out[8]= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, a, 1}}
```

```
In[9]:= G4 = {
  {1, 0, 0},
  {0, 1, 0},
  {a, 0, 1}
}
```

```
Out[9]= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {a, 0, 1}}
```

```
In[20]:= G = StackCols[G1, G2, G3, G4]; G // MatrixForm
```

```
Out[20]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 & -a & 0 & 1 & 0 & a & 1 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Constraint types - definizione dei tipi di vincolo che compaiono nei sottocasi

PCWF - Point Contact With Friction

```
In[10]:= Hpcwf = {
    {1, 0, 0},
    {0, 1, 0}};
```

Vincolo che consente la traslazione lungo la direzione x e la rotazione ed impedisce la traslazione lungo y

```
In[11]:= Hslidex = {{0, 1, 0}};
```

Vincolo che consente la traslazione lungo la direzione y e la rotazione ed impedisce la traslazione lungo x

```
In[12]:= Hslidey = {{1, 0, 0}};
```

Vincolo di incastro

```
In[13]:= Hbolted = Eye[3];
```

## Caso 1: c1\_slidey, c2\_slidex, c3\_slidey, c4\_slidey (without friction) --- Caso (a) del compito

Matrice di selezione

```
In[14]:= Hcaso1 = BlockDiag[{Hslidey, Hslidex, Hslidey, Hslidex}]; Hcaso1 // MatrixForm
```

```
Out[14]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiano

```
In[15]:= Jcaso1red = Hcaso1.J; MatrixForm[Jcaso1red]
```

```
Out[15]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No moti ridondanti

```
In[16]:= NullSpace[Jcaso1red]
```

```
Out[16]= {}
```

Forze strutturali. E' ovvio che esistono: se il disco è poggiato sul telaio sotto l'azione della gravità, il peso è equilibrato dalla forza di contatto nel punto c\_4 ma questa forza non richiede nessuna coppia ai giunti per essere generata.

```
In[17]:= NullSpace[Transpose[Jcaso1red]]
```

```
Out[17]= {{0, 0, 0, 1}}
```

## Matrice di Grasp

```
In[21]:= GTcaso1red = Hcaso1.Transpose[G]; GTcaso1red // MatrixForm
```

```
Out[21]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Moti labili (dell'oggetto): la rotazione attorno all'asse verticale non è impedita

```
In[22]:= NullSpace[GTcaso1red]
```

```
Out[22]= {{0, 0, 1}}
```

## Forze interne

```
In[23]:= NullSpace[G.Transpose[Hcaso1]]
```

```
Out[23]= {{0, -1, 0, 1}, {-1, 0, 1, 0}}
```

```
In[24]:= Acaso1 = StackCols[Jcaso1red, -GTcaso1red]; Acaso1 // MatrixForm
```

```
Out[24]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -a & a & a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Moti coordinati:

1° vettore: ci ritroviamo il moto labile dell'oggetto

2° vettore: oggetto che striscia in direzione +x e mano che gli si conforma

```
In[26]:= NullSpace[Acaso1] /. {a -> 1}
```

```
Out[26]= {{0, 0, 0, 0, 0, 1}, {-1, 1, -1, 1, 0, 0}}
```

## No forze strutturali-interne

```
In[27]:= NullSpace[Transpose[Acaso1]]
```

```
Out[27]= {}
```

## Caso 2: c1\_PCWF, c3\_PCWF --- Caso (b) del compito

```
In[28]:= J // MatrixForm
```

```
Out[28]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso mancano i punti  $c_2$  e  $c_4$ . Si selezionano solo le righe dalla 1 alla 3 e dalla 7 alla 9 (relative ai punti  $c_1$  e  $c_3$ )

```
In[29]:= Jcaso2 = Join[J[[1 ;; 3]], J[[7 ;; 9]]]
```

```
Out[29]= {{-a, 0, 0}, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {-a, a, a}, {2 a, 2 a, 0}, {1, 1, 1}}
```

Matrice di selezione

```
In[33]:= Hcaso2 = BlockDiag[{Hpcwf, Hpcwf}]; Hcaso2 // MatrixForm
```

```
Out[33]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiano che tiene conto dei tipi di vincolo nei contatti

```
In[34]:= Jcaso2red = Hcaso2.Jcaso2; Jcaso2red // MatrixForm
```

```
Out[34]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

No moti ridondanti

```
In[35]:= NullSpace[Jcaso2red]
```

```
Out[35]= {}
```

Forze strutturali

```
In[39]:= NullSpace[Transpose[Jcaso2red]]
```

```
Out[39]= {{0, 1, 0, 0}}
```

Matrice di Grasp (ci interessano solo i punti  $c_1$  e  $c_3$ )

```
In[36]:= Gcaso2 = StackCols[G1, G3];
```

Versione che tiene conto dei tipi di vincolo nei contatti

```
In[37]:= GTcaso2red = Hcaso2.Transpose[Gcaso2]; GTcaso2red // MatrixForm
```

```
Out[37]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

No Moti labili oggetto

```
In[38]:= NullSpace[GTcaso2red]
```

```
Out[38]= {}
```

Forze interne

```
In[41]:= Transpose[GTcaso2red] // MatrixForm
```

```
Out[41]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 & a \end{pmatrix}$$

```
In[42]:= NullSpace[Transpose[GTcaso2red]]
```

```
Out[42]= {{-1, 0, 1, 0}}
```

```
In[43]:= Acaso2 = StackCols[Jcaso2red, -GTcaso2red]
```

```
Out[43]= {{-a, 0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, -1, a}, {-a, a, a, -1, 0, 0}, {2 a, 2 a, 0, 0, -1, -a}}
```

Moti coordinati

```
In[44]:= Transpose[NullSpace[Acaso2]] // MatrixForm
```

```
Out[44]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ 1 & \frac{1}{a} \\ -1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 \\ a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

...con a=1

1° moto: oggetto si sposta verso l'alto e ruota in senso antiorario e mano segue stile parallelogramma

2° moto: oggetto trasla verso dx e mano segue stile parallelogramma

```
In[45]:= Transpose[NullSpace[Acaso2]] /. (a -> 1) // MatrixForm
```

```
Out[45]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[92]:= NullSpace[Transpose[Acaso2]]
```

```
Out[92]= {}
```

### Caso 3: c3\_bolted, c4\_slidex --- Caso (c) del compito

Interessano solo punti c\_3 e c\_4

```
In[48]:= Jcaso3 = Join[J[[7 ;; 9]], J[[10 ;; 12]]]; Jcaso3 // MatrixForm
```

```
Out[48]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice di selezione

```
In[49]:= Hcaso3 = BlockDiag[{Hbolted, Hslidex}]; Hcaso3 // MatrixForm
```

```
Out[49]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiano

```
In[50]:= Jcaso3red = Hcaso3.Jcaso3; Jcaso3red // MatrixForm
```

```
Out[50]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No moti ridondanti

```
In[53]:= NullSpace[Jcaso3red]
```

```
Out[53]= {}
```

Forze strutturali (stesso discorso del caso 1) )

```
In[54]:= NullSpace[Transpose[Jcaso3red]]
```

```
Out[54]= {{0, 0, 0, 1}}
```

```
In[51]:= Gcaso3 = StackCols[G3, G4]; Gcaso3 // MatrixForm
```

```
Out[51]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice  $HG^T$

```
In[52]:= GTcaso3red = Hcaso3.Transpose[Gcaso3]; GTcaso3red // MatrixForm
```

```
Out[52]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

No moti labili

```
In[55]:= NullSpace[GTcaso3red]
```

```
Out[55]= {}
```

Forze interne

```
In[56]:= NullSpace[Transpose[GTcaso3red]]
```

```
Out[56]= {{0, -1, a, 1}}
```

```
In[57]:= Acaso3 = StackCols[Jcaso3red, -GTcaso3red]; Acaso3 // MatrixForm
```

```
Out[57]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & a & a & -1 & 0 & 0 \\ 2a & 2a & 0 & 0 & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Moti coordinati

1° moto: semicerchio rotola senza strisciare sul telaio

2° moto: semicerchio trasla in direzione +x

```
In[58]:= Transpose[NullSpace[Acaso3]] // MatrixForm
```

```
Out[58]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2a} \\ 0 & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

No forze strutturali-interne

```
In[60]:= NullSpace[Transpose[Acaso3]]
```

```
Out[60]= {}
```

## Caso 4: c1\_PCWF, c2\_slidex, c3\_PCWF --- Caso (e) del compito

```
In[61]:= J // MatrixForm
```

```
Out[61]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Manca il punto c\_4 ...

```
In[62]:= Jcaso4 = J[[1 ;; 9]]; Jcaso4 // MatrixForm
```

```
Out[62]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice di selezione

```
In[63]:= Hcaso4 = BlockDiag[{Hpcwf, Hslidex, Hpcwf}]; Hcaso4 // MatrixForm
```

```
Out[63]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiano

```
In[64]:= Jcaso4red = Hcaso4.Jcaso4; Jcaso4red // MatrixForm
```

```
Out[64]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

No moti ridondanti

```
In[68]:= NullSpace[Jcaso4red]
```

```
Out[68]= {}
```

Forze strutturali

```
In[69]:= NullSpace[Transpose[Jcaso4red]]
```

```
Out[69]= {{0, 0, -2, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}}
```

```
In[65]:= Gcaso4 = StackCols[G1, G2, G3]; Gcaso4 // MatrixForm
```

```
Out[65]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 & -a & 0 & 1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

HG<sup>A</sup>T

```
In[66]:= GTcaso4red = Hcaso4.Transpose[Gcaso4]; GTcaso4red // MatrixForm
```

```
Out[66]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Moti labili

```
In[70]:= NullSpace[GTcaso4red]
```

```
Out[70]= {}
```

```
In[67]:= Transpose[GTcaso4red] // MatrixForm
```

```
Out[67]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Forze interne

```
In[72]:= NullSpace[Transpose[GTcaso4red]]
```

```
Out[72]= {{0, 1, -2, 0, 1}, {-1, 0, 0, 1, 0}}
```

Moti coordinati

```
In[73]:= Acaso4 = StackCols[Jcaso4red, -GTcaso4red]; Acaso4 // MatrixForm
```

```
Out[73]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a \\ a & a & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -a & a & a & -1 & 0 & 0 \\ 2a & 2a & 0 & 0 & -1 & -a \end{pmatrix}$$

```
In[74]:= Transpose[NullSpace[Acaso4]] // MatrixForm
```

```
Out[74]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ 1 & \frac{1}{a} \\ -1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 \\ a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

...con a=1

```
In[75]:= Transpose[NullSpace[Acaso4]] /. (a -> 1) // MatrixForm
```

```
Out[75]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Forze strutturali-interne!

```
In[77]:= Transpose[NullSpace[Transpose[Acaso4]]] // MatrixForm
```

```
Out[77]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Caso 5: c1\_PCWF, c2\_PCWF, c3\_slidey --- Caso (d) del compito

Manca c\_4 ...

```
In[78]:= Jcaso5 = J[[1 ;; 9]]; Jcaso5 // MatrixForm
```

```
Out[78]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Selezione

```
In[79]:= Hcaso5 = BlockDiag[{Hpcwf, Hpcwf, Hslidey}]; Hcaso5 // MatrixForm
```

```
Out[79]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiano

```
In[80]:= Jcaso5red = Hcaso5.Jcaso5; Jcaso5red // MatrixForm
```

```
Out[80]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{pmatrix}$$

No moti ridondanti

```
In[81]:= NullSpace[Jcaso5red]
```

```
Out[81]= {}
```

Forze strutturali

```
In[82]:= NullSpace[Transpose[Jcaso5red]]
```

```
Out[82]= {{-2, 0, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}}
```

```
In[83]:= Gcaso5 = StackCols[G1, G2, G3];
```

HG<sup>T</sup>

```
In[84]:= GTcaso5red = Hcaso5.Transpose[Gcaso5]; GTcaso5red // MatrixForm
```

```
Out[84]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

GH<sup>T</sup>

```
In[85]:= Transpose[GTcaso5red] // MatrixForm
```

```
Out[85]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No moti labili

```
In[86]:= NullSpace[GTcaso5red]
```

```
Out[86]= {}
```

Forze interne

```
In[87]:= NullSpace[Transpose[GTcaso5red]]
```

```
Out[87]= {{-1, 0, 0, 0, 1}, {-1, -1, 1, 1, 0}}
```

```
In[88]:= Acaso5 = StackCols[Jcaso5red, -GTcaso5red]; Acaso5 // MatrixForm
```

```
Out[88]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a \\ -2a & 0 & 0 & -1 & 0 & a \\ a & a & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -a & a & a & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Moti coordinati: mano ruota rigidamente e si porta dietro disco tagliato

```
In[89]:= Transpose[NullSpace[Acaso5]] // MatrixForm
```

```
Out[89]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

No forze strutturali-interne

```
In[90]:= NullSpace[Transpose[Acaso5]]
```

```
Out[90]= {}
```