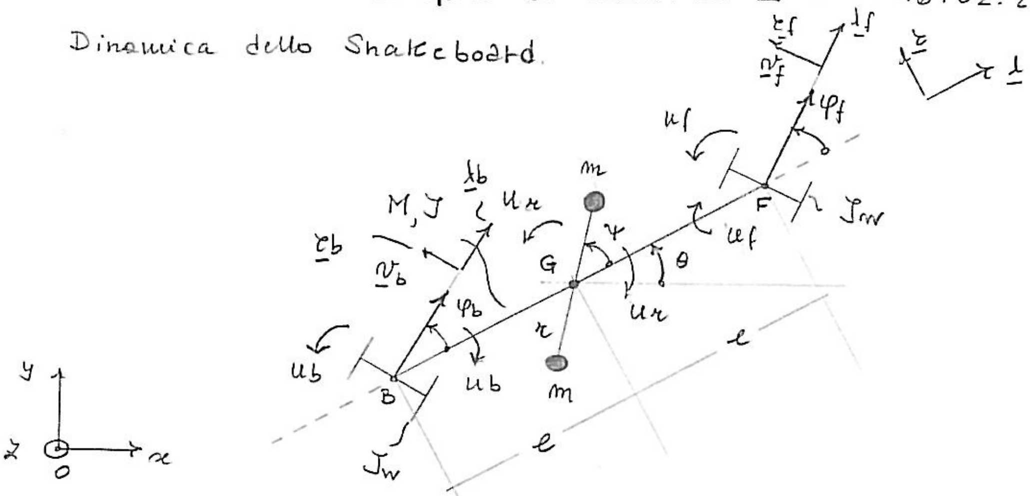
Compito di Robotica I - 16.02.2010.

Dinamica dello Skateboard.



- u_r coppia interna raider
- u_f coppia interna front wheels
- u_b coppia interna back wheels

M = massa complessiva della tavola

$2m$ = " " del raider

J = mom. inerzia tavola (asse z)

J_w = " " di ciascun assale (asse z)

l = distanze $\|\underline{BG}\|$ e $\|\underline{GF}\|$.

G: baricentro del sistema

F: asse front wheel

B: asse back wheel

n.b. non si tiene conto dell' inerzia degli assali attorno agli assi di rotazione (assi ruota) e della loro massa

Equazioni di Lagrange per il sistema non vincolato (ossia senza vincoli tipo uniciclo)

$L = T - U$; $U \equiv 0$ (siamo su un piano orizzontale)

$$T = \frac{1}{2}(M+2m)(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_w(\dot{\theta}+\dot{\varphi}_f)^2 + \frac{1}{2}J_w(\dot{\theta}+\dot{\varphi}_b)^2 + \frac{1}{2}(2mr^2)(\dot{\theta}+\dot{\psi})^2$$

Equazioni di vincolo sulle velocità

$$\underline{v}_G = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} ; \quad \underline{v}_f = \begin{bmatrix} \dot{x} - l\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} + l\cos\theta\,\dot{\theta} \end{bmatrix} ; \quad \underline{v}_b = \begin{bmatrix} \dot{x} + l\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} - l\cos\theta\,\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

versori

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} ; \quad \underline{t} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} ; \quad \underline{l}_f = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi_f) \\ \sin(\theta+\varphi_f) \end{bmatrix} ; \quad \underline{t}_f = \begin{bmatrix} -\sin(\theta+\varphi_f) \\ \cos(\theta+\varphi_f) \end{bmatrix}$$

$$\underline{l}_b = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi_b) \\ \sin(\theta+\varphi_b) \end{bmatrix} ; \quad \underline{t}_b = \begin{bmatrix} -\sin(\theta+\varphi_b) \\ \cos(\theta+\varphi_b) \end{bmatrix}$$

Vincoli che esprimono il fatto che la velocità dei punti F e B debbono essere allineate, rispettivamente, con le direzioni $\underline{l}_f$ e $\underline{l}_b$ ossia, equivalentemente, $\underline{v}_f \cdot \underline{t}_f = 0 \wedge \underline{v}_b \cdot \underline{t}_b = 0$

$$\underline{v}_f \cdot \underline{t}_f = (\dot{x} - l \sin\theta\, \dot{\theta})(-\sin(\theta+\varphi_f)) + (\dot{y} + l\cos\theta\,\dot{\theta})\cos(\theta+\varphi_f) = 0$$

equivalente a:

$$-\sin(\theta+\varphi_f)\,\dot{x} + \cos(\theta+\varphi_f)\,\dot{y} + (l\sin\theta\sin(\theta+\varphi_f) + l\cos\theta\cos(\theta+\varphi_f))\dot{\theta} = 0$$

ma

$$\cos(\theta+\varphi_f)\cos\theta + \sin(\theta+\varphi_f)\sin\theta = \cos(\theta+\varphi_f-\theta) = \cos\varphi_f$$

da cui:

$$-\sin(\theta+\varphi_f)\,\dot{x} + \cos(\theta+\varphi_f)\,\dot{y} + l\cos\varphi_f\,\dot{\theta} = 0$$

per quanto riguarda l'assale posteriore

$\underline{v}_b \cdot \underline{t}_b = 0$ porta a scrivere:

$$(\dot{x} + l\sin\theta\,\dot{\theta})(-\sin(\theta+\varphi_b)) + (\dot{y} - l\cos\theta\,\dot{\theta})\cos(\theta+\varphi_b) = 0$$

$$-\sin(\theta+\varphi_b)\,\dot{x} + \cos(\theta+\varphi_b)\,\dot{y} - l\cos\varphi_b = 0$$

La configurazione del sistema è data da:

$$\underline{q} = (x, y, \theta, \psi, \varphi_f, \varphi_b)$$

Dunque i vincoli in forma Pfaffiana si scrivono come:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta+\varphi_f) & \cos(\theta+\varphi_f) & l\cos\varphi_f & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta+\varphi_b) & \cos(\theta+\varphi_b) & -l\cos\varphi_b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi}_f \\ \dot{\varphi}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ossia

$$A(\underline{q})\,\dot{\underline{q}} = \underline{0}$$

Equazioni del moto: (la T non dipende da $\underline{q}$, perciò...)

$$T = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T B \dot{\underline{q}} = \frac{1}{2}[\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{\theta}\ \dot{\psi}\ \dot{\varphi}_f\ \dot{\varphi}_b]\, B \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi}_f \\ \dot{\varphi}_b \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} M+2m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M+2m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_\theta & 2mr^2 & J_w & J_w \\ 0 & 0 & 2mr^2 & 2mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_w & 0 & J_w & 0 \\ 0 & 0 & J_w & 0 & 0 & J_w \end{bmatrix}$$

con $J_\theta = J + 2J_w + 2mr^2$

Essendo la B indip. da $\underline{q}$ si ha $C(\underline{q},\dot{\underline{q}}) \equiv 0$

Non essendoci variazione di energia potenziale $\underline{G} \equiv \underline{0}$

Perciò la struttura delle equazioni risulta

$$B\ddot{\underline{q}} + A^T(q)\,\underline{\lambda} = \underline{u}$$

Rimane da calcolare la componente Lagrangiana delle forze attive.

Le forze attive sono le coppie <u>interne</u> u_r, u_f e u_b.

Calcolo delle Q_h

$$Q_h := F \cdot \frac{\partial(\underline{OP})}{\partial q_h} + \underline{M} \cdot \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial q_h}$$

rotazione

$$Q_x = u_r\,\underline{k} \cdot \frac{\partial((\theta+\psi)\,\underline{k})}{\partial x} + \dots = 0$$

nessuna rotazione dip. dalla traslazione x

$Q_y = 0$ (stesso discorso di prima)

nessuna rotazione dip. dalla traslaz. y

$$Q_\theta = u_r\,\underline{k} \cdot \frac{\partial((\theta+\psi)\,\underline{k})}{\partial \theta} - u_r\,\underline{k} \cdot \frac{\partial\,\theta \underline{k}}{\partial \theta} +$$

$$+ u_f\,\underline{k} \cdot \frac{\partial((\theta+\varphi_f)\,\underline{k})}{\partial \theta} - u_f\,\underline{k} \cdot \frac{\partial\,\theta \underline{k}}{\partial \theta} +$$

$$+ u_b\,\underline{k} \cdot \frac{\partial((\theta+\varphi_b)\,\underline{k})}{\partial \theta} - u_b\,\underline{k} \cdot \frac{\partial(\theta\,\underline{k})}{\partial \theta} =$$

$$= 0$$

$$Q_\psi = u_r\,\underline{k} \cdot \frac{\partial((\theta+\psi)\,\underline{k})}{\partial \psi} - u_r\,\underline{k} \cdot \cancel{\frac{\partial\,\theta \underline{k}}{\partial \psi}}^{\,0} +$$

$$+ u_f\,\underline{k} \cdot (\cancel{\quad})^{0} - u_f\,\underline{k} \cdot (\cancel{\quad})^{0} +$$

$$+ u_b\,\underline{k} \cdot (\cancel{\quad})^{0} - u_b\,\underline{k} \cdot (\cancel{\quad})^{0} =$$

$$= u_r$$

$$Q_{\varphi_f} = u_r\,\underline{k} \cdot \cancel{\frac{\partial}{\partial \varphi_f}((\theta+\psi)\,\underline{k})}^{\,0} - u_r\,\underline{k}\,\cancel{\frac{\partial\,\theta \underline{k}}{\partial \varphi_f}}^{\,0} +$$

$$+ u_f\,\underline{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_f}((\theta+\varphi_f)\,\underline{k}) - u_f\,\underline{k} \cdot \cancel{\frac{\partial\,\theta \underline{k}}{\partial \varphi_f}}^{\,0} + \dots$$

$$+ \quad u_b \underline{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_f} \cancel{((\theta + \varphi_b)\underline{k})}^{0} \quad - \quad u_b \underline{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_f} \cancel{(\theta \underline{k})}^{0} =$$

$$= \quad u_f$$

$$Q_{\varphi_b} = u_b$$

Allora riassemblando tutti i componenti si ottiene:

$$\begin{bmatrix} M+2m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M+2m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_\theta & 2mr^2 & J_W & J_W \\ 0 & 0 & 2mr^2 & 2mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_W & 0 & J_W & 0 \\ 0 & 0 & J_W & 0 & 0 & J_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi}_f \\ \ddot{\varphi}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S_{(\theta+\varphi_f)} & -S_{(\theta+\varphi_b)} \\ C_{(\theta+\varphi_f)} & C_{(\theta+\varphi_b)} \\ L\,C\varphi_f & -L\,C\varphi_b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_r \\ u_f \\ u_b \end{bmatrix}$$

$$+$$

$$A(\underline{q})\,\dot{\underline{q}} = \underline{0}$$

8 eq.ni differenziali (6 da din, 2 da vincoli)

8 f.ni incognite $x, y, \theta, \psi, \varphi_f, \varphi_b, \lambda_1$ e λ_2.

Robot cooperanti

Ci rifacciamo alle definizione di twist rappresentanti uno stesso atto di moto rigido espressi rispetto a 2 poli differenti, nella fattispecie i punti A e B.

Perché due twist, scritti in compon. $\{0\}$, ${}^0\underline{\xi}_A$ e ${}^0\underline{\xi}_B$ definiti come

$$ {}^0\underline{\xi}_A = \begin{bmatrix} {}^0\underline{v}_A \\ {}^0\underline{\omega}_A \end{bmatrix} \quad e \quad {}^0\underline{\xi}_B = \begin{bmatrix} {}^0\underline{v}_B \\ {}^0\underline{\omega}_B \end{bmatrix} $$

siano due espressioni diverse dello stesso atto di m. rigido occorre che

$$ {}^0\underline{\omega}_A = {}^0\underline{\omega}_B \qquad e \qquad {}^0\underline{v}_B = {}^0\underline{v}_A + {}^0\underline{\omega}_A \times AB = $$
$$ = {}^0\underline{v}_A + \hat{\underline{BA}}\, {}^0\underline{\omega}_A $$

Globalmente quindi

$$ {}^0\underline{\xi}_B = \begin{bmatrix} {}^0\underline{v}_B \\ {}^0\underline{\omega}_B \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c|c} I_3 & \hat{BA} \\ \hline O_3 & I_3 \end{array} \right\} \begin{Bmatrix} {}^0\underline{v}_A \\ {}^0\underline{\omega}_A \end{Bmatrix} =: T_{BA}\, {}^0\underline{\xi}_A $$

Essendo:

$$ {}^0\underline{\xi}_B = {}^0J_B\, \dot{\underline{q}}_B \quad e \quad {}^0\underline{\xi}_A = {}^0J_A\, \dot{\underline{q}}_A $$

si deve avere

$$ {}^0J_B\, \dot{\underline{q}}_B = T_{BA}\, {}^0J_A\, \dot{\underline{q}}_A $$

ossia

$$ 6\Big\{ \underbrace{\overbrace{\left[\, {}^0J_B \;\middle|\; -T_{BA}\, {}^0J_A \,\right]}^{8}}_{A} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{q}}_B \\ \dot{\underline{q}}_A \end{Bmatrix} $$

chiamate $\underline{BA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}$

$\dot{q} \mid A\dot{\underline{q}} = \underline{0}$ dati da:

$$ A = \begin{bmatrix} h_a & 0 & l_2 & l_2 & d+l_1 & 0 & h_2-h_a & d \\ 0 & 0 & l_3 & 0 & 0 & h_a-h_1 & 0 & 0 \\ -l_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(d+l_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; $$

$$ \begin{Bmatrix} \dot{\underline{q}}_B \\ \dot{\underline{q}}_A \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{l_1}{d+l_1+l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{d+l_2}{d+l_1+l_2} \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ l_3 \\ 0 \\ -h_2/(d+l_1+l_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h_2/(d+l_1+l_2) \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix} \right. $$

Naturalmente i Jacobiani erano { nella config. di figura):

$$
{}^{0}J_A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -(h_A - h_1) \\ l_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -(h_2 - h_A) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}J_B = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} h_A \\ 0 \\ -l_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} l_2 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}
$$

l'interpretazione delle soluzione $(A\,\dot{\underline{q}} = \underline{0})$ porta a scrivere:

$$
1^{a} \begin{cases} \dot q_{A_1} = -\dfrac{d + l_2}{d + l_1 + l_2} \ ; \ \dot q_{A_2} = 0 \ ; \ \dot q_{A_3} = 0 \ ; \ \dot q_{A_4} = 1 \\ \dot q_{B_1} = 0 \ ; \ \dot q_{B_2} = 0 \ ; \ \dot q_{B_3} = 0 \ ; \ \dot q_{B_4} = \dfrac{l_1}{d + l_1 + l_2} \end{cases}
$$

$$
2^{a} \begin{cases} \dot q_{A_1} = -\dfrac{h_2}{(d + l_1 + l_2)} \ ; \ \dot q_{A_2} = 0 \ ; \ \dot q_{A_3} = 1 \ ; \ \dot q_{A_4} = 0 \\ \dot q_{B_1} = 1 \ ; \ \dot q_{B_2} = l_3 \ ; \ \dot q_{B_3} = 0 \ ; \ \dot q_{B_4} = -\dfrac{h_2}{(d + l_1 + l_2)} \end{cases}
$$

Entrambi i moti comportano rototraslazione del corpo rigido virtuale ed in entrambi i casi è rispettata la condizione che ${}^{0}\underline{v}_B - {}^{0}\underline{v}_A$ non ha componente lungo la congiungente i punti A e B.