

- 1) La Figura 1 mostra lo schema cinematico funzionale del dito di Stanford/JPL e del relativo sistema di attuazione mediante tendini inestensibili e pulegge. Il dito è schematizzato come un robot seriale costituito dai link L_i , ($i = 0, \dots, 3$) (L_0 rappresenta il telaio) di lunghezze a_i incernierati in A , B e C . Si prenda il punto D come origine della terna End-Effector. L'attuazione del dito è realizzata mediante 4 tendini inestensibili che si impegnano sulle pulegge come rappresentato in Figura 1. Ciascun tendine con il relativo sistema di pulegge interessate viene definito *linea di trasmissione*. Ad esempio, la linea di trasmissione del tendine 1 è costituita dal tendine rosso, collegato a L_3 , dalla puleggia calettata su C di raggio r_3 , dalla puleggia su B di raggio r_8 e, infine, dalla puleggia su A di raggio r_4 . Con s_1 si indica lo spostamento del capo libero del tendine 1. Considerazioni analoghe possono essere fatte per le altre 3 linee di trasmissione. Le pulegge calettate su A hanno raggi (crescenti): r_4, r_5, r_6 ed r_7 , su B : r_8 ed r_2 , su C : r_3 .

Si noti che le pulegge sono: (i) calettate "folli" sui rispettivi assi, (ii) ruotano indipendentemente l'una dall'altra e dai link, (iii) è solo la presenza dei tendini inestensibili ad introdurre delle relazioni vincolari fra le loro rotazioni e quelle dei link (es. per la presenza del tendine 1 collegato a L_3 si avrà $\theta_{p_3} = \theta_3$).

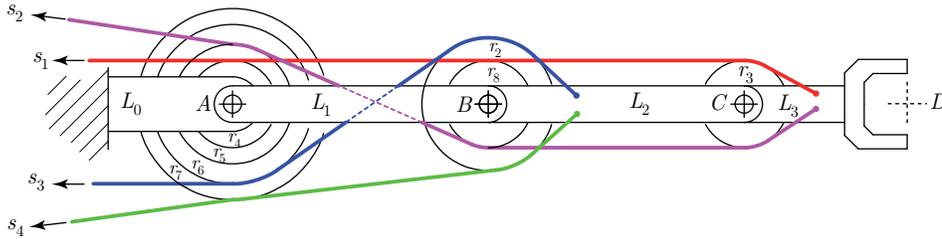


Figura 1: Schema funzionale del sistema di attuazione del dito di Stanford/JPL.

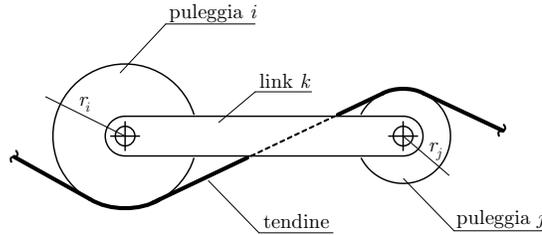
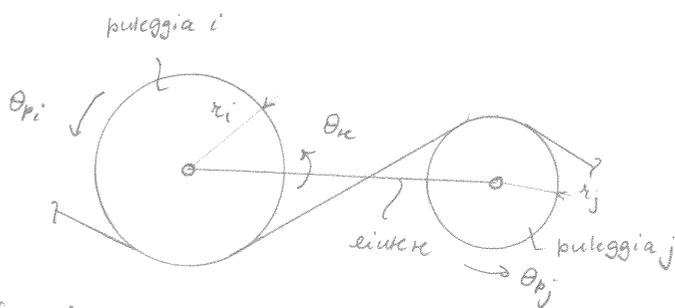


Figura 2: Schema per la scrittura dell'equazione del circuito elementare.

Fissato come positivo il verso antiorario, si indichino con θ_k la rotazione del link k , con θ_{p_j} la rotazione della puleggia j , con q_k la rotazione relativa del link k rispetto al link $k - 1$ ($q_k = \theta_k - \theta_{k-1}$). Con riferimento alla Figura 2, considerando ciascun tendine inestensibile e trascurando variazioni di tensione all'interno di una stessa linea (ad es. in presenza di inerzia delle pulegge e per fenomeni di attrito e isteresi), si scriva: (i) l'equazione che lega θ_{p_j} , θ_{p_i} e θ_k , tenendo conto del percorso (incrociato o parallelo) del tendine fra due pulegge consecutive; (ii) l'equazione che lega le rotazioni del link k , del link $k + 1$ e della puleggia interposta fra questi (formula di composizione di rotazioni relative); (iii) si combinino opportunamente queste equazioni per ottenere, per la singola linea di trasmissione, l'equazione che lega la rotazione assoluta della puleggia più prossima al telaio ai vari q_i ; (iv) si scriva la relazione che lega la rotazione assoluta della puleggia più prossima al telaio allo spostamento del capo libero del tendine s_i (si prenda $s_i > 0$ per tendine in trazione); (v) si scriva, per la singola linea di trasmissione, l'equazione che lega lo spostamento del capo libero del tendine ai vari q_i ; (vi) si scrivano le 4 equazioni di vincolo che legano gli spostamenti $\mathbf{s} = [s_1 \dots s_4]^T \in \mathbb{R}^4$ alle rotazioni $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_3]^T \in \mathbb{R}^3$; (vii) si discuta la capacità di conoscere la configurazione \mathbf{q} del dito noti gli spostamenti dei capi dei tendini \mathbf{s} ; (viii) applicando il Principio dei Lavori Virtuali si determini la relazione fra le coppie (interne) ai giunti $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ e le tensioni nei tendini $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^4$ ($\xi_i > 0$ se tendine è teso); (ix) si scriva la forma generale della relazione fra le coppie $\boldsymbol{\tau}$ e le tensioni nei tendini $\boldsymbol{\xi}$ e si discuta la possibilità di realizzare coppie arbitrarie agendo sul sistema di tendini (il tendine non trasmette azioni di compressione!); (x) si scriva la relazione che, all'equilibrio, lega un wrench esterno \mathbf{w}_D e le tensioni $\boldsymbol{\xi}$.

Svolgimento

(i) Equazioni che lega rotazioni assolute delle pulegge i e j alla rotazione assoluta del link k



Se link k fosse fisso (non ruotasse) si avrebbe:

$$r_i \theta_{pi} = \pm r_j \theta_{pj}$$

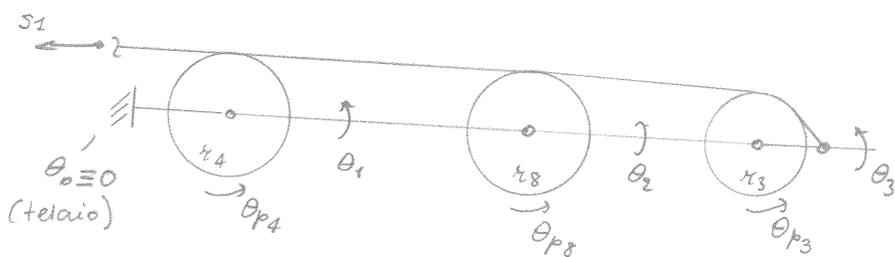
a causa del fatto che il tendine è inestensibile e trasmette la velocità periferica da una puleggia alle successive.

Se link k ruota, si ha un'aggiunta della equazione sopra ma solo rispetto ad un osservatore solidale al link k . Quindi definite:

$$\theta_{pi,k} = \theta_{pi} - \theta_k \quad \text{e} \quad \theta_{pj,k} = \theta_{pj} - \theta_k \quad \text{si ottiene}$$

$$\boxed{r_i \theta_{pi,k} = \pm r_j \theta_{pj,k}} \quad (1) \quad \text{n.b.} \begin{cases} +, & \text{se il percorso del tendine è "parallelo"} \\ -, & \text{se è "incrociato"} \end{cases} \quad (\text{come in fig sopra})$$

Consideriamo ad esempio la linea di trasmissione 1:

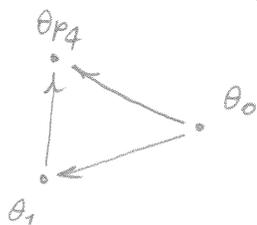
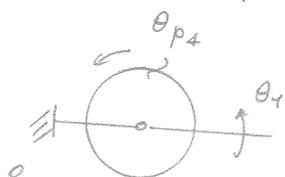


n.b. questi θ_i, θ_p sono assoluti come già detto sopra!

Poniamo applicate a questa linea di trasmissione l'equ. (1) per 2 volte (su una serie di tre pulegge ho 2 coppie consecutive) ottenendo

$$\begin{cases} \theta_{p4,1} r_4 = \theta_{p8,1} r_8 & (\text{pul } r_4, \text{ link } 1, \text{ pul } r_8) \quad (2) \\ \theta_{p8,2} r_8 = \theta_{p3,2} r_3 & (\text{pul } r_8, \text{ link } 2, \text{ pul } r_3) \quad (3) \end{cases} \quad \text{n.b. in entrambe ho il segno "+" poiché ho in entrambe le coppie percorso parallelo}$$

(ii) In attesa di far compatire nelle equ. di costituzione cercate fra S_i e vari q_i [dove $q_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ (rotaz. di un link rispetto al precedente)] proprio i q_i , posso scrivere le formule che regano le rotazioni relative ottenendo:



f. composizione moti (rotazioni) relativi

$$\theta_{p4,1} = \theta_{p4,0} - \theta_{1,0}$$

Questa formula può essere applicata a tutti e 3 i "template" link-puleggia-link della linea di trasmissione ottenendo:

$$\begin{cases} \theta_{p4,1} = \theta_{p4,0} - \theta_{1,0} = (\text{solo perché } \theta_0 \equiv 0) = \theta_{p4} - \theta_1 = \theta_{p4} - q_1 & (4) \\ \theta_{p8,2} = \theta_{p8,1} - \theta_{2,1} = \theta_{p8,1} - q_2 & (5) \\ \theta_{p3,3} = \theta_{p3,2} - \theta_{3,2} = \theta_{p3,2} - q_3 & (6) \end{cases}$$

Si noti che, come enunciato nel testo, a causa della presenza del tendine inesistente, $\theta_{p3,3} = 0$ (così, come quando tratteremo le altre linee sarà ad esempio: $\theta_{p2,2} = 0$) (7)

Allora nelle equazioni scritte (sono $2 + 3 + 1 = 6$) abbiamo le quantità: (q_1, q_2, q_3) ($\theta_{p4,0}, \theta_{p4,1}, \theta_{p8,1}, \theta_{p8,2}, \theta_{p3,2}, \theta_{p3,3}$) che sono in tale S. Dunque questo sistema consente, una volta fissate tre quantità (es. q_1, q_2 e q_3), di determinare tutte le altre. In particolare, in ottica di trovare un legame con lo spostam. del capo del tendine S_1 , interessa trovare $\theta_{p4,0} = \theta_{p4}$, dato che poi sarà $S_1 = +r_4 \theta_{p4}$.

Allora da (7) in (6) $\theta_{p3,2} = q_3$ e da (3) $\theta_{p8,2} = \frac{r_3}{r_8} q_3$ che poi inserita in (5) fornisce

$$\theta_{p8,2} = \frac{r_3}{r_8} q_3 = \theta_{p8,1} - q_2$$

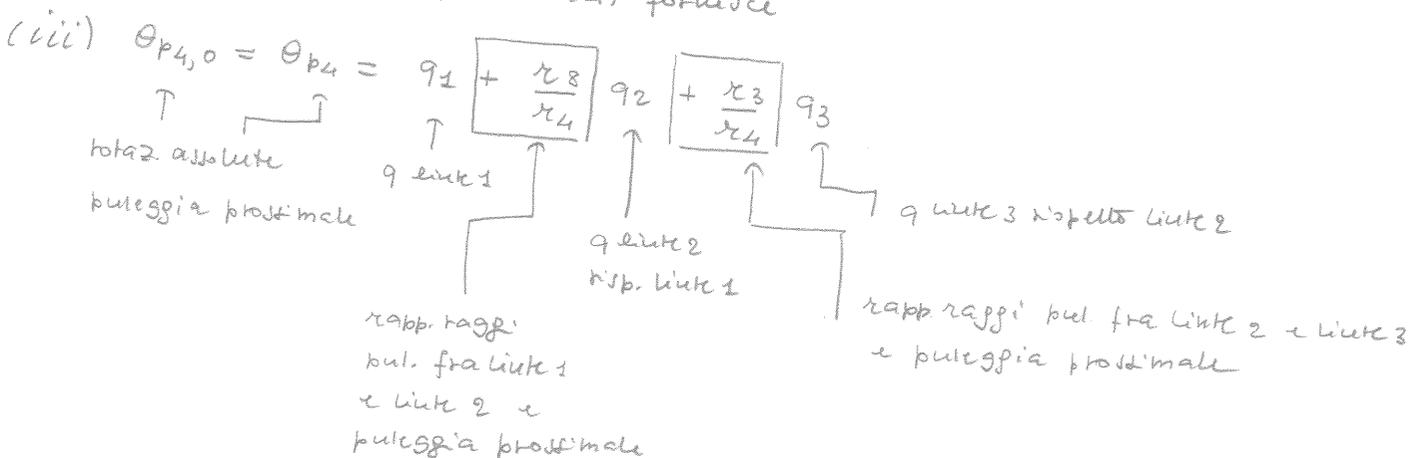
da cui

$$\theta_{p8,1} = q_2 + \frac{r_3}{r_8} q_3$$

che inserita in (2) fornisce

$$\theta_{p4,1} = \frac{r_8}{r_4} \left(q_2 + \frac{r_3}{r_8} q_3 \right) = \frac{r_8}{r_4} q_2 + \frac{r_3}{r_4} q_3$$

Questa inserita infine in (4) fornisce



Nota bene che si ha $+\frac{\kappa_8}{\kappa_4}$ perché percorso tendine fra p_4 e p_8 è parallelo,

$+\frac{\kappa_3}{\kappa_4}$ perché globalmente percorso fra p_4 e p_3 è anch'esso parallelo

(iv) Adesso per ottenere relazione fra $\theta_{p_4,0} = \theta_{p_4}$ e S_1 si guarda se $S_1 > 0$ è associato a $\pm \kappa_4 \theta_{p_4}$.

In questo caso si ha $S_1 = \kappa_4 \theta_{p_4}$.

(v) Dunque per la singola linea di trasmissione (la 1ª in questo caso) si ha:

$$S_1 = \kappa_4 \theta_{p_4} = \kappa_4 q_1 + \kappa_8 q_2 + \kappa_3 q_3$$

(vi) Nei casi delle linee 2, 3 e 4 per analogia si scrive

linea 2 $\theta_{p_5,0} = \theta_{p_5} = q_1 - \underbrace{\left(\frac{\kappa_8}{\kappa_5}\right)}_{\text{incrociato } p_5 - p_8} q_2 - \underbrace{\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_5}\right)}_{\text{globalmente incrociato } p_5 - p_3} q_3$
 $S_2 = \kappa_5 \theta_{p_5}$

linea 3 $\theta_{p_6,0} = \theta_{p_6} = q_1 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_6}\right) q_2$
 $S_3 = -\kappa_6 \theta_{p_6}$

linea 4 $\theta_{p_7,0} = \theta_{p_7} = q_1 + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_7}\right) q_2$
 $S_4 = -\kappa_7 \theta_{p_7}$

quindi:

$$\begin{cases} S_1 = \kappa_4 q_1 + \kappa_8 q_2 + \kappa_3 q_3 \\ S_2 = \kappa_5 q_1 - \kappa_8 q_2 - \kappa_3 q_3 \\ S_3 = -\kappa_6 q_1 + \kappa_2 q_2 \\ S_4 = -\kappa_7 q_1 - \kappa_2 q_2 \end{cases}$$

(vi bis) In forma matriciale si ha quindi:

$$\underline{S} = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4]^T; \quad \underline{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T; \quad A = \begin{bmatrix} \kappa_4 & \kappa_8 & \kappa_3 \\ \kappa_5 & -\kappa_8 & -\kappa_3 \\ -\kappa_6 & \kappa_2 & 0 \\ -\kappa_7 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\underline{S} = A \underline{q}$$

Se interessa conoscere le q note le S si può calcolare $\underline{q} = A^+ \underline{S}$ dove queste $A^+ = A^L$ (inversa sinistra dato che A è rettangolare alta)

(vii) Introducendo $\underline{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]^T$ (coppie interne ai giunti); $\underline{g} = [g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4]^T$ (tensioni nei tendini) si può scrivere:

Lavoro virtuale fatto dalle coppie:

$$\delta W_c = \underline{c}^T \delta \underline{q}$$

Lavoro virtuale fatto dalle tendine nei tendini:

$$\delta W_g = \underline{g}^T \delta \underline{s}$$

Condizioni di bilancio statico: $\delta W_c = \delta W_g$

$$\delta W_c = \underline{c}^T \delta \underline{q} = \delta W_g = \underline{g}^T \delta \underline{s} = \underline{g}^T (\underbrace{A \delta \underline{q}}_{\delta \underline{s}}) = \underline{g}^T A \delta \underline{q}$$

da cui: ($\forall \delta \underline{q} \neq \underline{0}$)

$$\underline{c}^T = \underline{g}^T A \iff \boxed{\underline{c} = A^T \underline{g}} \quad \text{definendo } A^T = B \quad \boxed{\underline{c} = B \underline{g}}$$

(viii) A demo, per esercitate delle coppie ai giunti \underline{c} si possono applicare delle tendine nei tendini del tipo

$$\underline{c} = B^+ \underline{c} + H \underline{l} \quad \text{con } B^+ = B^R = B^T [BB^T]^{-1} \text{ e' inversa destra}$$

Se $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$; $B = A^T \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$; $B^+ \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$

$H \in \mathbb{R}^{4 \times (4-3)} = H \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ base del nullo di B (con B rango pieno righe)

Nota bene che essendo H in questo caso un vettore colonna ($H \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$) si ha

$$\underline{c} = \underbrace{B^+ \underline{c}}_{\substack{\text{soluzione partic.} \\ \text{della complete}}} + \underbrace{H \underline{l}}_{\substack{\text{forma generale} \\ \text{della soluzione della} \\ \text{omogenea } (B \underline{g} = \underline{0})}}, \quad \underline{l} \in \mathbb{R}$$

Verifica che e' soluzione

$$B \underline{c} = B \underbrace{\underline{g}}_{\substack{\uparrow \\ \text{da sopra}}} = B (B^+ \underline{c} + H \underline{l}) = \underbrace{BB^+}_{I_{3 \times 3}} \underline{c} + \underbrace{BH}_{\substack{\equiv \\ 0}} \underline{l} = \underline{c} \quad \text{OK, c.v.d.}$$

Osservazioni sulla possibilita' di esercitate \underline{c} arbitrario con $\underline{g} \geq \underline{0}$ (ovvero tendine tutti positive) Se la base del nullo H e' una colonna che si scrive con elem. tutti positivi, allora nonostante il termine $B^+ \underline{c}$ possa contenere qualche elem. negativo, e' sempre possibile per un opportuno \underline{l} fare in modo che $g_i > 0 \forall i$.

(ix) Dato che $\underline{c} = J_D^T \underline{w}_D$ allora $B \underline{g} = J_D^T \underline{w}_D$ dunque (da prima)

$$\boxed{\underline{g} = B^+ (J_D^T \underline{w}_D) + H \underline{l}} \quad \parallel \text{ queste sono le tendine } \underline{g} \text{ da generare per ottenere il wrench } \underline{w}_D \text{ all'end-effector}$$