Compito di Meccanica dei Robot – 13 Giugno 2012

1) La Figura 1 mostra schematicamente due piastre di un gripper nell'atto di manipolare una sfera. La piastra inferiore, a cui è solidale il sistema di riferimento $\{S\}$, è fissa. La piastra superiore, omogenea e di dimensioni l_x ed l_y, ha collegato un sistema di riferimento $\{P\}$ e può effettuare un moto qualsiasi in $SE(2)$, rimanendo parallela ed a distanza $2a$ dalla piastra inferiore. La sfera è omogenea ed ha centro nel punto O_b, origine del sistema di riferimento *body* $\{B\}$ per la sfera. Si considerino note le proprietà inerziali (da indicare) sia della sfera che della piastra mobile. Nei punti di contatto C_s e C_p fra sfera e piastre vi sono, rispettivamente, i seguenti vincoli: in C_s: no strisciamento relativo, si spin relativo; in C_p: no strisciamento relativo, no spin relativo.

Dopo aver introdotto una parametrizzazione per la sfera e per la piastra superiore, si risponda ai seguenti quesiti: (i) si scrivano le equazioni differenziali di vincolo fra sfera e piastra fissa; (ii) si scrivano le equazioni differenziali di vincolo fra sfera e piastra mobile; (iii) dopo aver definito l'opportuno vettore di configurazione $\boldsymbol{q}$ si scrivano le equazioni globali di vincolo in forma Pfaffiana $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$; (iv) si descriva il modo in cui potrebbero essere impiegate le equazioni di vincolo cinematico per valutare le performance di un tale gripper nella manipolazione di oggetti sferici.

Ipotizzando che un sistema di attuazione (esterno) applichi alla piastra mobile un wrench ${}^P w_{O_p} = [f_{x_p}\, f_{y_p}\, m_{z_p}]^T$ (componenti in $\{P\}$), (v) si scrivano le equazioni della dinamica del sistema.

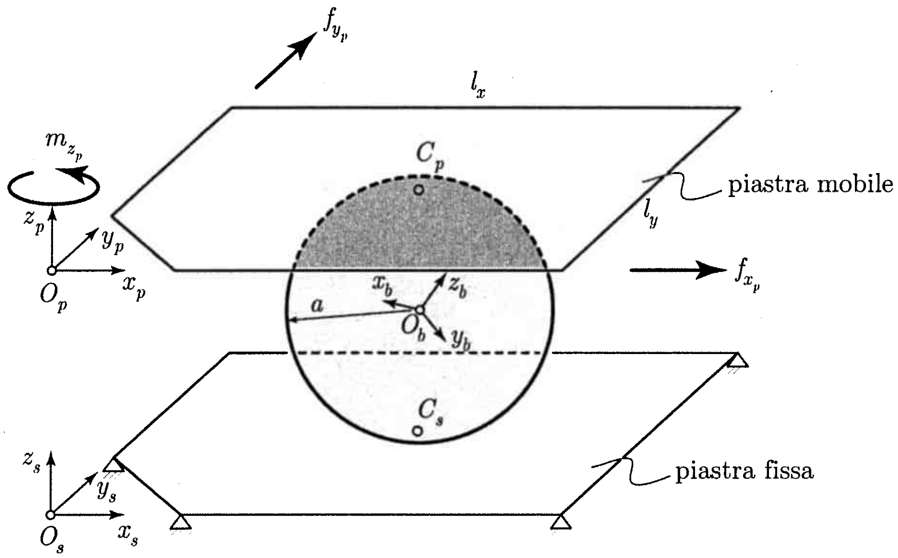


Figura 1: Gripper a facce piane nell'atto di manipolare un oggetto sferico.

2) Con riferimento alla Figura 2, si valuti qualitativamente la capacità del meccanismo, nella configurazione rappresentata, di resistere alla forza di contatto $\boldsymbol{F}$.

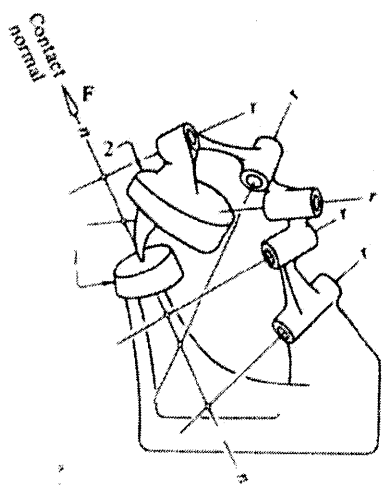
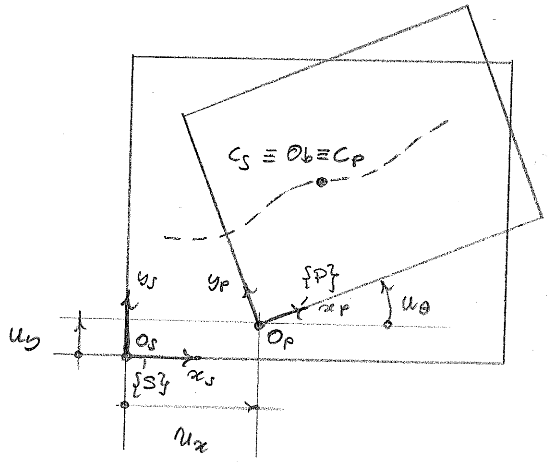


Figura 2: Seriale 5R in contatto con l'ambiente.

Vista dall'alto del sistema in una configurazione generica



Versori:

- di $\{S\}$: $\{\underline{i}_S, \underline{j}_S, \underline{k}_S\}$
- di $\{P\}$: $\{\underline{i}_P, \underline{j}_P, \underline{k}_P\}$

Vettore posizione di C_S, punto geometrico di contatto fra piastra inferiore e sfera, in coordinate $\{S\}$ descritto da: $\underline{r}_S = [x_S \;\; y_S \;\; 0]^T$.

Vettore posizione di C_P, punto geometrico di contatto fra sfera e piastra superiore, in coordinate $\{P\}$ descritto da: $\underline{r}_P = [x_P \;\; y_P \;\; 0]^T$

Vettore ${}^S[\underline{O_S O_P}] = [u_x \;\; u_y \;\; 2a]^T$. Orientazione di $\{P\}$ rispetto ad $\{S\}$: u_θ

Scriviamo vincolo di <u>non strisciamento</u> <u>fra sfera e piastra inferiore</u>:
(relazioni scritte in componenti $\{S\}$ del tutto analoghe ad esercizi svolti in classe)

$$\left.\begin{aligned} {}^S\omega_{sb_x}\, a &= -\dot{y}_S \\ {}^S\omega_{sb_y}\, a &= \dot{x}_S \end{aligned}\right\} \text{non strisciamento.}$$

<u>Osservazione</u>: se lo spin fra questi 2 corpi è consentito non si devono imporre altri vincoli: perché incartarsi nel voler scrivere la <u>non imposizione</u> di un vincolo?

Scriviamo adesso il vincolo di <u>no spin fra sfera e piastra superiore</u>
(relazioni scritte in $\{S\}$)

$${}^S\omega_{sb_z} = {}^S\omega_{sp_z}$$

$\downarrow$

$[0 \;\; 0 \;\; 1]\, {}^S\omega_{sb}$

${}^S\omega_{sp_z} \rightarrow$ banalmente $\rightarrow \dot{u}_\theta$ (dato che $\{P\}$ fa moto in $SE(2)$ e si è parametrizzato la sua orientazione con u_θ)

con ${}^S\omega_{sb} = {}^S J_{ZYZ}(\psi, \theta, \varphi) \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$, dove ${}^S J_{ZYZ}(\psi,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\psi & \cos\psi \sin\theta \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

in definitiva si ha:

$$[1 \;\; 0 \;\; \cos\theta] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \dot{u}_\theta$$

L'ultimo vincolo da imporre riguarda il <u>non strisciamento fra sfera e piastra superiore</u> nel punto C_p.

$$\underline{v}_{C_p \in \text{sfera}} = \underline{v}_{O_b} + \underline{\omega}_{sb} \times \underline{O_bC_p} = \dot{x}_s \underline{i}_s + \dot{y}_s \underline{j}_s + (\underset{\sim}{e}_s \, {}^s\omega_{sb}) \times a \underline{k}_s$$

$$\underline{v}_{C_p \in \text{piastra sup}} = \underline{v}_{O_p} + \dot{u}_\theta \underline{k}_s \times \underline{O_pC_p} = \dot{u}_x \underline{i}_s + \dot{u}_y \underline{j}_s + \dot{u}_\theta \underline{k}_s \times [(x_s-u_x)\underline{i}_s + (y_s-u_y$$

e ciò che si deve imporre è che

$$\underline{v}_{C_p \in \text{sfera}} = \underline{v}_{C_p \in \text{piastra sup}}$$

Allora semplificando le espressioni

$$\underline{v}_{C_p \in \text{sfera}} = (\dot{x}_s + a \, {}^s\omega_{sb_y})\underline{i}_s + (\dot{y}_s - a \, {}^s\omega_{sb_x})\underline{j}_s$$

$$\underline{v}_{C_p \in \text{piastre sup}} = [\dot{u}_x - \dot{u}_\theta (y_s - u_y)]\underline{i}_s + [\dot{u}_y + \dot{u}_\theta (x_s - u_x)]\underline{j}_s$$

Allora eguagliando si ha

$$\dot{x}_s + \begin{bmatrix} 0 & a\cos\psi & a\sin\psi\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\psi \\ \dot\theta \\ \dot\varphi \end{bmatrix} - \dot{u}_x + (y_s - u_y)\dot{u}_\theta = 0$$

$$\dot{y}_s - \begin{bmatrix} 0 & -a\sin\psi & a\cos\psi\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\psi \\ \dot\theta \\ \dot\varphi \end{bmatrix} - \dot{u}_y - (x_s - u_x)\dot{u}_\theta = 0$$

Ispezionando le espressioni delle equazioni differenziali di vincolo si evince che la scelta di un vettore di configurazione $\underline{q} = [x_s \ y_s \ \psi \ \theta \ \varphi \ u_x \ u_y \ u_\theta]^T \in \mathbb{R}^8$ consente la scrittura del sistema complessivo delle eq.ni di vincolo nella forma

$$A(\underline{q})\dot{\underline{q}} = \underline{0}$$

In particolare si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -a\sin\psi & a\cos\psi\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a\cos\psi & a\sin\psi\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & a\cos\psi & a\sin\psi\sin\theta & -1 & 0 & y_s-u_y \\ 0 & 1 & 0 & a\sin\psi & -a\cos\psi\sin\theta & 0 & -1 & u_x-x_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \\ \dot\psi \\ \dot\theta \\ \dot\varphi \\ \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A(\underline{q}) \in \mathbb{R}^{5\times 8}$, $\text{rank}(A(\underline{q})) = 5$

Dunque $\dim(\ker(A)) = 8-5 = 3 \rightarrow$ il sistema ha 3 g.d.l.

Tali equazioni consentono di studiare cinematicamente il sistema.
Ad esempio, se uno scrive una base del $Ker(A)$, $S(\underline{q}) \in \mathbb{R}^{8\times 3}$: $A(\underline{q})\,S(\underline{q}) \equiv 0$, $\dot{\underline{q}} = S(\underline{q})\,\underline{\nu}$, con $\underline{\nu} = \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta \end{bmatrix}$, allora può valutare a fronte di un ingresso cinematico (di controllo) arbitrario $[\dot{u}_x \;\; \dot{u}_y \;\; \dot{u}_\theta]$ della piastra superiore come evolve il sistema nel rispetto delle equazioni di vincolo cinematico.
Sarebbe poi interessante valutare la possibilità di poter usare come $\underline{\nu}$ le $\underline{\nu} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$ in ottica di determinare (cinematica inversa) come si deve muovere la piastra superiore al fine di ottenere la velocità specificate in termini di $[\dot{\psi} \;\; \dot{\theta} \;\; \dot{\varphi}]$ per la sfera. Questo approccio consente di valutare le proprietà di manipolabilità del sistema, visto come gripper, nei confronti di oggetti sferici.

Per quanto riguarda la dinamica del sistema, usando le eq.ni di Lagrange, si giungerà ad una forma del tipo:

$$\begin{cases} B(\underline{q})\,\ddot{\underline{q}} + C(\underline{q},\dot{\underline{q}})\,\dot{\underline{q}} + A^T(\underline{q})\,\underline{\lambda} = \underline{\tau} \\ A(\underline{q})\,\dot{\underline{q}} = \underline{0} \end{cases}$$

Si tratta quindi di scrivere l'energia cinetica totale del sistema riportandola ad una forma canonica $T = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T B(\underline{q})\,\dot{\underline{q}}$
Inizialmente si scriverà

$$T = T_{sfera} + T_{piastra\,(sup)} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} T_{sfera} = \frac{1}{2} m_b\, {}^S\underline{v}_b^T\, {}^S\underline{v}_b + \frac{1}{2}\, {}^S\underline{\omega}_{sb}^T\, {}^S\mathbb{I}_{Ob}\, {}^S\underline{\omega}_{sb} \\ T_{piastra} = \frac{1}{2} m\, {}^S\underline{v}_G^T\, {}^S\underline{v}_G + \frac{1}{2} J_z\, \dot{u}_\theta^2 \end{cases}$$

con m_b = massa della sfera

${}^S\mathbb{I}_{Ob} = J\, \mathbb{I}_{3\times 3}$ = tensore d'in. baric. (Ob) della sfera in componenti $\{S\}$

In termini di componenti da determinare si ha:

$${}^S\underline{v}_b = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \end{bmatrix}; \qquad {}^S\underline{\omega}_{sb} = {}^S J_{ZYZ}(\psi,\theta,\varphi) \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix};$$

$$\underline{v}_G = \left(\begin{matrix} \text{del baricentro} \\ \text{della piastra} \\ \text{superiore} \end{matrix} \right) = \underline{v}_{Op} + \dot{u}_\theta\, \underline{k}_p \times (x_{OpG}\, \underline{i}_p + y_{OpG}\, \underline{j}_p)$$

Nota bene che x_{OpG} e y_{OpG} sono quantità costanti poiché posizione di G risp. a O_p in $\{P\}$.

In definitiva:

$$
{}^s\underline{v}_G = \begin{bmatrix} \dot{u}_x - (x_{opG}\sin(u_\theta) + y_{opG}\cos(u_\theta))\dot{u}_\theta \\ \dot{u}_y + (x_{opG}\cos(u_\theta) - y_{opG}\sin(u_\theta))\dot{u}_\theta \\ 0 \end{bmatrix}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\|{}^s\underline{v}_G\|^2 = {} & \dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 - 2 y_{opG}\cos(u_\theta)\dot{u}_x\dot{u}_\theta - 2x_{opG}\sin(u_\theta)\dot{u}_x\dot{u}_\theta + \\
& + 2x_{opG}\cos(u_\theta)\dot{u}_y\dot{u}_\theta - 2y_{opG}\sin(u_\theta)\dot{u}_y\dot{u}_\theta + \\
& + \dot{u}_\theta^2 x_{opG}^2 \underbrace{(\cos^2 u_\theta + \sin^2 u_\theta)}_{1} + \dot{u}_\theta^2 y_{opG}^2 \underbrace{(\cos^2 u_\theta + \sin^2 u_\theta)}_{1} \\
= {} & \dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 - 2\overbrace{(x_{opG}\sin u_\theta + y_{opG}\cos u_\theta)}^{a(u_\theta)}\dot{u}_x\dot{u}_\theta + \\
& + 2\overbrace{(x_{opG}\cos u_\theta - y_{opG}\sin u_\theta)}^{b(u_\theta)}\dot{u}_y\dot{u}_\theta + \\
& + \underbrace{x_{opG}^2\dot{u}_\theta^2 + y_{opG}^2\dot{u}_\theta^2}_{\substack{\| \\ \underbrace{(x_{opG}^2 + y_{opG}^2)}_{c^2}\dot{u}_\theta^2}}
\end{aligned}
$$

Allora la

$$
\begin{aligned}
T = {} & \underbrace{\frac{1}{2}m_b(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + \frac{1}{2}[\dot{\psi}\ \dot{\theta}\ \dot{\varphi}]\, {}^sJ_{ZYZ}^T(\psi,\theta,\varphi)\, {}^s\mathcal{I}_{ob}\, J_{ZYZ}(\psi,\theta,\varphi)\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}}_{\text{sfera}} + \\
& + \frac{1}{2}m\left\{\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 - 2a(u_\theta)\dot{u}_x\dot{u}_\theta + 2b(u_\theta)\dot{u}_y\dot{u}_\theta + c^2\dot{u}_\theta^2\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{I}_z\dot{u}_\theta^2 \\
= {} & \frac{1}{2}[\dot{x}_s\ \dot{y}_s \mid \dot{\psi}\ \dot{\theta}\ \dot{\varphi}]\left[\begin{array}{cc|ccc} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & {}^sJ_{ZYZ}^T\, J_{ZYZ}\, \mathcal{I} & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\dot{x}_s \\ \dot{y}_s \\ \hline \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\end{array}\right] + \\
& + \frac{1}{2}[\dot{u}_x\ \dot{u}_y\ \dot{u}_\theta]\begin{bmatrix} m & 0 & -m\,a(u_\theta) \\ 0 & m & m\,b(u_\theta) \\ -m\,a(u_\theta) & m\,b(u_\theta) & mc^2 + \mathcal{I}_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

e quindi raggruppando nella forma $\frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T B(\underline{q})\dot{\underline{q}}$ si ha:

$$T = \frac{1}{2} [\underline{\dot q}_s^T ; \underline{\dot q}_p^T] \left[\begin{array}{c|c} B_s(\psi,\theta,\varphi) & \{0\} \\ \hline \{0\}^T & B_p(u_\theta) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \underline{\dot q}_s \\ \hline \underline{\dot q}_p \end{array}\right]$$

dove si sono definite:

$$\underline{\dot q}_s = [\dot x_s \;\; \dot y_s \;\; \dot\psi \;\; \dot\theta \;\; \dot\varphi]^T;$$

$$\underline{\dot q}_p = [\dot u_x \;\; \dot u_y \;\; \dot u_\theta]^T;$$

$$B_s(\psi,\theta,\varphi) = B_s(\theta) = \left[\begin{array}{cc|ccc} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J & 0 & J\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J\cos\theta & 0 & J \end{array}\right]$$

$$B_p(u_\theta) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m\,a(u_\theta) \\ 0 & m & m\,b(u_\theta) \\ -m a(u_\theta) & m b(u_\theta) & m c^2 + J_z \end{bmatrix}$$

La matrice dei termini centrifughi e di Coriolis risulta:

$C(\underline{q}, \underline{\dot q})$ con solo i seguenti termini non nulli

$C_{34} = -\frac{1}{2} J \sin\theta\,\dot\varphi$ $\quad C_{35} = -\frac{1}{2} J \sin\theta\,\dot\theta$ $\quad C_{45} = \frac{1}{2} J \sin\theta\,\dot\psi$

$C_{43} = -C_{34}$ $\quad C_{53} = C_{35}$ $\quad C_{54} = -C_{45}$

$$C_{68} = -m\,(x_{OpG}\cos u_\theta - y_{OpG}\sin u_\theta)\,\dot u_\theta$$

$$C_{78} = -m\,(y_{OpG}\cos u_\theta + x_{OpG}\sin u_\theta)\,\dot u_\theta$$

Infine la componente Lagrangiana delle forze attive risulta:

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xs} \\ \tau_{ys} \\ \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\varphi \\ \tau_{ux} \\ \tau_{uy} \\ \tau_{u\theta} \end{bmatrix}$$

la componente generica τ_h si calcola da

$$\tau_h = f_{xp}\,\underline{i}_p \cdot \frac{\partial(O_sO_p)}{\partial q_h} + f_{yp}\,\underline{j}_p \cdot \frac{\partial(O_sO_p)}{\partial q_h} + m_{zp}\,\underline{k}_s \cdot \frac{\partial(u_\theta \underline{k}_s)}{\partial q_h}$$

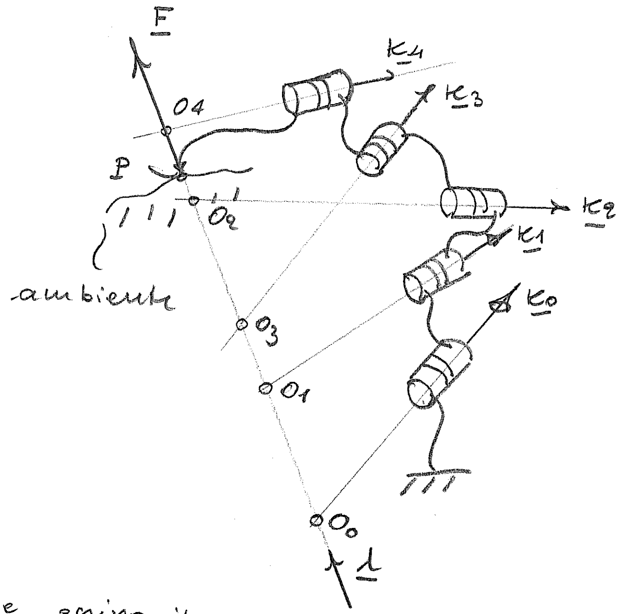
con $\underline{O_sO_p} = u_x \underline{i}_s + u_y \underline{j}_s + 2a\,\underline{k}_s$

è evidente che

$$\tau_{ux} = f_{xp}\,\underline{i}_p \cdot \underline{i}_s + f_{yp}\,\underline{j}_p \cdot \underline{i}_s = f_{xp}\cos u_\theta - f_{yp}\sin u_\theta$$

$\tau_{uy} = f_{xp}\sin u_\theta + f_{yp}\cos u_\theta$; $\tau_{u\theta} = m_{zp}$. Zero le altre τ_h.

Per quanto concerne il secondo esercizio bastava usare la relazione della statica $\underline{\tau} + J^T \underline{w} = \underline{0}$ e fare uno schemino semplice del tipo:



Se scrivo il wrench che il mondo esterno applica sul manipolatore rispetto al punto P ho che

$$\underline{w}_P = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Adesso se scrivo le colonne del Jacobiano considerando la velocità lin del punto P ottengo

$$J_1 = \begin{bmatrix} \underline{k}_0 \times (\underline{O_0 P}) \\ \underline{k}_0 \end{bmatrix}; \quad J_2 = \begin{bmatrix} \underline{k}_1 \times (\underline{O_1 P}) \\ \underline{k}_1 \end{bmatrix}; \quad \dots \quad J_i = \begin{bmatrix} \underline{k}_{i-1} \times (\underline{O_{i-1} P}) \\ \underline{k}_{i-1} \end{bmatrix}$$

e l'equilibrio di coppia al giunto i-esimo è

$$\tau_i + J_i^T \underline{w}_P = 0 = \tau_i + \underline{w}_P^T J_i$$

se espandiamo $\underline{w}_P^T J_i$ si ha:

$$[\underline{F}^T \quad \underline{0}^T] \begin{bmatrix} \underline{k}_{i-1} \times (\underline{O_{i-1} P}) \\ \underline{k}_{i-1} \end{bmatrix}$$

ma si ha che $\underline{F} = F \underline{\ell}$ ed il generico $O_{i-1}P = d_{i-1} \underline{\ell}$ $\quad \uparrow \; \|O_{i-1} P\|$
allora

$$F [\underline{\ell}^T \quad \underline{0}^T] \begin{bmatrix} \underline{k}_{i-1} \times (d_{i-1} \underline{\ell}) \\ \underline{k}_{i-1} \end{bmatrix} = F d_{i-1} \underline{\ell}^T (\overbrace{\underline{k}_{i-1} \times \underline{\ell}}^{\text{sempre } \perp \text{ a } \underline{\ell}}) \equiv 0$$

Ciò indica che, essendo una forza con asse centrale passante per l'asse di un giunto rotoidale reciproca al twist di tale giunto, non è necessaria alcuna coppia al giunto per avere l'equilibrio: in altre parole una tale forza si scarica sulla struttura. Essendo nell'esercizio questa la situazione per tutti i giunti del 5R allora la $\underline{F}$ è strutturale e si ha, in queste configurazioni, equilibrio senza dover applicare alcuna coppia ai giunti, ossia $\tau_i = 0$.