Dinamica vincolata

Robotica I

Antonio Bicchi, Marco Gabiccini

A.A. 2007/2008 Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione

Vincoli cinematici

Sia $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$ il vettore delle coordinate generalizzate di un sistema meccanico. Queste possono, in generale, non essere indipendenti, ma avere m eq.ni di vincolo da soddisfare.

Un vincolo del tipo

$$C(q,t) = 0 \in \mathbb{R}^m$$

si dice olonomo; in particolare olonomo reonomo se tempo-variante (come il precedente), ovvero olonomo scleronomo se tempo invariante, ossia $C(q) = 0$.

Certi tipi di vincolo possono riguardare oltre alla configurazione q anche le velocità generalizzate $\dot{q}$, ovvero essere di tipo cinematico come

$$G(q,\dot{q},t) = 0 \in \mathbb{R}^m$$

Tali tipologie possono discendere:

1) da semplice derivazione rispetto al tempo di un vincolo olonomo,
$$\frac{d}{dt}C(q,t) = \frac{\partial C}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 = G(q,\dot{q},t)$$
2) direttamente dall'imporre delle eq.ni di vincolo che coinvolgono le velocità (rotolamento senza strisciamento, conservazione del momento angolare, etc.) che non sono ottenibili per derivazione di un vincolo olonomo. In questo caso il vincolo si dice non olonomo o anolonomo.

Vincoli cinematici

I vincoli olonomi (o geometrici) di fatto rendono alcune delle coordinate generalizzate dipendenti dalle altre (e quindi eliminabili nelle ipotesi del teorema di Dini).
Ciò non vale per i vincoli anolonomi. In questi casi occorre pertanto procedere con un set di coordinate q sovrabbondanti e gestire la dipendenza (lineare) delle $\dot{q}$ per giungere ad una corretta scrittura delle eq.ni del moto.

Le tipologie di eq.ni vincolari sulle coordinate/velocità generalizzate che studieremo sono le seguenti:

$C(q) = 0$ [olonomo]

$G(q, \dot{q}) = 0$ [scleronomo, forse anolonomo, in forma generale]

$A(q)\dot{q} = 0$ [scleronomo, forse anolonomo, in **forma Pfaffiana**] $A(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

L'ultima forma, lineare nelle velocità generalizzate $\dot{q}$ ed omogenea con matrice $A(q)$ dipendente dalla configurazione, risulta piuttosto generale. Ad essa possono essere ricondotte eq.ni di vincolo derivanti dall'imporre condizioni di puro rotolamento fra corpi rigidi, conservazione del momento angolare di corpi rigidi in moto spaziale etc.

Dinamica di sistemi con vincoli

Quando si è impiegato il Principio dei Lavori Virtuali per ricavare le eq.ni di equilibrio di un sistema meccanico, si è arrivati a scrivere (trasparenza 15-07):

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)^T}\right]\delta q = 0$$

dove: $L(q,\dot{q}) \triangleq T(q,\dot{q}) - U(q)$ è il Lagrangiano del sistema;

$Q_{nc}^{(a)}$ è il vettore delle forze attive non conservative.

Se stavolta il vettore di configurazione non ha componenti indipendenti, ma lo spostamento virtuale δq deve verificare il vincolo in forma Pfaffiana $A(q)\delta q = 0$, non si può scegliere δq arbitrario e quindi arrivare a dimostrare che la parentesi quadra deve essere nulla (come fatto in precedenza). Stavolta occorre incorporare il vincolo cinematico nelle eq.ni della dinamica.

Si può procedere impiegando i moltiplicatori di Lagrange come segue: dato che $A(q)\delta q = 0$ (è un vettore nullo) se lo moltiplico per un vettore λ^T con $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ed aggiungo quindi alle eq.ni precedenti $\lambda^T A(q)\delta q = 0$ non le altero ma ho il vantaggio che posso scegliere il δq in modo arbitrario essendo il valore del corrispondente λ a fare in modo che $\lambda^T A(q)$ sia ortogonale a δq .

Dinamica di sistemi con vincoli

Quindi si può scrivere il Principio dei Lavori Virtuali per un sistema con vincoli in forma Pfaffiana nella forma:

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)^T} + \lambda^T A(q)\right]\delta q = 0 \\ A(q)\dot{q} = 0 \end{cases}$$

A questo punto, avendo introdotto i moltiplicatori incogniti $\lambda \in \mathbb{R}^m$ per poter avere di nuovo un δq arbitrario, si può eliminare δq ottendendo le eq.ni di Lagrange per sistemi con vincoli

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)^T} + \lambda^T A(q)\right] = 0 \\ A(q)\dot{q} = 0 \end{cases}$$

ovvero anche con vettori in forma di colonna

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right]^T + A^T(q)\lambda = Q_{nc}^{(a)} \\ A(q)\dot{q} = 0 \end{cases}$$

Questo rappresenta un sistema di $(n+m)$ eq.ni differenziali-algebriche nelle $(n+m)$ incognite $q \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}^m$.

Dimostrazione della validita' della forma $\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right]^T + A^T(q)\lambda = Q_{nc}^{(a)}$

Partendo dalla eq.ne di vincolo in forma Pfaffiana negli spostamenti virtuali

$$A(q)\delta q = 0; \quad A(q) \in \mathbb{R}^{m\times n}; \quad m < n; \quad \mathrm{rank}(A) = m$$

Nell'ipotesi che i vincoli siano lin. indipendenti, può sempre partizionare il vettore di configurazione in un blocco di componenti dipendenti $q_D \in \mathbb{R}^m$ ed in un blocco di componenti indipendenti $q_I \in \mathbb{R}^{n-m}$, ossia $q = [q_D \;\; q_I]^T$, per cui il vincolo può essere riscritto nel seguente modo

$$A(q)\delta q = \left[\, A_D(q) \,\vdots\, A_I(q) \,\right] \begin{bmatrix} \delta q_D \\ \hdashline \delta q_I \end{bmatrix} = 0, \quad A_D(q) \in \mathbb{R}^{m\times m}; \quad A_I(q) \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$$

con $A_D(q)$ invertibile. Dalla eq.ne di vincolo si può ricavare:

$$A_D(q)\delta q_D + A_I(q)\delta q_I = 0 \quad \rightarrow \quad \delta q_D = -A_D^{-1}(q)A_I(q)\delta q_I$$

Se nella eq.ne

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)^T} + \lambda^T A(q)\right]\delta q = 0$$

Si distinguono le componenti dipendenti da quelle indipendente nel vettore di configurazione si ottiene

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_D} - \frac{\partial L}{\partial q_D} - Q_{nc_D}^{(a)\;T} + \lambda^T A_D(q)\right]\delta q_D + \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} - \frac{\partial L}{\partial q_I} - Q_{nc_I}^{(a)\;T} + \lambda^T A_I(q)\right]\delta q_I = 0$$

Dimostrazione della validita' della forma $\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right]^T + A^T(q)\lambda = Q_{nc}^{(a)}$

Se il vettore dei moltiplicatori di Lagrange viene scelto in modo da annullare la prima parentesi quadra, ossia

$$\lambda^T A_D = Q_{nc_D}^{(a)\,T} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_D} + \frac{\partial L}{\partial q_D} \quad \rightarrow \quad \lambda = A_D^{-T}\left[Q_{nc_D}^{(a)} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_D} - \frac{\partial L}{\partial q_D}\right)^T\right]$$

allora, dato che i δq_I sono indipendenti, possono essere scelti come gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^{n-m}$ e ciò porta alla conclusione che anche la seconda parentesi quadra deve annullarsi, ossia anche:

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} - \frac{\partial L}{\partial q_I} - Q_{nc_I}^{(a)\,T} + \lambda^T A_I(q)\right] = 0^T$$

Quindi dal fatto che entrambe le parentesi quadre sono nulle si ottiene che globalmente

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)\,T} + \lambda^T A(q)\right] = 0^T$$

che insieme alla eq.ne di vincolo

$$A(q)\dot{q} = 0$$

costituisce un sistema di $(n+m)$ eq.ni diffenziali/algebriche nelle $(n+m)$ incognite $q \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}^m$

Metodi di soluzione delle eq.ni dinamiche di sistemi vincolati

Esistono vari metodi per la soluzione delle eq.ni della dinamica di sistemi vincolati esprimibili nella forma:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial L}{\partial q}\right]^T - Q_{nc}^{(a)} + A^T(q)\lambda = 0 \\ A(q)\dot{q} = 0 \end{cases}$$

Nel primo metodo proposto, oltre al calcolo della evoluzione del vettore di configurazione $q(t)$ vengono calcolati anche i moltiplicatori di Lagrange $\lambda(t)$ che vanno a costituire le reazioni vincolari $A^T\lambda$ che assicurano il rispetto dei vincoli. Tale formulazione viene denominata "aumentata" (**augmented formulation**).
Dato che:

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right]^T = B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)$$

e derivando il vincolo rispetto al tempo

$$A\dot{q} = 0 \quad \rightarrow \quad A\ddot{q} + \dot{A}\dot{q} = 0$$

si può arrivare a scrivere il sistema nella forma equivalente

$$\begin{cases} B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)\lambda = Q_{nc}^{(a)} \\ A\ddot{q} + \dot{A}\dot{q} = 0 \end{cases}$$

Augmented Formulation

Introducendo il vettore delle incognite "aumentato" $\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \hline \lambda \end{bmatrix}$ si può riscrivere il sistema precedente in forma matriciale

$$\left[\begin{array}{c:c} B(q) & A^T(q) \\ \hdashline A(q) & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \hdashline \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) + Q_{nc}^{(a)} \\ \hdashline -\dot{A}\dot{q} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} Q_e \\ \hdashline Q_d \end{bmatrix}$$

Se i vincoli sono indipendenti e quindi la matrice aumentata è invertibile, allora la soluzione della dinamica fornisce oltre alle $\ddot{q}$ anche il moltiplicatore λ delle forze vincolari. La matrice non può essere invertita nei sistemi iperstatici.
Nel caso in cui l'invertibilità sia garantita si ha:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \hdashline \lambda \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} B(q) & A^T(q) \\ \hdashline A(q) & 0 \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} Q_e \\ \hdashline Q_d \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} H_{qq} & H_{q\lambda} \\ \hdashline H_{\lambda q} & H_{\lambda\lambda} \end{array}\right] \begin{bmatrix} Q_e \\ \hdashline Q_d \end{bmatrix}$$

dove, mediante calcolo dell'inversa a blocchi:

- $H_{\lambda\lambda} = -(AB^{-1}A^T)^{-1}$;
- $H_{qq} = B^{-1} - B^{-1}A^T(AB^{-1}A^T)^{-1}AB^{-1}$;
- $H_{q\lambda} = H_{\lambda q}^T = B^{-1}A^T(AB^{-1}A^T)^{-1}$;

Augmented Formulation

Notando che la matrice che compare frequentemente nelle espressioni

$$B^{-1}A^T(AB^{-1}A^T)^{-1} = A_B^+$$

è l'inversa destra di A pesata in B, infatti $AA_B^+ = AB^{-1}A^T(AB^{-1}A^T)^{-1} = I$, si ha alternativamente anche la forma

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \hline \lambda \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} B^{-1} - A_B^+ & A_B^+ \\ \hline (A_B^+)^T & -(AB^{-1}A^T)^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} Q_c \\ \hline Q_d \end{bmatrix}$$

Esplicitamente si ha quindi:

$$\begin{cases} \ddot{q} &= (I - A_B^+ A)B^{-1}\left[\tau - C\dot{q} - G(q)\right] - A_B^+ \dot{A}\dot{q} \\ \lambda &= (A_B^+)^T\left[\tau - C\dot{q} - G(q)\right] + (AB^{-1}A^T)^{-1}\dot{A}\dot{q} \end{cases}$$

dove si è effettuata la sostituzione $Q_{nc}^{(a)} = \tau$ tipica dei sistemi robotici nei quali le forze attive non conservative sono tipicamente rappresentate dalle coppie/forze ai giunti.

Il vantaggio della formulazione aumentata è che si calcolano direttamente le reazioni vincolari oltre alla dinamica del sistema ed il fatto che la struttura sparsa della matrice della dinamica aumentata può essere sfruttata vantaggiosamente nel calcolo. Tuttavia svantaggi evidenti sono l'incremento nella dimensione del problema e la necessità di algoritmi numerici più sofisticati che siano in grado di gestire sistemi di equazioni differenziali/algebriche, noti come sistemi DAE (Differential Algebraic Equations).

Metodo geometrico unificato [G. Liu & Z. Li, IEEE TRA, vol. 18-4, 2002]

Ripartendo dalla forma

$$\begin{cases} B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau - A^T(q)\lambda & (1) \\ A\ddot{q} + \dot{A}\dot{q} = 0 & (2) \end{cases}$$

Dalla eq.ne (1) si può ricavare

$$\ddot{q} = B^{-1}(q)\Big[\tau - A^T(q)\lambda - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)\Big] \quad (3)$$

e sostituirla nella (2) che, una volta risolta per il moltiplicatore, fornisce

$$\lambda = (AB^{-1}A^T)\Big[\dot{A}\dot{q} + AB^{-1}(\tau - C\dot{q} - G)\Big] \quad (4)$$

Ma ricordandosi che $\dot{A}\dot{q} = -A\ddot{q}$, sostituendo l'espressione (4) per il moltiplicatore nella (3) e manipolando un poco le espressioni si ottiene

$$\left[I - A^T(AB^{-1}A^T)^{-1}AB^{-1}\right](B\ddot{q} + C\dot{q} + G - \tau) = 0$$

Ossia definendo la matrice di proiezione

$$P_\tau \triangleq I - A^T(AB^{-1}A^T)^{-1}AB^{-1}$$

si ottiene la interessante forma

$$\boxed{P_\tau(B\ddot{q} + C\dot{q} + G) = P_\tau\tau} \quad (5)$$

Vale la pena notare che $P_\tau \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è tale che $\mathrm{rank}(P_\tau) = n - m$ e quindi non si può premoltiplicare per P_τ^{-1} : ciò avrebbe senso solo se il sistema non fosse vincolato ($A = 0,\ P_\tau = I$) e ci lascerebbe colle eq.ni di un sistema non vincolato. ;-)

Metodo geometrico unificato [G. Liu & Z. Li, IEEE TRA, vol. 18-4, 2002]

La matrice di proiezione $P_\tau \in \mathbb{R}^{n\times n}$ proietta le forze generalizzate τ nelle componenti $P_\tau \tau$ che fanno lavoro sui moti del sistema compatibili con i vincoli.
Le forze rimanenti, ossia $(I - P_\tau)\tau$ rappresentano le componenti assorbite dai vincoli.
Questi due insiemi di forze sono ortogonali l'uno con l'altro rispetto alla matrice di inerzia $B(q)$, infatti vale

$$(P_\tau \tau)^T B^{-1}(I - P_\tau)\tau = 0, \quad \forall \tau$$

Inoltre, definendo la matrice

$$P = B^{-1} P_\tau B = I - B^{-1} A^T (A B^{-1} A^T)^{-1} A$$

è possibile riorganizzare la (5) nella forma

$$B^{-1} P_\tau \left(B\ddot{q} + C\dot{q} + G\right) = B^{-1} P_\tau \tau$$

ossia

$$\boxed{P\ddot{q} = P B^{-1}\left(\tau - C\dot{q} - G\right)}$$

Qui, la matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di rango $n - m$ proietta accelerazioni generiche del sistema meccanico in accelerazioni compatibili con i vincoli.
Le componenti rimanenti, definite dalla proiezione con matrice $(I - P)$ sono quelle nelle direzioni vincolate. Le proiezioni P e $(I - P)$ sono ortogonali rispetto alla matrice di inerzia, in altre parole

$$(P\dot{q})^T B (I - P)\dot{q} = 0, \quad \forall \dot{q}$$

Metodo geometrico unificato [G. Liu & Z. Li, IEEE TRA, vol. 18-4, 2002]

E' importante osservare che sia la forma

$$P_\tau \left(B\ddot{q} + C\dot{q} + G\right) = P_\tau \tau$$

che la forma alternativa

$$P\ddot{q} = PB^{-1}\left(\tau - C\dot{q} - G\right)$$

debbono essere risolte congiuntamente alle eq.ni di vincolo

$$A\ddot{q} + \dot{A}\dot{q} = 0$$

Infatti, essendo il rango di entrambe le matrici di proiezione P_τ e P pari a $n-m$ occorrono le m eq.ni di vincolo per poter risolvere il sistema di eq.ni differenziali nelle n f.ni incognite $q(t) \in \mathbb{R}^n$

Metodo di Lagrange-d'Alembert ossia Embedding Technique

Con tale approccio si determina una forma delle eq.ni dinamiche in cui non sono presenti i moltiplicatori di Lagrange ed in cui compaiono solo un sottoinsieme di coordinate indipendenti $q_I \in \mathbb{R}^{n-m}$ delle $q \in \mathbb{R}^n$.

Come già fatto in precedenza si può sempre (eventualmente riordinando le variabili di configurazione) fare in modo che si abbia:

$$A(q)\dot{q} = A_D(q)\dot{q}_D + A_I(q)\dot{q}_I = 0$$

con

$$q_D \in \mathbb{R}^m, \quad q_I \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad A_D \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad A_I \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$$

Per cui se i vincoli sono indipendenti, la A_D^{-1} esiste e si può scrivere

$$\dot{q}_D = -A_D^{-1}A_I\dot{q}_I$$

Tale relazione vale anche per gli spostamenti virtuali, ossia

$$\delta q_D = -A_D^{-1}A_I\delta q_I$$

E' importante sottolineare che la relazione precedente in termini di spostamenti virtuali (il tempo è congelato) sarebbe stata valida anche qualora il vincolo fosse stato reonomo, ad. es della forma

$$A(q)\dot{q} = b(t) \quad \rightarrow \quad A_D(q)\dot{q}_D + A_I(q)\dot{q}_I = b(t)$$

per cui la relazione che lega velocità dipendenti da quelle indipendente sarebbe stata diversa da quella degli spostamenti, ossia

$$\dot{q}_D = -A_D^{-1}A_I(q)\dot{q}_I + A_D^{-1}b(t)$$

Metodo di Lagrange-d'Alembert ossia Embedding Technique

Si riparte quindi dalla forma che scaturisce dal P.L.V. (d'Alembert)

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)^T}\right]\delta q = 0 \;\rightarrow\; \delta q^T\left[B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau\right] = 0$$

in cui dato che $\delta q_D = -A_D^{-1}A_I\delta q_I$ si può scrivere

$$\delta q = \begin{bmatrix}\delta q_D \\ \delta q_I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-A_D^{-1}A_I \\ I\end{bmatrix}\delta q_I \triangleq B_I\delta q_I; \quad B_I \triangleq \begin{bmatrix}-A_D^{-1}A_I \\ I\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$$

cossicchè $\delta q^T = \delta q_I^T B_I^T$, ossia lo spost. virtuale globale è esprimibile in funzione della componente indipendente, che essendo tale può essere arbitraria.

Inoltre, nel caso in cui il vincolo sia scleronomo, si ha anche

$$\dot{q} = B_I\dot{q}_I; \quad \ddot{q} = B_I(q)\ddot{q}_I + \dot{B}_I(q,\dot{q})\dot{q} = B_I(q)\ddot{q}_I + \left[\partial_q B_I(q)\dot{q}\right]\dot{q}_I$$

perciò si ottiene (omettendo le dipendenze)

$$B_I^T\left[B\left(B_I\ddot{q}_I + \dot{B}_I\dot{q}_I\right) + CB_I(q)\dot{q}_I + G - \tau\right] = 0$$

Da qui si ricava la forma esplicita in $\ddot{q}_I$ a cui va aggiunta l'eq.ni di vincolo

$$\begin{cases}\ddot{q}_I = (B_I^T B B_I)^{-1}B_I^T\left[\tau - (B\dot{B}_I + CB_I)\dot{q}_I - G\right] \\ \dot{q}_D = -A_D^{-1}A_I\dot{q}_I\end{cases}$$

Attenzione al fatto che in generale i due set di eq.ni sono accoppiati a causa della dipendenza della prima eq.ne dal vettore globale di configurazione q .

Metodo di Lagrange-d'Alembert ossia Embedding Technique

Nel caso in cui il primo set di eq.ni non dipenda dal q completo, ma solo da q_I e sue derivate temporali, si può procedere alla soluzione del primo set di $n-m$ eq.ni differenziali del secondo ordine nelle variabili indipendenti

$$\ddot{q}_I = (B_I^T B B_I)^{-1} B_I^T \left[\tau - (B\dot{B}_I + CB_I)\dot{q}_I - G \right]$$

e ricavare in un secondo momento l'evoluzione delle variabili dipendenti risolvendo il secondo set di eq.ni differenziali del primo ordine

$$\dot{q}_D = -A_D^{-1} A_I \dot{q}_I$$

Il fatto di suddividere le eq.ni del moto in un set di eq.ni differenziali del secondo ordine f.ne di variabili indipendenti che descrivono la dinamica del sistema più un set di eq.ni diff. del primo ordine che rappresentano l'effetto dei vincoli è tipico dello studio dei sistemi anolonomi (vedi Rob. II)

Metodo delle quasi velocita'

Un altro metodo che può essere impiegato per la soluzione della dinamica di un sistema vincolato senza passare per il calcolo esplicito delle reazioni vincolari è il metodo delle Quasi Velocità. Supponendo i vincoli in forma Pfaffiana, le velocità ammissibili per il sistema sono solo quelle che verificano

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

ossia tali che $\dot{q} \in \ker(A)$. Le velocità ammissibili possono pertanto essere espresse come

$$\dot{q} = S(q)\nu$$

dove $\nu \in \mathbb{R}^m$ è il vettore delle quasi velocità e $S(q)$ è una base del $\ker(A)$, pertanto

$$A(q)S(q) = 0 \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad S^T(q)A^T(q) = 0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Allora dato che vale $\dot{q} = S(q)\nu$, derivando rispetto al tempo si ha anche

$$\ddot{q} = S(q)\dot{\nu} + \dot{S}(q,\dot{q})\nu$$

E' interessante notare che il calcolo di $\dot{S}$ risulta esplicitamente

$$\dot{S} = [\partial_q S(q)]\,\dot{q} = [\partial_q S(q)]\,S(q)\nu; \quad [\dot{S}]_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial q_k} S_{kl}\nu_l$$

Quindi globalmente la forma in componenti risulta

$$[\ddot{q}]_i = S_{ij}\dot{\nu}_j + \frac{\partial S_{ij}}{\partial q_k} S_{kl}\nu_l\nu_j$$

Metodo delle quasi velocita'

A questo punto le velocità e le accelerazioni generalizzate espresse in funzione delle quasi velocità ν e delle quasi accelerazioni $\dot{\nu}$ possono essere sostituite nella forma delle eq.ni di Lagrange **valide per sistemi vincolati[1],** ossia

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)\lambda = \tau$$

da cui si ottiene

$$B(q)S(q)\dot{\nu} + \big(B(q)\dot{S}(q,\dot{q}) + C(q,\dot{q})S(q)\big)\nu + G(q) + A^T(q)\lambda = \tau$$

A questo punto proiettando la dinamica nel $\ker(A)$, ossia moltiplicando l'eq.ne precedente per $S^T(q)$ ed omettendo le dipendenze per brevità, si ottiene

$$S^T BS\dot{\nu} = S^T\Big[\tau - \big(B\dot{S} + CS\big)\nu - G\Big]$$

in cui si è sfruttata l'eq.ne $S^T A^T = 0$ che esprime il fatto che le forze vincolari non hanno componenti nelle direzioni permesse da vincoli lisci.

Il sistema da risolvere risulta in definitiva

$$\begin{cases} \dot{\nu} &= (S^T BS)^{-1} S^T\big[\tau - \big(B\dot{S} + CS\big)\nu - G\big] \\ \dot{q} &= S(q)\nu \end{cases}$$

che è in generale un sistema di $2n - m$ eq.ni differenziali nelle $2n - m$ f.ni incognite $\nu \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad q \in \mathbb{R}^n$

1: Sostituire le velocità e le accelerazioni compatibili coi vincoli in funzione delle quasi velocità/accelerazioni **nelle eq.ni di Lagrange non vincolate** è sbagliato poiché anche se le velocità sono quelle compatibili coi vincoli, manca il termine di forze generalizzate vincolari $A^T(q)\lambda$ necessarie a garantire tale compatibilità!

Sistema con vincoli elastici

Consideriamo un sistema meccanico con: $B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)\lambda = \tau$

- energia cinetica $T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}$
- energia potenziale $U_g(q) = \sum_{i=1}^{n} m_i g h_i(q)$

Se il vincolo è soggetto a vincoli olonomi, scleronomi del tipo $C(q) = 0$, equivalenti al vincolo il forma Pfaffiana $\partial_q C(q)\dot{q} = A(q)\dot{q} = 0$, la dinamica viene scritta aggiungendo le reazioni vincolari espresse dal termine $A^T(q)\lambda$.

Se però i vincoli non sono rigidi ma elastici, le eq.ni dinamiche devono descrivere anche la deformazione dei vincoli. In particolare, detto $\varepsilon = C(q)$ il vettore che rappresenta lo scostamento dalla condizione di rispetto del vincolo rigido, si può formulare la dinamica con un metodologia "penalty" in cui si associa alla deformazione del vincolo una energia elastica immagazzinata nel vincolo stesso quadratica in ε con matrice della forma quadratica data da $K \in \mathbb{R}^{m\times m}$ simmetrica e positiva definita. In altre parole

$$U_e(q) = \frac{1}{2}\varepsilon^T(q)K\varepsilon(q)$$

e si tiene conto della deformazione dei vincoli sommando questa energia potenziale $U_e(q)$ elastica al Lagrangiano $L(q,\dot{q})$

Sistema con vincoli elastici

Quindi introducendo il Lagrangiano $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U_g(q) - U_e(q)$ si ottiene

$$(d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L)^T = B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q}\right)^T K\varepsilon = \tau$$

Ma essendo $\varepsilon = C(q)$, si ha $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial q} = \dfrac{\partial C(q)}{\partial q} \triangleq A(q)$, da cui

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)K\varepsilon = \tau$$

Questo perché (ricordandosi che $K = K^T$)

$$\partial_q U_e = \frac{\partial U_e(\varepsilon(q))}{\partial q} = \frac{\partial U_e(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial q} = \varepsilon^T K \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q}\right) = \varepsilon^T K A(q)$$

e trasponendo

$$(\partial_q U_e)^T = A^T(q)K\varepsilon(q)$$

Sistema con vincoli elastici e smorzanti

Se il vincolo esercita anche una azione di smorzamento proporzionale alla velocità di deformazione del vincolo stesso, nel termine di forze non conservative si hanno le classiche τ ed in più delle forze dissipative che si ottengono per derivazione in $\dot{q}$ della f.ne di dissipazione altresì definita come f.ne di Rayleigh

$$D(\dot{\varepsilon}(\dot{q})) = \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^T F \dot{\varepsilon}, \quad F \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ simm. e p.d.}$$

e le forze dissipative (vettore colonna) sono quindi

$$Q_d = -\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right)^T = -\left(\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{q}}\right)^T \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}}\right)^T = -A^T(q)F\dot{\varepsilon}$$

Osserva:

$$\varepsilon = C(q);$$
$$\dot{\varepsilon} = A(q)\dot{q};$$
$$\ddot{\varepsilon} = A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q,\dot{q})\dot{q}$$

Perciò in un sistema con vincoli elastici con azione smorzante si ha

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)K\varepsilon = \tau + Q_d$$

da cui portando le forze dissipative nel membro a sinistra

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)(K\varepsilon + F\dot{\varepsilon}) = \tau$$

In questa espressione il ruolo solitamente rivestito dai moltiplicatori di Lagrange λ di componenti delle reazioni vincolari nelle direzioni date dalle colonne di $A(q)$ è sostituito dalle componenti elastiche e di smorzamento. Ciò in seguito alle eq.ni costitutive delle forze vincolari lineari in ε ed $\dot{\varepsilon}$.

Questo modo di procedere risulta comodo per la modellazione di sistemi con vincoli imperfetti.

Soluzione di sistemi con vincoli rigidi modellati come cedevoli e stabilizzazione alla Baumgarte

Oltre alle eq.ni della dinamica

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)(K\varepsilon + F\dot{\varepsilon}) = \tau$$

si deve considerare la dinamica della deformazione dei vincoli, ossia

$$\ddot{\varepsilon} = A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q,\dot{q})\dot{q}$$

Se si considera come soluzione di questo problema, la soluzione determinata con la formulazione augmented per vincoli perfetti, ossia la

$$\ddot{q} = (I - A_B^+ A)B^{-1}\left[\tau - C\dot{q} - G(q)\right] - A_B^+ \dot{A}\dot{q} \qquad \text{dove: } \begin{cases} A_B^+ = B^{-1}A^T(AB^{-1}A^T)^{-1} \\ AA_B^+ = I_{m\times m} \end{cases}$$

Dato che questa era tale che $A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q,\dot{q})\dot{q} = 0$ si avrà che la dinamica degli scostamenti rispetto alla condizione di vincolo rigido vale

$$\ddot{\varepsilon} = 0$$

Questa ultima eq.ne della formulazione DAE risulta instabile: infatti diverge nel caso di condizioni iniziali non nulle ed a causa di rumore numerico introdotto nel processo di integrazione. Per ottenere una dinamica dell'errore ε A.S. si aggiunge nella soluzione per $\ddot{q}$ un termine di tipo $A_B^+\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}^m$, ossia

$$\ddot{q} = (I - A_B^+ A)B^{-1}\left[\tau - C\dot{q} - G(q)\right] - A_B^+ \dot{A}\dot{q} + A_B^+ \mu$$

Soluzione di sistemi con vincoli rigidi modellati come cedevoli e stabilizzazione alla Baumgarte

Dato che la soluzione col $\ddot{q}$ senza il termine $A_B^+\mu$ sostituito in

$$\ddot{\varepsilon} = A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q,\dot{q})\dot{q}$$

porta alla $\ddot{\varepsilon} = 0$, ora si ottiene

$$\ddot{\varepsilon} = \mu$$

Dunque, se si impone $\mu = -K_p\varepsilon - K_v\dot{\varepsilon}$ con $K_p,\ K_v \in \mathbb{R}^{m\times m}$ positive definite, si ha:

$$\ddot{\varepsilon} + K_v\dot{\varepsilon} + K_p\varepsilon = 0$$

che è un sistema di eq.ni nella dinamica dell'errore di modellazione dei vincoli A.S. a zero.

Dunque la formulazione stabilizzante (alla Baumgarte)

$$\begin{cases} \ddot{q} = (I - A_B^+A)B^{-1}\left[\tau - C\dot{q} - G(q)\right] - A_B^+\dot{A}\dot{q} - A_B^+(K_p\varepsilon + K_v\dot{\varepsilon}) \\ \ddot{\varepsilon} + K_v\dot{\varepsilon} + K_p\varepsilon = 0 \end{cases}$$

tratta un sistema con **vincoli rigidi** come un sistema con **vincoli elasti**ci aggiungendo dei termini stabilizzanti (fittizi) che consentono di ottenere asintoticamente la soluzione per il sistema con vincoli rigidi. Attenzione al fatto che se la dinamica degli errori dei vincoli viene fatta tendere a zero "troppo velocemente" aumentando troppo i guadagni $K_p,\ K_v$, dal momento che la dinamica del sistema ha un costante di tempo data dalla fisica del problema si può creare un sistema "stiff" con classici pb. numerici ad esso legati.