

- 1) In Figura 1, un disco omogeneo di raggio r , massa m_d e momento di inerzia assiale baricentrico J_d è vincolato a scorrere lungo e ruotare attorno alla guida orizzontale J . Si indichino con s e θ lo scorrimento e la rotazione. Il disco, che ha il bordo circolare a coltello, è in contatto nel punto P con una piastra omogenea quadrata di lato $2a$, massa m_p e momento d'inerzia attorno ad un asse verticale baricentrico J_p . La piastra è poggiata su un piano orizzontale (piano xy) sul quale può scivolare senza attrito. Si indichino con (x, y) le coordinate in $\{S\}$ del baricentro G e con φ l'inclinazione di un suo lato rispetto all'asse x . Per comodità si introduce anche il frame locale baricentrico $\{L\}$ di versori $(\mathbf{i}_l, \mathbf{j}_l, \mathbf{k})$. Assumendo che il vincolo di contatto fra il disco e la piastra sia di *puro rotolamento*, la gravità agisca come in Figura 1, e che il sistema sia in una configurazione iniziale nota, si risponda ai seguenti quesiti:

(i) Si scrivano le equazioni di vincolo cinematico fra il disco e la piastra, riportandole successivamente in forma *Pfaffiana*. Si scrivano le equazioni di moto per il sistema in esame nel caso in cui: (ii) il disco sia fatto traslare e ruotare lungo la guida J , rispettivamente, da una forza $\mathbf{F}_s(t) = F_s(t)\mathbf{j}$ applicata in C e da una coppia $\tau_\theta(t) = \tau_\theta(t)\mathbf{j}$; (iii) la piastra sia mossa sul piano xy dall'azione di un carico inseguitore applicato al vertice E del tipo $\mathbf{F}_e(t) = F_e(t)\mathbf{i}_l(t)$; (iii) il sistema non sia soggetto ad azioni esterne attive oltre alla gravità ma il sistema nel suo complesso venga ruotato di un angolo α costante attorno all'asse y , in modo tale da fa diventare xy un piano inclinato (naturalmente si assuma che tale rotazione non influenzi la direzione della gravità).

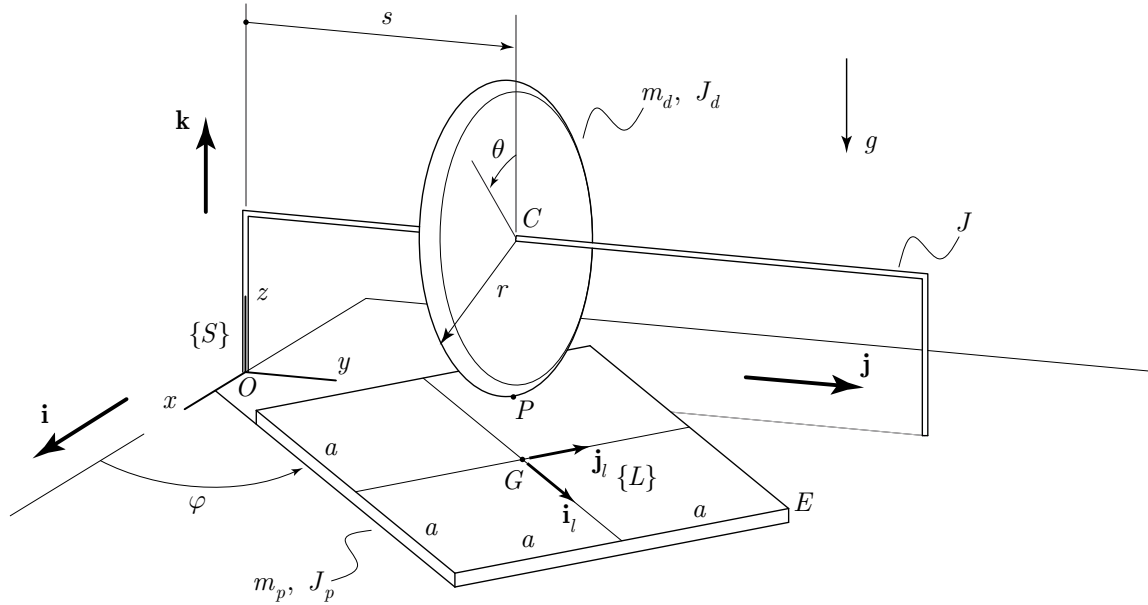
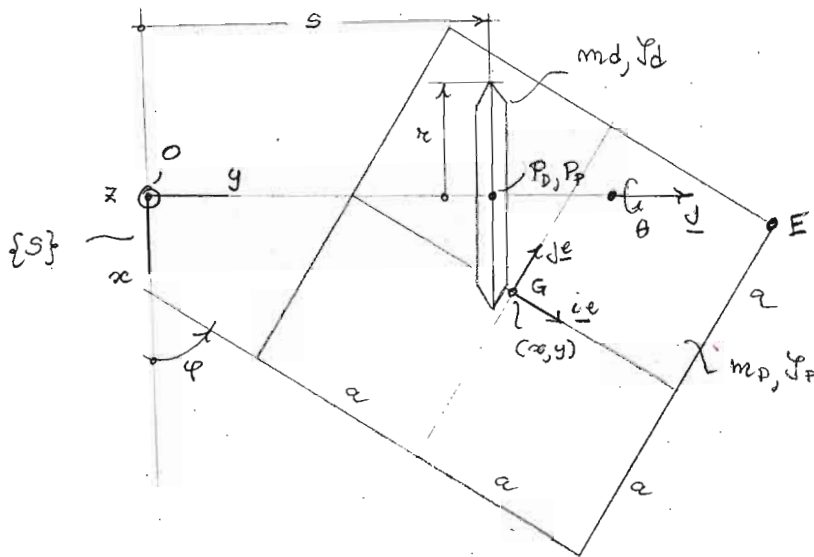
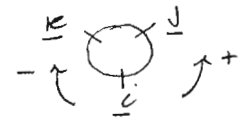


Figura 1: Manipolazione di una piastra mediante coltello circolare scorrevole.

- 2) Si descrivano i metodi studiati per il ricavare la parametrizzazione asse/angolo di una matrice di rotazione assegnata in forma numerica. Che relazione c'è fra la parametrizzazione asse/angolo ed i parametri di Eulero?
- 3) Dato un Jacobiano $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in forma numerica descrittivo di un robot altamente ridondante in una certa postura, si chiede di discutere se, ed eventualmente in quali casi, sia possibile discriminare l'entità del wrench applicato al suo *end-effector* sulla base di una lettura di tutte le coppie ai suoi giunti.

Appello del 7 Luglio 2011

schema di riferimento

Il vincolo di puro rotolamento fra la piastra ed il disco nel loro unico punto di contatto P impone che, se P_D è il punto di contatto sul disco e P_P è il punto di contatto sulla piastra, la velocità relativa $\underline{v}_{P_D} - \underline{v}_{P_P}$ è nulla, ovvero $\underline{v}_{P_D} = \underline{v}_{P_P}$.

Scriviamo le espressioni di $\underline{v}_{P_D}$ e $\underline{v}_{P_P}$. Iniziamo da $\underline{v}_{P_D}$:

•) applicando la f. fondam. della cinematica al disco si ha:

$$\underline{v}_{P_D} = \underline{v}_C + \underline{\omega}_d \times \underline{CP}_D, \quad \text{dove } \underline{v}_C = \dot{s} \underline{j}, \quad \underline{\omega}_d = \dot{\theta} \underline{k}, \quad \underline{CP}_D = -r \underline{k}$$

dunque

$$\underline{v}_{P_D} = \dot{s} \underline{j} + \dot{\theta} \underline{j} \times (-r \underline{k}) = \dot{s} \underline{j} - r \dot{\theta} \underline{i}$$

come verifica si vede che se $\dot{\theta} > 0$, il contributo della rotaz. del disco è una comp. di veloc. $-r \dot{\theta} \underline{i}$

•) applicando adesso la f.f. della cinematica alla piastra si ha:

$$\underline{v}_{P_P} = \underline{v}_G + \underline{\omega}_p \times \underline{GP}_P, \quad \text{dove } \underline{v}_G = \dot{x} \underline{i} + \dot{y} \underline{j}, \quad \underline{\omega}_p = \dot{\varphi} \underline{k}, \quad \underline{GP}_P = \underline{OP}_P - \underline{OG}$$

$$\text{calcoliamo } \underline{GP}_P: \underline{OP}_P = s \underline{j}, \quad \underline{OG} = x \underline{i} + y \underline{j} \Rightarrow \underline{GP}_P = (s-y) \underline{j} - x \underline{i}$$

allora

$$\underline{v}_{P_P} = \dot{x} \underline{i} + \dot{y} \underline{j} + \dot{\varphi} \underline{k} \times [(s-y) \underline{j} - x \underline{i}] = \dot{x} \underline{i} + \dot{y} \underline{j} + \dot{\varphi} (y-s) \underline{i} - \dot{\varphi} x \underline{j}$$

•) eguagliando $\underline{v}_{P_P}$ e $\underline{v}_{P_D}$ si ha

$$\underline{v}_{P_D} = \dot{s} \underline{j} - r \dot{\theta} \underline{i} = [\dot{y} - \dot{\varphi} x] \underline{j} + [\dot{x} + \dot{\varphi} (y-s)] \underline{i}$$

che, componendo per componente, porta a scrivere

$$\begin{cases} \dot{x} + (y-s) \dot{\varphi} = -r \dot{\theta} \\ \dot{y} - \dot{\varphi} x = \dot{s} \end{cases}$$

Introducendo la configurazione $\underline{q} = [s \ \theta \ x \ y \ \varphi]^T$ si riportano le espressioni in forma Pfaffiana come segue

$$\begin{cases} r\dot{\theta} + \dot{x} + (y-s)\dot{\varphi} = 0 \\ -\dot{s} + \dot{y} - x\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & r & 1 & 0 & (y-s) \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -x \end{bmatrix}}_{A(\underline{q})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{q}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove $A(\underline{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$ e rango pieno righe.

Calcoliamo adesso l'energia cinetica del sistema senza curarci dei vincoli nel contatto fra disco e piastra

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m_d \dot{s}^2 + \frac{1}{2} J_d \dot{\theta}^2}_{\text{disco}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_p \dot{\varphi}^2}_{\text{piastra}}$$

che può essere immediatamente portata nella forma

$$T = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T B \dot{\underline{q}} \quad \text{con} \quad B = \text{diag}(m_d, J_d, m_p, m_p, J_p) \quad \text{con} \quad B \in \mathbb{R}^{5 \times 5} \text{ diagonale}$$

Dato che $B = \text{cost} \Rightarrow C \equiv 0$

Energia potenziale gravitazionale $U = \text{cost}$ da cui $\left(\frac{\partial U}{\partial \underline{q}}\right)^T = \underline{0} \in \mathbb{R}^5$

Allora la struttura delle eq. di moto sarà (al solito)

$$\begin{cases} B \ddot{\underline{q}} + A^T(\underline{q}) \underline{\lambda} = \underline{Q} \\ A(\underline{q}) \dot{\underline{q}} = \underline{0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \underline{q}(t) \in \mathbb{R}^5, \underline{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{eq. di 2° ordine} \\ \text{2 del 1° ordine} \end{array}$$

Collociamo la $\underline{Q}$ nei casi (ii) e (iii)

caso (ii) sono presenti $F_s(t) \underline{j}$ e $\varepsilon \theta \underline{j}$

allora

$$\underline{Q} = [Q_s \ Q_\theta \ Q_x \ Q_y \ Q_\varphi]^T$$

$$Q_s = F_s \underline{j} \cdot \frac{\partial \underline{OC}}{\partial s} + \varepsilon \theta \underline{j} \cdot \frac{\partial (C \theta \underline{j})}{\partial s} \stackrel{e}{=} F_s \underline{j} \cdot \frac{\partial (s \underline{j} + r \underline{k})}{\partial s} = F_s \underline{j} \cdot \underline{j} = F_s$$

$$Q_\theta = F_s \underline{j} \cdot \frac{\partial (s \underline{j} + r \underline{k})}{\partial \theta} + \varepsilon \theta \underline{j} \cdot \frac{\partial (C \theta \underline{j})}{\partial \theta} \stackrel{e}{=} \varepsilon \theta \underline{j} \cdot \underline{j} = \varepsilon \theta$$

nulli gli altri Q_x, Q_y e Q_φ poiché nello spostam. del punto c di appl. della $F_s \underline{j}$ e nella rotazione del disco non compaiono x, y e φ .

da cui

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} F_s(t) \\ \varepsilon \theta(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

caso (iii) è presente solo il carico insequitatore $\underline{F}_e(t) = F_e(t) \underline{i}_e(t)$

ovvero anche con $\underline{i}_e(t) = \cos \varphi \underline{i} + \sin \varphi \underline{j}$, $\underline{j}_e(t) = -\sin \varphi \underline{i} + \cos \varphi \underline{j}$

e coordinate di E date da $\underline{OE} = \underline{OG} + \underline{GE} = x \underline{i} + y \underline{j} + a \underline{i}_e + a \underline{j}_e$

ossia

$$\underline{OE} = x \underline{i} + y \underline{j} + a \cos \varphi \underline{i} + a \sin \varphi \underline{j} + (-a \sin \varphi \underline{i} + a \cos \varphi \underline{j}) =$$

$$= \{x + a(\cos \varphi - \sin \varphi)\} \underline{i} + \{y + a(\sin \varphi + \cos \varphi)\} \underline{j}$$

Allora $Q_s = 0$, $Q_\theta = 0$

$$Q_x = F_e (\cos \varphi \underline{i} + \sin \varphi \underline{j}) \cdot \frac{\partial (\underline{OE})}{\partial x} = F_e \cos \varphi$$

$$Q_y = F_e (\cos \varphi \underline{i} + \sin \varphi \underline{j}) \cdot \frac{\partial (\underline{OE})}{\partial y} = F_e \sin \varphi$$

$$Q_\varphi = F_e (\cos \varphi \underline{i} + \sin \varphi \underline{j}) \cdot \frac{\partial \{ (x + a(\cos \varphi - \sin \varphi)) \underline{i} + (y + a(\sin \varphi + \cos \varphi)) \underline{j} \}}{\partial \varphi} =$$

$$= F_e (\cos \varphi \underline{i} + \sin \varphi \underline{j}) \cdot \{ a(-\sin \varphi - \cos \varphi) \underline{i} + a(\cos \varphi - \sin \varphi) \underline{j} \} =$$

$$= F_e \cos \varphi a(-\sin \varphi - \cos \varphi) + F_e \sin \varphi a(\cos \varphi - \sin \varphi) =$$

$$= a F_e (-\cancel{\sin \varphi \cos \varphi} - \cos^2 \varphi + \cancel{\sin \varphi \cos \varphi} - \sin^2 \varphi) =$$

$$= -a F_e (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) = -a F_e$$

Quindi

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_e \cos \varphi \\ F_e \sin \varphi \\ -a F_e \end{bmatrix}$$

caso (iv) Se il sistema complementivamente viene ruotato la gravità agisce sulla piastra in modo da farla scivolare verso il basso.

Per semplificare la vita pensiamo che la gravità sia ruotata

di $-\alpha$ attorno ad y , con x e y che identificano il piano inclinato. Di fatto la gravità agisce come una forza esterna

applicata in G descritta da



$$\underline{F}_g = m g (\sin \alpha \underline{i} - \cos \alpha \underline{j})$$

La considero nel computo delle coupon Lagrangiane delle forze attive da cui

$$\underline{Q} = [Q_s \ Q_\theta \ Q_x \ Q_y \ Q_\varphi]^T$$

$$Q_{q_k} = mg (\sin \alpha \ \underline{\dot{x}} - \cos \alpha \ \underline{\dot{y}}) \cdot \frac{\partial (\underline{OG})}{\partial q_k} \quad (\text{generica } q_k)$$

$\nearrow \underline{OG} = x \underline{\dot{x}} + y \underline{\dot{y}}$

$$Q_s = 0, \quad Q_\theta = 0$$

$$Q_x = mg (\sin \alpha \ \underline{\dot{x}} + \cos \alpha \ \underline{\dot{y}}) \cdot \frac{\partial (x \underline{\dot{x}} + y \underline{\dot{y}})}{\partial x} = mg \sin \alpha$$

$$Q_y = mg (\sin \alpha \ \underline{\dot{x}} + \cos \alpha \ \underline{\dot{y}}) \cdot \frac{\partial (x \underline{\dot{x}} + y \underline{\dot{y}})}{\partial y} = 0 \quad (\underline{\dot{x}} \text{ e } \underline{\dot{y}} \text{ orto. a } \underline{\dot{y}})$$

$$Q_\varphi = 0$$

ed allora $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ovvero se $\alpha = 0$ $\underline{Q} \equiv \underline{0}$ ed il sistema non risulterebbe eccitato da azioni esterne attive.

Domanda n° 2 vedere dispense del corso.

Domanda n° 3 analizziamo il pb. $\underline{e} = \underline{Y}^T \underline{w}$ con $\underline{Y} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m < n$

allora $\underline{Y}^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è una matrice rett. alta. La soluzione per $\underline{w}$ (ai minimi quadrati) nel residuo $\underline{e} \triangleq \underline{e} - \underline{Y}^T \underline{w}$ è

$$\underline{w} = (\underline{Y}^T)^+ \underline{e} + H \underline{z} \quad \text{con } H \text{ base del } \text{Ker}(\underline{Y}^T) \text{ se uno è non nullo}$$

La soluzione ai minimi quadrati in $\underline{e}$ di norma minima in $\underline{w}$ è solo

$$\underline{w} = (\underline{Y}^T)^+ \underline{e}$$

Se $\text{Ker}(\underline{Y}^T) = \underline{0}$, ovvero $\underline{Y}^T$ rango pieno colonne, allora non $\exists$ wrench strutturali e $\underline{w} = (\underline{Y}^T)^+ \underline{e}$ è la migliore stima ai minimi quadrati in $\underline{e}$, con garanzia che non possono esserci wrench esterni strutturali "non osservabili".