

Dinamica

Robotica I

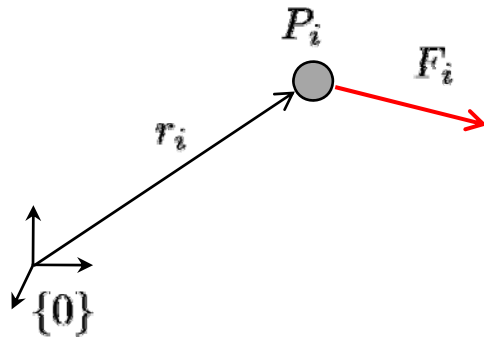
Antonio Bicchi, Marco Gabiccini



A.A. 2007/2008 Laurea Specialistica in
Ingegneria dell'Automazione

Principio dei Lavori Virtuali – spostamento virtuale

Particella di massa m_i , la cui posizione è espressa dal vettore posizione r_i , su cui agisce la forza risultante F_i .



Definiamo il concetto di spostamento virtuale:

- r_i vettore posizione che indica il punto di applicazione della risultante F_i ;
- definiamo δr_i come spostamento virtuale tale che:
 - 1) è uno **spostamento infinitesimo** del punto P_i ;
 - 2) è compatibile con gli eventuali vincoli imposti alla particella **congelati** al tempo t .

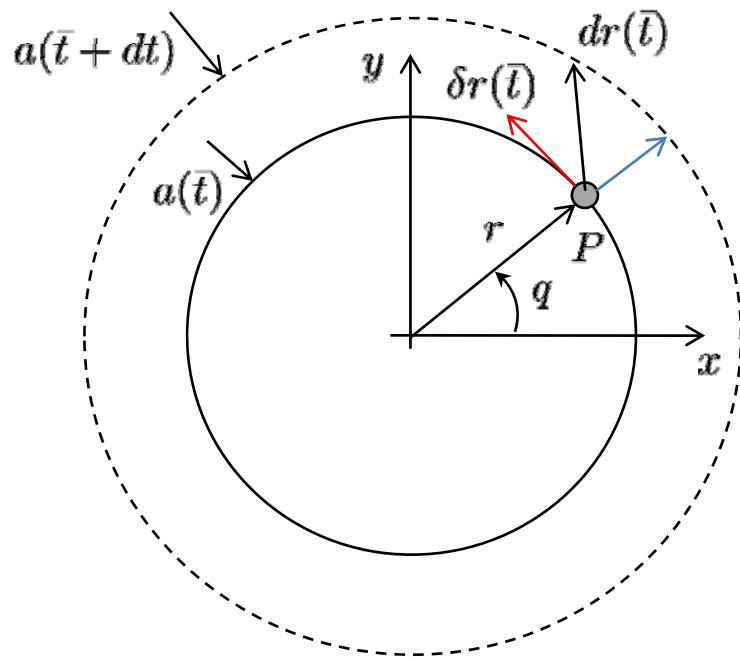
Attenzione al fatto che se si assume che $r_i = r_i(q, t)$ con $q = [q_1 \cdots q_n]^T$ coordinate Lagrangiane del sistema di cui la particella fa parte e t è il tempo, si vede come lo spostamento virtuale differisce dal differenziale, infatti:

$$dr_i = \frac{\partial r_i}{\partial q} dq + \frac{\partial r_i}{\partial t} dt \quad (\text{differenziale})$$

$$\delta r_i = \frac{\partial r_i}{\partial q} \delta q \quad (\text{spost. virtuale})$$

Principio dei Lavori Virtuali – spostamento virtuale

Esempio: una particella è vincolata a rimanere su una circonferenza il cui raggio a varia in funzione del tempo. Supponiamo che la variabile di configurazione q , controlli la posizione della particella sulla circonferenza. Valutiamo uno spostamento elementare dr ed uno spostamento virtuale δr .



Posizione della particella:

$$r(q(t), t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = a(t) \begin{bmatrix} \cos q(t) \\ \sin q(t) \end{bmatrix}$$

Spostamento elementare (differenziale) [nero]:

$$dr(\bar{t}) = a(\bar{t}) \begin{bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{bmatrix} dq + a'(\bar{t}) dt \begin{bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{bmatrix}$$

Spostamento virtuale [rosso]:

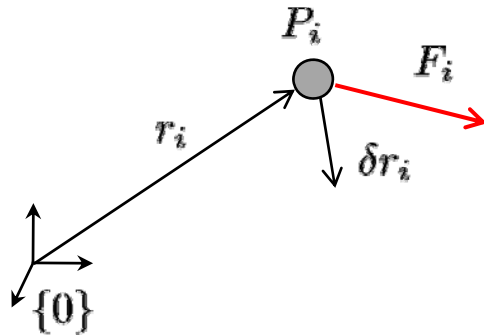
$$\delta r(\bar{t}) = a(\bar{t}) \begin{bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{bmatrix} \delta q$$

Lo **spostamento virtuale** è sempre tangente al vincolo congelato al tempo \bar{t} .

Lo spostamento virtuale coincide con il differenziale se il vincolo è indep. dal tempo.

Principio dei Lavori Virtuali – equilibrio statico di una particella

Particella di massa m_i , la cui posizione è espressa dal vettore posizione r_i , su cui agisce la forza risultante F_i .



Definiamo **lavoro virtuale** della risultante F_i sullo spostamento virtuale δr_i lo scalare

$$\delta W_i \triangleq F_i^T \delta r_i$$

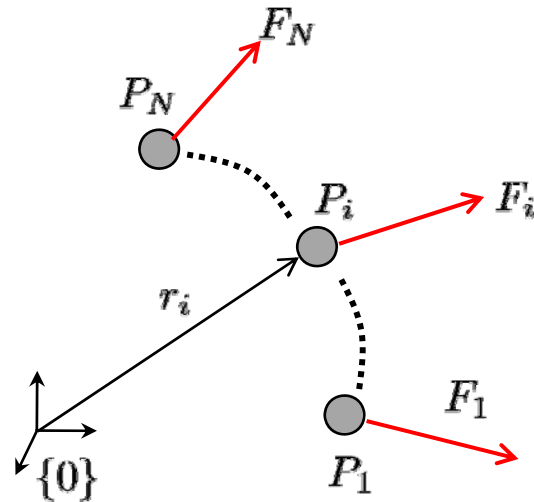
E' evidente che, se la particella è in equilibrio ossia $F_i = 0$, allora

$$\delta W_i = F_i^T \delta r_i = 0, \quad \forall \delta r_i$$

ossia il lavoro virtuale in corrispondenza di uno spostamento virtuale arbitrario è nullo.

Principio dei Lavori Virtuali – equilibrio statico di un sistema

Se consideriamo un sistema di N particelle con masse m_i , di vettori posizione r_i e risultante su ogni particella F_i



Il sistema è globalmente in equilibrio se lo è ogni particella, ossia se $F_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$
 Ovvero, in modo compatto, se

$$F = 0 \in \mathbb{R}^{3N} \quad F \triangleq [F_1^T \dots F_N^T]^T \in \mathbb{R}^{3N} \quad \delta r \triangleq [\delta r_1^T \dots \delta r_N^T]^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

Ma allora anche il lavoro virtuale globale è nullo, e perciò:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \delta W_i = \sum_{i=1}^N F_i^T \delta r_i \triangleq F^T \delta r = 0$$

E fin qui niente di nuovo.

Principio dei Lavori Virtuali – equilibrio statico di un sistema

Dunque
$$\delta W = \sum_{i=1}^N \delta W_i = \sum_{i=1}^N F_i^T \delta r_i \triangleq F^T \delta r = 0$$

A questo punto si guadagna qualcosa da questa formulazione se si distingue la risultante su ogni particella in:

- forza attiva: $F_i^{(a)}$
- forza vincolare: $F_i^{(v)}$

ossia: $F_i = F_i^{(a)} + F_i^{(v)}$

Globalmente: $F = F^{(a)} + F^{(v)}$

Quindi si ha: $\delta W = \delta W^{(a)} + \delta W^{(v)} = (F^{(a)T} + F^{(v)T}) \delta r = 0$

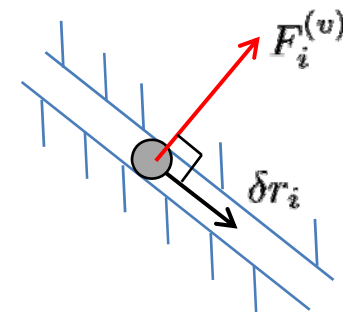
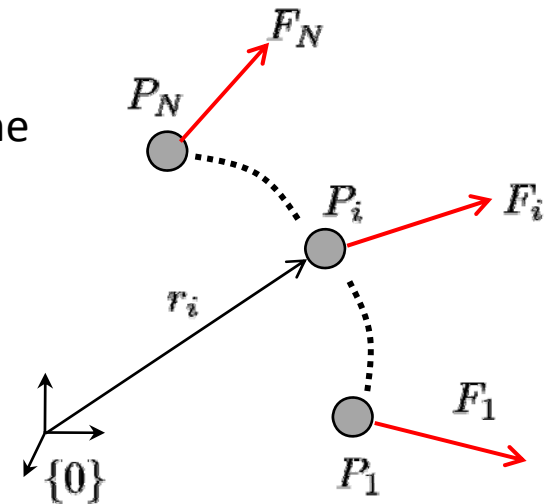
Per sistemi in cui le reazioni vincolari compiono/non compiono lavoro si ha, rispettivamente.

$$\delta W^{(v)} = F^{(v)T} \delta r \leq 0 \quad (= 0, \text{ vincoli lisci})$$

Per cui il lavoro virtuale delle forze attive risulta, rispettivamente

$$\delta W^{(a)} = F^{(a)T} \delta r \geq 0 \quad (= 0, \text{ vincoli lisci})$$

Per vincoli lisci infatti la generica $F_i^{(v)}$ è sempre $\perp \delta r_i$



Principio dei Lavori Virtuali – enunciato

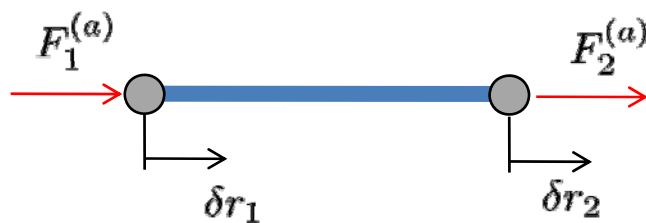
Condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione di un sistema materiale soggetto a vincoli lisci (privi di attrito) sia in equilibrio statico è che il lavoro virtuale

$$\delta W^{(a)} = \sum_{i=1}^N F_i^{(a)T} \delta r_i = F^{(a)T} \delta r = 0$$

delle forze attive $F^{(a)}$ su uno spostamento virtuale arbitrario δr (infinitesimo e compatibile coi vincoli a tempo t) sia nullo.

Attenzione al fatto che $\delta W^{(a)} = 0$ non implica che $F_i^{(a)} = 0$, poiché gli spostamenti virtuali δr possono non essere linearmente indipendenti per essere compatibili coi vincoli

Esempio: due particelle alle estremità di una barretta rigida con forze attive applicate alle due estremità.



spost. virtuale compat. col vincolo di rigidità:

$$\delta r_1 = \delta r_2$$

PLV dice che c'è equilibrio se:

$$\delta W^{(a)} = F_1^{(a)T} \delta r_1 + F_2^{(a)T} \delta r_2 = (F_1^{(a)} + F_2^{(a)})^T \delta r_1 = 0 \rightarrow \boxed{F_2^{(a)} = -F_1^{(a)}}$$

Coordinate generalizzate

Se il vettore posizione generalizzato $r = r(q) \in \mathbb{R}^{3N}$, $q \in \mathbb{R}^n$ con q vettore di configurazione (coordinate Lagrangiane), si ha:

$$\delta r = \frac{\partial r(q)}{\partial q} \delta q, \quad \frac{\partial r(q)}{\partial q} \in \mathbb{R}^{3N \times n}$$

Allora il lavoro virtuale delle risultanti può essere riscritto in modo equivalente come:

$$\delta W = F^T \delta r = F^T \frac{\partial r}{\partial q} \delta q \triangleq Q^T \delta q = \sum_{i=1}^n Q_i^T \delta q_i$$

Si è quindi implicitamente definito il vettore

$$Q^T \triangleq F^T \frac{\partial r}{\partial q} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

che è detto forza generalizzata. La generica componente

$$Q_i^T \triangleq F^T \frac{\partial r}{\partial q_i}$$

può essere infatti una forza o un momento a seconda del fatto che la corrispondente coordinata Lagrangiana q_i sia uno spostamento o un angolo. Questa è alternativamente detta componente Lagrangiana della forza relativa alla coordinata q_i

Principio dei Lavori Virtuali – equilibrio dinamico di un sistema

Se consideriamo un sistema di N particelle con masse m_i , di vettori posizione r_i , risultante su ogni particella F_i ed accelerazione della generica particella \ddot{r}_i

Si ha che il sistema è in equilibrio dinamico se ogni particella é in equilibrio dinamico, ossia:

$$F_i - \dot{P}_i = 0, \quad P_i = m_i I_3 \dot{r}_i; \quad \dot{P}_i = m_i I_3 \ddot{r}_i$$

Dunque globalmente

$$\sum_{i=1}^N (F_i - \dot{P}_i)^T \delta r_i \triangleq (F - \dot{P})^T \delta r = (F^{(a)} + F^{(v)} - \dot{P})^T \delta r = 0$$

dove

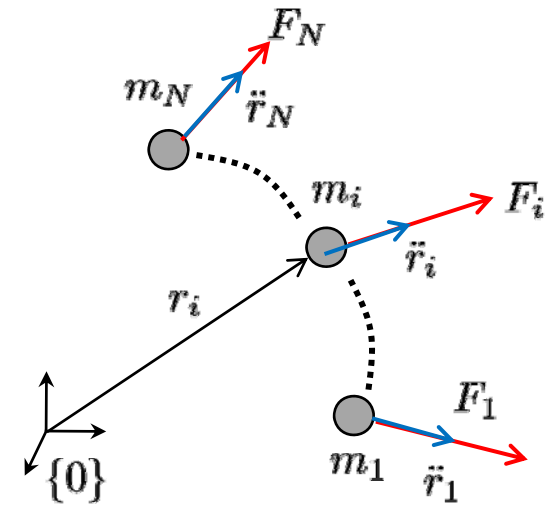
$$F \triangleq [F_1^T \dots F_N^T]^T \in \mathbb{R}^{3N} \quad \dot{P} \triangleq [\dot{P}_1^T \dots \dot{P}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{3N} \quad \delta r \triangleq [\delta r_1^T \dots \delta r_N^T]^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

Perciò se si considerano vincoli lisci, le reazioni vincolari non compiono lavoro:

$$\delta W^{(v)} = F^{(v)T} \delta r = 0$$

e perciò si ha subito un bilancio diretto fra lavoro virtuale delle forze attive e lavoro virtuale delle forze d'inerzia, senza che vi compaiano le reazioni vincolari:

$$\delta W^{(a)} = F^{(a)T} \delta r = \dot{P}^T \delta r = \delta W^{(I)}$$



Lavoro virtuale delle forze d'inerzia

Abbiamo visto che la i-esima forza d'inerzia è scrivibile come derivata della corrispondente i-esima quantità di moto che vale [essendo $r_i = r_i(q(t))$]

$$P_i = m_i I_3 \dot{r}_i = m_i I_3 \frac{\partial r_i}{\partial q} \dot{q}$$

In modo compatto, la quantità di moto globale di tutto il sistema è:

$$P = \begin{bmatrix} m_1 I_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 I_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & m_N I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q} \\ \frac{\partial r_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial r_N}{\partial q} \end{bmatrix} \dot{q} \triangleq M \frac{\partial r}{\partial q} \dot{q}; \quad M = \text{diag}(m_i I_3); \quad m_i I_3 = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{bmatrix}$$

$M \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$

Allora la forza d'inerzia globale \dot{P} risulta:

$$\dot{P} = \frac{d}{dt} \left(M \frac{\partial r}{\partial q} \dot{q} \right) = M \frac{\partial r}{\partial q} \ddot{q} + M \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) \dot{q}$$

Essendo $\delta r = \frac{\partial r(q)}{\partial q} \delta q$, il lavoro virtuale delle forze d'inerzia $\delta W^{(I)}$ risulta quindi:

$$\begin{aligned} \delta W^{(I)} &= \dot{P}^T \delta r = \delta r^T \dot{P} = \delta q^T \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right)^T \left[M \frac{\partial r}{\partial q} \ddot{q} + M \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) \dot{q} \right] \\ &= \delta q^T \left[\left(\frac{\partial r}{\partial q} \right)^T M \frac{\partial r}{\partial q} \ddot{q} + \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right)^T M \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) \dot{q} \right] \end{aligned}$$

Lavoro virtuale delle forze d'inerzia da energia cinetica

Definiamo una quantità scalare $T(q, \dot{q})$, l'energia cinetica del sistema, come segue:

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\dot{r}_i\|^2 = \frac{1}{2} \dot{r}^T M \dot{r} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right)^T M \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T (r, q)^T M(r, q) \dot{q}$$

Notando che M è simmetrica, anche $r_{,q}^T M r_{,q}$ è simmetrica, quindi l'energia cinetica è una forma quadratica nelle velocità generalizzate \dot{q} , da cui:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dot{q}^T (r, q)^T M(r, q); \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Derivando ulteriormente questo vettore riga rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \ddot{q}^T (r, q)^T M(r, q) + 2 \dot{q}^T (r, q)^T M \frac{d}{dt} (r, q); \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Inoltre, derivando l'energia cinetica rispetto alla configurazione q si ha:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \dot{q}^T (r, q)^T M(r, q, q) \dot{q} = \dot{q}^T (r, q)^T M \frac{d}{dt} (r, q); \quad \frac{\partial T}{\partial q} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

dove si è sfruttata l'identità:

$$r_{,qq} \dot{q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) \dot{q} = \frac{d}{dt} (r, q) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right)$$

Dimostrazione della identità' impiegata

Dimostriamo che: $r_{,qq} \dot{q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) \dot{q} = \frac{d}{dt} (r_{,q}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right)$

In forma indiciale:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) \right]_{ij} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \right) \dot{q}_k \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Sintetizzando:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) \right]_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \right) \dot{q}_k = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$$

Risulta perciò dimostrata l'identità cercata anche in forma matriciale

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 r}{\partial q^2} \dot{q} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial q} \quad \text{attenzione al fatto che: } \frac{\partial^2 r}{\partial q^2} \in \mathbb{R}^{3N \times n \times n}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial q^2} \dot{q} = \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial r}{\partial q} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial q_n} \frac{\partial r}{\partial q} \dot{q}_n$$

Forma equivalente del lavoro virtuale di inerzia

Eravamo partiti da:

$$\delta W^{(I)} = \delta q^T \left[(r,q)^T M(r,q) \ddot{q} + (r,q)^T M \frac{d}{dt} (r,q) \dot{q} \right]$$

Abbiamo trovato che le derivate dell'energia cinetica sono date da:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \ddot{q}^T (r,q)^T M(r,q) + 2\dot{q}^T (r,q)^T M \frac{d}{dt} (r,q);$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \dot{q}^T (r,q)^T M(r,q) \dot{q} = \dot{q}^T (r,q)^T M \frac{d}{dt} (r,q);$$

Dunque se calcolo la differenza:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right] = \ddot{q}^T (r,q)^T M(r,q) + \dot{q}^T (r,q)^T M \frac{d}{dt} (r,q);$$

Vale inoltre:

$$(r,q)^T M \frac{d}{dt} (r,q) = \left[\frac{d}{dt} (r,q) \right]^T M(r,q);$$

e ne prendo la trasposta:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right]^T = (r,q)^T M(r,q) \ddot{q}^T + (r,q)^T M \frac{d}{dt} (r,q) \dot{q}^T; \quad \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right]^T \in \mathbb{R}^n$$

Posso scrivere il lavoro virtuale delle forze d'inerzia in modo sistematico come segue

$$\delta W^{(I)} = \delta q^T \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right]^T = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right] \delta q$$

Lavoro virtuale delle forze attive

Abbiamo dimostrato che il lavoro virtuale delle forze attive è dato da:

$$\delta W^{(a)} = F^{(a)T} \delta r = F^{(a)T} \frac{\partial r}{\partial q} \delta q \triangleq Q^{(a)T} \delta q$$

Dove si è definita la forza generalizzata:

$$Q^{(a)T} \triangleq F^{(a)T} \frac{\partial r}{\partial q} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Se distinguiamo le forze generalizzate in conservative, ossia derivabili da un potenziale (gravitazionale, elastico, etc...), e non conservative (tutte le altre) possiamo scrivere:

$$Q^{(a)T} = Q_c^{(a)T} + Q_{nc}^{(a)T} \quad \text{dove poi:} \quad Q_c^{(a)T} \triangleq F_c^{(a)T} \frac{\partial r}{\partial q}; \quad Q_{nc}^{(a)T} \triangleq F_{nc}^{(a)T} \frac{\partial r}{\partial q};$$

Le forze conservative sono semplicemente calcolate come anti-gradiente del potenziale da cui discendono, ossia:

$$Q_c^{(a)T} = -\frac{\partial U(q)}{\partial q} \quad U(q) = U_g(q) + U_{el}(q) + \dots \quad \begin{array}{l} \text{energia potenziale gravitaz. +} \\ \text{elastica + etc...} \end{array}$$

Dunque anche i rispettivi lavori virtuali possono essere distinti in:

$$\delta W^{(a)} = \delta W_c^{(a)} + \delta W_{nc}^{(a)} = \left(Q_c^{(a)T} + Q_{nc}^{(a)T} \right) \delta q = \delta q^T \left(Q_c^{(a)} + Q_{nc}^{(a)} \right)$$

Equilibrio mediante il Principio dei Lavori Virtuali

Dal bilancio del lavoro virtuale precedentemente visto si ha quindi:

$$\delta W_c^{(a)} + \delta W_{nc}^{(a)} = \delta W^{(I)}$$

Scrivendo ogni termine nella opportuna forma ricavata in precedenza:

$$\delta W^{(I)} = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right] \delta q \quad \delta W_c^{(a)} + \delta W_{nc}^{(a)} = \left(Q_c^{(a)T} + Q_{nc}^{(a)T} \right) \delta q$$

si ottiene:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right] \delta q = \left[- \frac{\partial U}{\partial q} + Q_{nc}^{(a)T} \right] \delta q \quad \rightarrow \quad \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)T} \right] \delta q = 0$$

Definendo il Lagrangiano: $L(q, \dot{q}) \triangleq T(q, \dot{q}) - U(q)$ si può scrivere:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)T} \right] \delta q = 0$$

Ciò discende dal fatto che i potenziali considerati nella meccanica (classica) dipendono soltanto dalla configurazione q , per cui

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$$

Dal Principio dei Lavori Virtuali alle eq.ni di Lagrange

Abbiamo visto che il Principio dei Lavori Virtuali porta a scrivere:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)T} \right] \delta q = 0$$

Nell'ipotesi che la configurazione scelta q sia una configurazione minima, ossia le q_i sono indipendenti, allora lo spostamento virtuale δq può essere un vettore infinitesimo arbitrario. Quindi, scegliendo per δq forme proporzionali agli elementi della base canonica in \mathbb{R}^n si annullano uno alla volta gli elementi della parentesi quadra [...] e quindi globalmente:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^{(a)T} \right] = 0 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Ovvero:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_{nc}^{(a)T}$$

Queste sono n eq.ni differenziali nelle n f.ni scalari q_i , le componenti di q .

Attenzione al fatto che questo risultato è stato possibile grazie al fatto che le q erano indipendenti. Vedremo più avanti come comportarci nel caso in cui, ad es., siano vincolate da una eq.ne $A(q)\delta q = 0$ (vincolo in forma Pfaffiana).

Punto della situazione

Le equazioni del moto di un sistema meccanico di configurazione $q \in \mathbb{R}^n$ sono fornite dalle n eq.ni differenziali di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_{nc}^{(a)T}$$

in cui il **Lagrangiano** $L(q, \dot{q}) \triangleq T(q, \dot{q}) - U(q)$ è uno scalare dato dalla differenza fra l'**energia cinetica** totale del sistema e l'**energia potenziale** totale del sistema.

Le eventuali forze generalizzate attive non conservative si calcolano come:

$$Q_{nc}^{(a)T} \triangleq F_{nc}^{(a)T} \frac{\partial r}{\partial q}$$

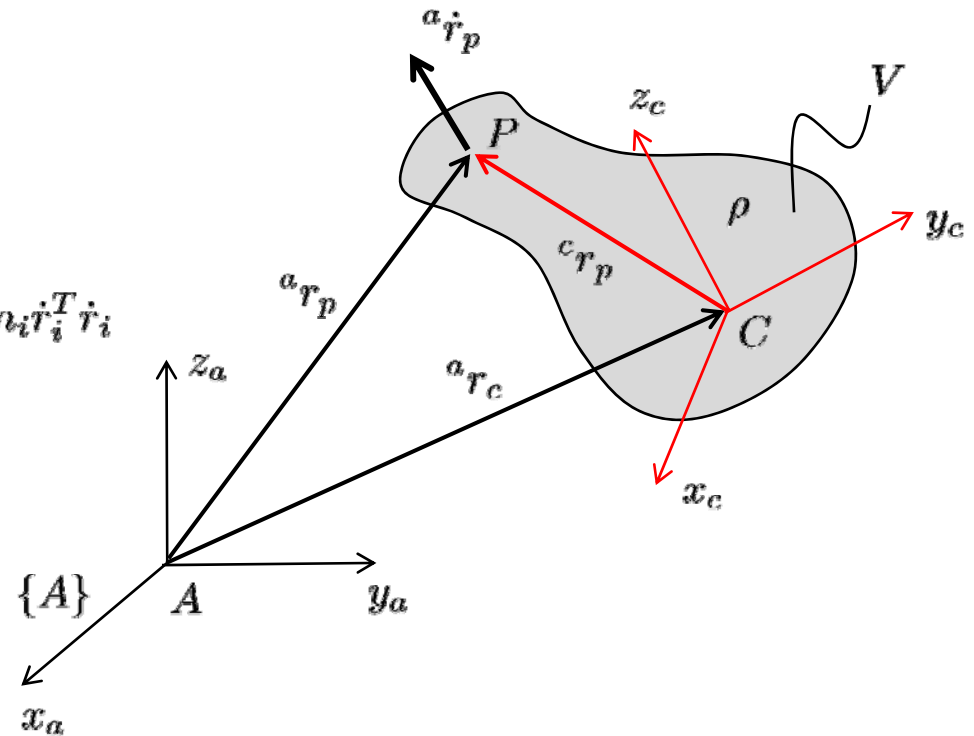
Il metodo è quindi estremamente sistematico ed automatizzabile dato che basta calcolare, oltre alle eventuali forze generalizzate attive non conservative, solo:

- lo scalare $T(q, \dot{q})$ energia cinetica totale del sistema;
- lo scalare $U(q)$ energia potenziale totale del sistema.

Focalizziamo perciò l'attenzione sul calcolo dell'energia di un singolo corpo rigido (prototipo di link), potendosi poi costruire l'energia cinetica totale di un braccio robotico semplicemente sommando le energie cinetiche dei singoli link. Stessa cosa verrà fatta per l'energia potenziale.

Energia cinetica

- Punto materiale: $T = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i$
- Sistema di N punti materiali: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i$
- Corpo rigido: $T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} \rho dV$



Dalla geometria in $\{A\}$:

$$\mathbf{r} = {}^a \mathbf{r}_p = {}^a \mathbf{r}_c + {}^a R_c {}^c \mathbf{r}_{cp}$$

Derivando, la velocità del punto P risulta:

$$\dot{\mathbf{r}} = {}^a \dot{\mathbf{r}}_p = {}^a \dot{\mathbf{r}}_c + {}^a \dot{R}_c {}^c \mathbf{r}_{cp} \quad \text{ma: } {}^a \dot{R}_c = {}^a \hat{\omega}_c {}^a R_c \quad \text{e} \quad {}^a R_c {}^c \mathbf{r}_{cp} = {}^a \mathbf{r}_p - {}^a \mathbf{r}_c \triangleq {}^a \mathbf{r}_{cp} \quad \text{perciò:}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = {}^a \dot{\mathbf{r}}_p = {}^a \dot{\mathbf{r}}_c + {}^a \hat{\omega}_c {}^a \mathbf{r}_{cp}$$

Essendo chiaro a questo punto che le componenti sono tutte in $\{A\}$ si omettono gli apici per alleggerire la notazione, riprendendoli eventualmente nel seguito per mostrare forme alternative con le quantità in sistemi di riferimento differenti.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_c + \hat{\omega}_c \mathbf{r}_{cp}$$

Energia cinetica del corpo rigido

Velocità del punto generico del rigido:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_c + \hat{\omega}_c \mathbf{r}_{cp}$$

Sostituendo nella espressione della energia:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} \rho dV$$

Si ottiene:

$$T = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\mathbf{r}}_c + \hat{\omega}_c \mathbf{r}_{cp})^T (\dot{\mathbf{r}}_c + \hat{\omega}_c \mathbf{r}_{cp}) \rho dV \quad \{A\}$$

Effettuando i calcoli si ha:

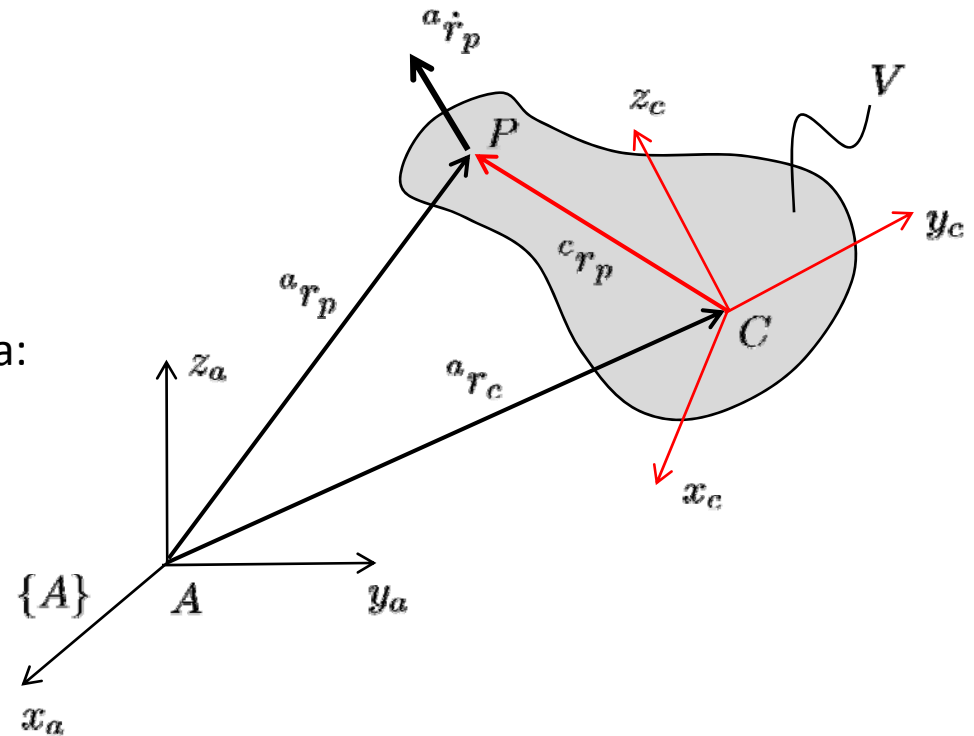
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{r}}_c^T \dot{\mathbf{r}}_c \rho dV + \int_V \dot{\mathbf{r}}_c^T (\omega_c \times \mathbf{r}_{cp}) \rho dV + \frac{1}{2} \int_V (\hat{\omega}_c \mathbf{r}_{cp})^T (\hat{\omega}_c \mathbf{r}_{cp}) \rho dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{r}}_c^T \dot{\mathbf{r}}_c \rho dV + \left[\int_V \mathbf{r}_{cp}^T \rho dV \right] (\dot{\mathbf{r}}_c \times \omega_c) + \frac{1}{2} \int_V (\hat{\mathbf{r}}_{cp} \omega_c)^T (\hat{\mathbf{r}}_{cp} \omega_c) \rho dV \end{aligned}$$

Supponendo che il baricentro G del corpo rigido coincida con l'origine C si ha $\mathbf{r}_{cg} = \mathbf{0}$

$$\int_V \mathbf{r}_{cp} \rho dV = m \mathbf{r}_{cg} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}_{cg} \triangleq \frac{\int_V \mathbf{r}_{cp} \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

Quindi l'espressione si riduce a:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_c^T \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{1}{2} \omega_c^T \left[\int_V \hat{\mathbf{r}}_{cp}^T \hat{\mathbf{r}}_{cp} \rho dV \right] \omega_c = T_{tr} + T_{rot}$$



Energia cinetica di rotazione attorno al baricentro

La componente di en. cin. di rotazione attorno al baricentro T_{rot} è data dalla seguente espressione:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega_c^T \left[\int_V \hat{r}_{cp}^T \hat{r}_{cp} \rho dV \right] \omega_c$$

Esplicitando le componenti di r_{cp} (ricorda: sono in $\{A\}$)

$$r_{cp} = {}^a r_{cp} = [{}^a x_{cp} \quad {}^a y_{cp} \quad {}^a z_{cp}]^T$$

La sua forma “wedge” risulta:

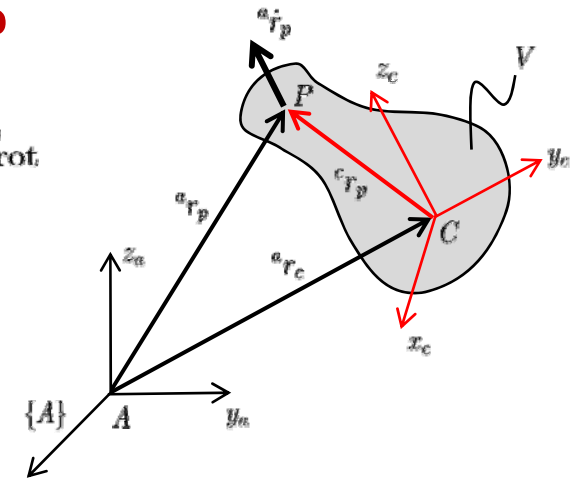
$$\hat{r}_{cp} = (r_{cp})^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -{}^a z_{cp} & {}^a y_{cp} \\ {}^a z_{cp} & 0 & -{}^a x_{cp} \\ -{}^a y_{cp} & {}^a x_{cp} & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi definendo la matrice (simmetrica) di inerzia baricentrica \mathcal{I}_c con componenti nella terna fissa $\{A\}$ come segue

$${}^a \mathcal{I}_c = \int_V \hat{r}_{cp}^T \hat{r}_{cp} \rho dV = \begin{bmatrix} \int_V ({}^a y_{cp}^2 + {}^a z_{cp}^2) \rho dV & - \int_V ({}^a x_{cp} {}^a y_{cp}) \rho dV & - \int_V ({}^a x_{cp} {}^a z_{cp}) \rho dV \\ - \int_V ({}^a x_{cp} {}^a y_{cp}) \rho dV & \int_V ({}^a x_{cp}^2 + {}^a z_{cp}^2) \rho dV & - \int_V ({}^a y_{cp} {}^a z_{cp}) \rho dV \\ - \int_V ({}^a x_{cp} {}^a z_{cp}) \rho dV & - \int_V ({}^a y_{cp} {}^a z_{cp}) \rho dV & \int_V ({}^a x_{cp}^2 + {}^a y_{cp}^2) \rho dV \end{bmatrix}$$

l'energia cinetica di rotazione risulta:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} {}^a \omega_c^T [{}^a \mathcal{I}_c] {}^a \omega_c$$



Energia cinetica di rotazione attorno al baricentro

Le componenti del tensore di inerzia appena calcolato dipendono dal tempo poiché le componenti del vettore r_{cp} sono state espresse in terna fissa $\{A\}$ mentre il corpo rigido si muove nel tempo.

Poiché l'energia cinetica di rotazione attorno al baricentro T_{rot} è uno scalare e quindi invariante rispetto al frame di riferimento rispetto a cui esprimo le componenti, si può scrivere:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} {}^a\omega^T [{}^a\mathcal{I}_c] {}^a\omega = \frac{1}{2} {}^c\omega^T [{}^c\mathcal{I}_c] {}^c\omega$$

Ma essendo:

$${}^a\omega = {}^aR_c {}^c\omega; \quad {}^a\omega^T = {}^c\omega^T {}^aR_c^T$$

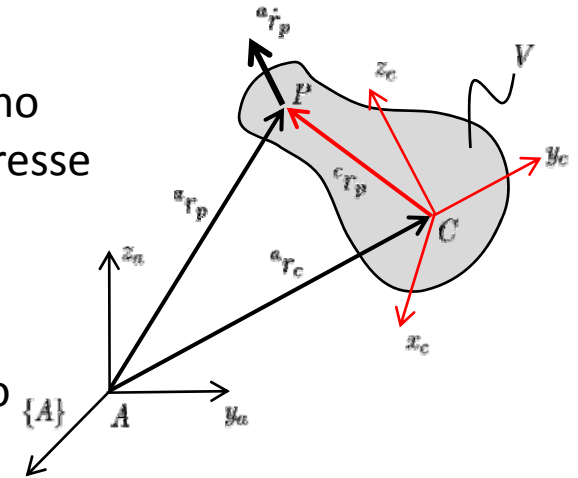
Si ottiene:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} {}^a\omega^T [{}^a\mathcal{I}_c] {}^a\omega = \frac{1}{2} {}^c\omega^T [{}^aR_c^T {}^a\mathcal{I}_c {}^aR_c] {}^c\omega \triangleq \frac{1}{2} {}^c\omega^T [{}^c\mathcal{I}_c] {}^c\omega$$

Da cui risulta definito il tensore di inerzia baricentrico in componenti in terna mobile $\{C\}$

$${}^c\mathcal{I}_c \triangleq {}^aR_c^T {}^a\mathcal{I}_c {}^aR_c$$

E' ovvio che in terna mobile il tensore d'inerzia risulta costante. Quindi viene calcolato una volta per tutte per il corpo rigido e ne definisce l'inerzia alla rotazione 3D generica.



Energia cinetica globale – forma finale

Esplicitamente l'espressione del tensore d'inerzia in terna mobile $\{C\}$ risulta:

$${}^c\mathcal{I}_c = \int_V {}^c\hat{r}_{cp}^T {}^c\hat{r}_{cp} \rho dV = \begin{bmatrix} \int_V ({}^c y_{cp}^2 + {}^c z_{cp}^2) \rho dV & - \int_V ({}^c x_{cp} {}^c y_{cp}) \rho dV & - \int_V ({}^c x_{cp} {}^c z_{cp}) \rho dV \\ - \int_V ({}^c x_{cp} {}^c y_{cp}) \rho dV & \int_V ({}^c x_{cp}^2 + {}^c z_{cp}^2) \rho dV & - \int_V ({}^c y_{cp} {}^c z_{cp}) \rho dV \\ - \int_V ({}^c x_{cp} {}^c z_{cp}) \rho dV & - \int_V ({}^c y_{cp} {}^c z_{cp}) \rho dV & \int_V ({}^c x_{cp}^2 + {}^c y_{cp}^2) \rho dV \end{bmatrix}$$

con il vettore

$${}^c\mathbf{r}_{cp} = [{}^c x_{cp} \quad {}^c y_{cp} \quad {}^c z_{cp}]^T$$

La velocità angolare espressa in terna mobile $\{C\}$ solidale al corpo rigido risulta poi:

$${}^c\boldsymbol{\omega} = {}^a R_c^T {}^a\boldsymbol{\omega}$$

In termini matriciali:

$${}^c\hat{\boldsymbol{\omega}} = ({}^a R_c^T {}^a\boldsymbol{\omega})^\wedge = {}^a R_c^T {}^a\hat{\boldsymbol{\omega}} {}^a R_c = {}^a R_c^T {}^a\dot{R}_c {}^a R_c^T {}^a R_c = {}^a R_c^T {}^a\dot{R}_c$$

Quindi globalmente l'energia cinetica del corpo rigido risulta espressa come:

$$T = T_{tr} + T_{rot} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_c^T \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{1}{2} {}^c\boldsymbol{\omega}_c^T [{}^c\mathcal{I}_c] {}^c\boldsymbol{\omega}_c$$

Una ulteriore semplificazione del termine di rotazione si ottiene se la terna solidale al corpo è principale d'inerzia: vediamo che significa...

Tensore d'inerzia in terna baricentrica principale d'inerzia

Dato che il tensore d'inerzia ${}^c\mathcal{I}_c$ è una matrice positiva definita e simmetrica, allora sarà simile ad una matrice diagonale in una base di autovettori ortogonali che definiscono le cosiddette direzioni principali d'inerzia. In pratica, se

$${}^c\mathcal{I}_c x_i = J_i x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

con x_i autovettore i -esimo normalizzato (ossia i -esima direzione principale d'inerzia) e J_i i -esimo autovalore (ossia i -esimo momento principale d'inerzia), in forma compatta ordinando opportunamente i J_i si può scrivere:

$${}^c\mathcal{I}_c [x_1 : x_2 : x_3] = [x_1 : x_2 : x_3] \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \rightarrow {}^c\mathcal{I}_c {}^cX_p = {}^cX_p {}^p\mathcal{J}_c \rightarrow {}^p\mathcal{J}_c = {}^cX_p^T {}^c\mathcal{I}_c {}^cX_p$$

con

$${}^p\mathcal{J}_c = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}; \quad {}^cX_p : {}^c\omega = {}^cX_p {}^p\omega;$$

Quindi l'energia cinetica di rotazione può essere scritta in modo più comodo in terna baricentrica e principale d'inerzia poiché lì la matrice d'inerzia è diagonale

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} {}^c\omega^T [{}^c\mathcal{I}_c] {}^c\omega = \frac{1}{2} {}^p\omega^T [{}^cX_p^T {}^c\mathcal{I}_c {}^cX_p] {}^p\omega = \frac{1}{2} {}^p\omega^T {}^p\mathcal{J}_c {}^p\omega$$

In tal modo bastano solo i tre J_i per definire l'inerzia a rotazione del corpo rigido.

Tensore baricentrico e principale d'inerzia per alcuni solidi

Riportiamo di seguito i tensori d'inerzia baricentrici in terna principale per alcuni solidi

$${}^c\mathcal{I}_c = \int_V {}^c\hat{r}_{cp}^T {}^c\hat{r}_{cp} \rho dV = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$$

dove:

$$J_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV;$$

$$J_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) \rho dV;$$

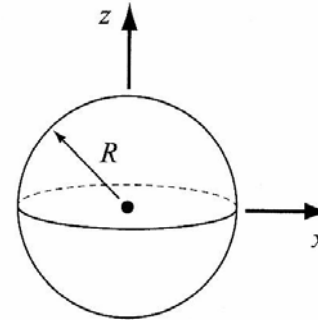
$$J_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV;$$

con:

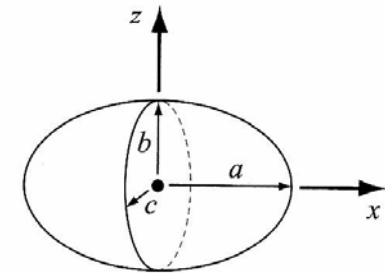
$$J_{xy} = \int_V xy \rho dV = 0;$$

$$J_{yz} = \int_V yz \rho dV = 0;$$

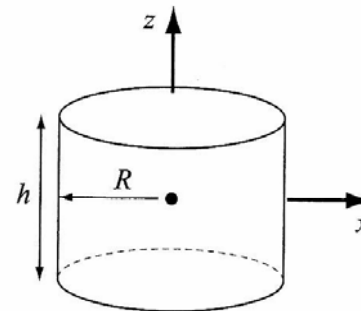
$$J_{xz} = \int_V xz \rho dV = 0;$$



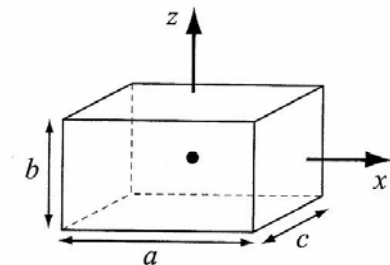
Sphere
Volume = $4\pi R^3/3$
 $I_{xx} = 2mR^2/5$
 $I_{zz} = 2mR^2/5$



Ellipsoid
Volume = $4\pi abc/3$
 $I_{xx} = m(b^2 + c^2)/5$
 $I_{zz} = m(a^2 + c^2)/5$



Right Circular Cylinder
Volume = πhR^2
 $I_{xx} = m(3R^2 + h^2)/12$
 $I_{zz} = mR^2/2$



Rectangular Parallelepiped
Volume = abc
 $I_{xx} = m(b^2 + c^2)/12$
 $I_{zz} = m(a^2 + c^2)/12$

Energia cinetica globale – forma compatta

Siamo infine arrivati a scrivere l'energia cinetica globale come segue:

$$T = T_{\text{tr}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m \dot{r}_c^T \dot{r}_c + \frac{1}{2} {}^p \omega_c^T [{}^p \mathcal{J}_c] {}^p \omega_c$$

Attenzione al fatto che mentre per l'energia cinetica di rotazione è stato importante specificare una terna $\{P\}$ solidale al corpo rigido, baricentrica e principale d'inerzia per semplificare al massimo le espressioni, per l'energia cinetica di traslazione si può pensare che le componenti di velocità del baricentro siano espresse in qualsiasi terna.

Se ne consideriamo le espressioni nella terna $\{P\}$ allora si ha:

$$T = T_{\text{tr}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m {}^p \dot{r}_c^T {}^p \dot{r}_c + \frac{1}{2} {}^p \omega_c^T [{}^p \mathcal{J}_c] {}^p \omega_c$$

Ricordandosi dell'espressione del twist del corpo rigido considerato con polo C e componenti in terna mobile $\{P\}$ di origine C si ha:

$${}^p \xi_c = \begin{bmatrix} {}^p \dot{r}_c \\ {}^p \omega_c \end{bmatrix}$$

Quindi in forma estremamente compatta si può scrivere

$$T = \frac{1}{2} {}^p \xi_c^T {}^p \mathcal{M}_c {}^p \xi_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^p \dot{r}_c^T & {}^p \omega_c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m I_3 & 0_3 \\ 0_3 & {}^p \mathcal{J}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^p \dot{r}_c \\ {}^p \omega_c \end{bmatrix}$$

dove si è implicitamente definita la matrice dell'inerzia globale (trasl. e rot.)

$${}^p \mathcal{M}_c = \begin{bmatrix} m I_3 & 0_3 \\ 0_3 & {}^p \mathcal{J}_c \end{bmatrix}$$

Teorema di Huygens-Steiner

Per determinare come varia la matrice d'inerzia globale al variare del polo di riferimento basta ricordarsi il modo di variare del twist al variare del polo stesso.

Vale la seguente uguaglianza:

$${}^p\xi_c = \begin{bmatrix} \frac{p\dot{r}_c}{p\omega_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & -{}_q\hat{C} \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p\dot{r}_q}{p\omega_q} \end{bmatrix} = M_{c,q} {}^p\xi_q$$

Quindi, sostituendo nella espressione dell'energia totale:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} {}^p\xi_c^T {}^p\mathcal{M}_c {}^p\xi_c = \frac{1}{2} {}^p\xi_q^T M_{c,q}^T {}^p\mathcal{M}_c M_{c,q} {}^p\xi_q \triangleq \frac{1}{2} {}^p\xi_q^T {}^p\mathcal{M}_q {}^p\xi_q \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p\dot{r}_q^T & p\omega_q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ {}_q\hat{C} & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_3 & 0_3 \\ 0_3 & {}^p\mathcal{J}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & -{}_q\hat{C} \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\dot{r}_q \\ p\omega_q \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p\dot{r}_q^T & p\omega_q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_3 & m {}_q\hat{C}^T \\ m {}_q\hat{C} & m [{}_q\hat{C}^T {}_q\hat{C}] + {}^p\mathcal{J}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\dot{r}_q \\ p\omega_q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da cui si può scrivere direttamente:

$${}^p\mathcal{M}_q = {}^p\mathcal{M}_c + \begin{bmatrix} 0_3 & {}_q\hat{C}^T \\ {}_q\hat{C} & m [{}_q\hat{C}^T {}_q\hat{C}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mI_3 & m {}_q\hat{C}^T \\ m {}_q\hat{C} & m [{}_q\hat{C}^T {}_q\hat{C}] + {}^p\mathcal{J}_c \end{bmatrix}$$

La variazione di \mathcal{M} per variazione combinata di polo e sistema di riferimento viene lasciata per esercizio.

Equazioni del moto di un sistema meccanico scleronomo

Vogliamo dimostrare che per un sistema meccanico **scleronomo** (la dipendenza dal tempo non è diretta ma attraverso la configurazione), con **energia cinetica** quindi

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q}; \quad B(q) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ simm. e p.d.}$$

ed **energia potenziale**

$$U = U(q)$$

Le equazioni del moto possono essere scritte direttamente nella forma

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \hat{\tau} + \tilde{\tau} = \tau$$

con:

- $B(q)\ddot{q}$ forze d'inerzia corrispondenti ad accelerazioni tangenziali;
- $C(q, \dot{q})\dot{q}$ forze d'inerzia corrispondenti ad accelerazioni centrifughe e di Coriolis;
- $G(q)$ forze gravitazionali e/o elastiche in dipendenza della forma di $U(q)$;
- $\hat{\tau}$ forze generalizzate attive non conservative degli attuatori sui giunti
- $\tilde{\tau} = \sum_{j=1}^r -J_j^T w_j$ effetto sui giunti derivante dall'applicazione da parte del manipolatore sull'ambiente dei wrench w_j nei punti della struttura tali che $v_j = J_j \dot{q}$

Conseguenza diretta della forma proposta

Applicando il teorema delle “forze vive” al sistema, ossia che la potenza sviluppata da tutte le forze agenti sul sistema eguaglia la derivata dell’energia cinetica totale, si ha:

$$\text{Energia cinetica: } T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} ; \quad \text{Eq.ne del moto: } B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau$$

$$\text{Forze vive: } \tau - G(q) = B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q}$$

Bilancio da teorema delle forze vive:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \right] = \dot{q}^T \left[\tau - G(q) \right] = \dot{q}^T \left[B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} \right]$$

esplicitando la derivata temporale:

$$\dot{q}^T B(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{B}(q) \dot{q} = \dot{q}^T \left[B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} \right]$$

Riordinando:

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T \left[\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} \triangleq \frac{1}{2} \dot{q}^T N(q, \dot{q}) \dot{q} = 0; \quad \forall \dot{q} \quad N(q, \dot{q}) \triangleq \dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})$$

Attenzione al fatto che la matrice N non è necessariamente antisimmetrica, dato che la forma quadratica si deve annullare ma la N stessa dipende da \dot{q} . Tuttavia, data l’arbitrarietà nella definizione di C , si può rendere N effettivamente antisimmetrica mediante una opportuna scelta di C .

Vincolo fra \dot{B} e C per avere la N antisimmetrica

Per avere effettivamente la matrice $N(q, \dot{q}) \triangleq \dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})$ antisimmetrica basta richiedere che:

$$N = -N^T \quad \rightarrow \quad \underbrace{(\dot{B} - 2C) = -(\dot{B} - 2C)^T = -\dot{B} + 2C^T}_{\downarrow}$$
$$\dot{B} = C + C^T$$

Tra le altre cose, questa relazione è conveniente per sistemi con un numero “non eccessivo” di gradi di libertà, direttamente per ricavare la matrice C dalla conoscenza di B e quindi di \dot{B} .

Vediamo ora che esiste in realtà un modo ancora più sistematico per effettuare questo calcolo.

Dinamica di un sistema meccanico scleronomo (catena seriale)

Applichiamo le eq.ni di Lagrange: $\tau = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right]^T$

Il Lagrangiano è dato da: $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$

- Energia cinetica: $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$
- Energia potenziale: $U(q) = \sum_{i=1}^n m_i \|g\| h_i(q) = - \sum_{i=1}^n m_i g^T p_{G_i}(q)$

Derivate:

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}^T B(q); \quad \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]^T = B(q) \dot{q}; \quad \left[B(q) \dot{q} \right]_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}(q) \dot{q}_j$
- $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]^T = B(q) \ddot{q} + \dot{B}(q) \dot{q}; \quad \left[B(q) \ddot{q} + \dot{B}(q) \dot{q} \right]_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial b_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$
- $\left[\frac{\partial L}{\partial q} \right]^T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B(q)}{\partial q} \dot{q} - \|g\| \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial h_i(q)}{\partial q} \right)^T ;$

in particolare: $\left[\frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B(q)}{\partial q} \dot{q} \right]_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B(q)}{\partial q_i} \dot{q} = \sum_{j,k=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k$

- $[\tau]_i = \tau_i$

Dinamica di un sistema meccanico scleronomo (catena seriale)

Le eq.ni di Lagrange risultano quindi:

$$B(q)\ddot{q} + \left[\dot{B}(q) - \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial B(q)}{\partial q} \right] \dot{q} + \|g\| \sum_{i=1}^m m_i \left(\frac{\partial h_i(q)}{\partial q} \right)^T = \tau$$

Allora definendo:

$$\text{o) } G(q) \triangleq \left(\frac{\partial U}{\partial q} \right)^T = \|g\| \sum_{i=1}^m m_i \left(\frac{\partial h_i(q)}{\partial q} \right)^T \quad \text{o) } C(q) \triangleq \left[\dot{B}(q) - \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial B(q)}{\partial q} \right]$$

Si può scrivere:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

In forma indiciale si ha equivalentemente che la i -esima equazione di Lagrange è:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n \left[\frac{\partial b_{ij}(q)}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}(q)}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j + G_i(q) = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Attenzione che la scelta di $C(q, \dot{q})$ non è univoca ma arbitraria purchè $C(q, \dot{q})\dot{q}$ sia corretta.

$$\text{Ad esempio: } \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & 2\dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Scrittura del termine $C(q, \dot{q})$ mediante simboli di Christoffel – I tipo

Vogliamo manipolare questa parentesi:

$$\left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right]$$

Sfruttando la simmetria dei coefficienti j, k all'interno della sommatoria, si può scrivere

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} \right]$$

E perciò si può riscrivere la parentesi come i simboli di Christoffel del 1° tipo

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] = \Gamma_{jk}^i$$

Allora il termine delle forze centrifughe e di Coriolis risulta:

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j = \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k \right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n C_{ij} \dot{q}_j$$

Dove quindi si è definita la matrice $C(q, \dot{q})$ il cui generico elemento è:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k$$

Ottenuto semplicemente impiegando i simboli di Christoffel. E' importante notare la simmetria dei simboli di Christoffel rispetto ai soli pedici j, k

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$$

Antisimmetria della matrice $N = \dot{B} - 2C$

Per la scelta di esprimere la matrice C impiegando i simboli di Christoffel, vale

$$N = \dot{B} - 2C = -(\dot{B} - 2C)^T = -N^T$$

cioè la matrice N è addirittura antisimmetrica, per cui ancora si ha

$$\dot{q}^T N \dot{q} = \dot{q}^T (\dot{B} - 2C) \dot{q} = 0, \quad \forall \dot{q}$$

Quest'ultima relazione è meno generale della antisimmetria e non la implica. La implicherebbe se e solo se $\dot{B} - 2C$ non dipendesse da \dot{q}

Dimostriamo la antisimmetria di N

$$[N]_{ij} = n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij}$$
$$\dot{b}_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k; \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k$$

Quindi:

$$n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} \right] \dot{q}_k$$

Da cui risulta evidente che

$$n_{ij} = -n_{ji} = -n_{ij}^T \quad \rightarrow \quad N = -N^T$$

Dinamica di un braccio robotico seriale

- Equazioni di Eulero-Lagrange (coordinate q indipendenti)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau; \quad L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q);$$

- Energia cinetica totale è data dalla somma delle energie cinetiche dei link

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[m_i v_{G_i}^T v_{G_i} + {}^{l_i} \omega_i^T [{}^{l_i} \mathcal{J}_{G_i}] {}^{l_i} \omega_i \right]$$

dove si è indicato il frame solidale al link i -esimo e baricentrico con $\{L_i\}$, in cui è comodo esprimere il tensore d'inerzia del link medesimo ${}^{l_i} \mathcal{J}_{G_i}$. Dato che fino ad ora abbiamo sempre impiegato le componenti in terna fissa $\{0\}$ della velocità angolare, si può scrivere

$${}^{l_i} \omega_i = {}^0 R_{l_i}^T {}^0 \omega_i; \quad {}^{l_i} \omega_i^T = {}^0 \omega_i^T {}^0 R_{l_i}$$

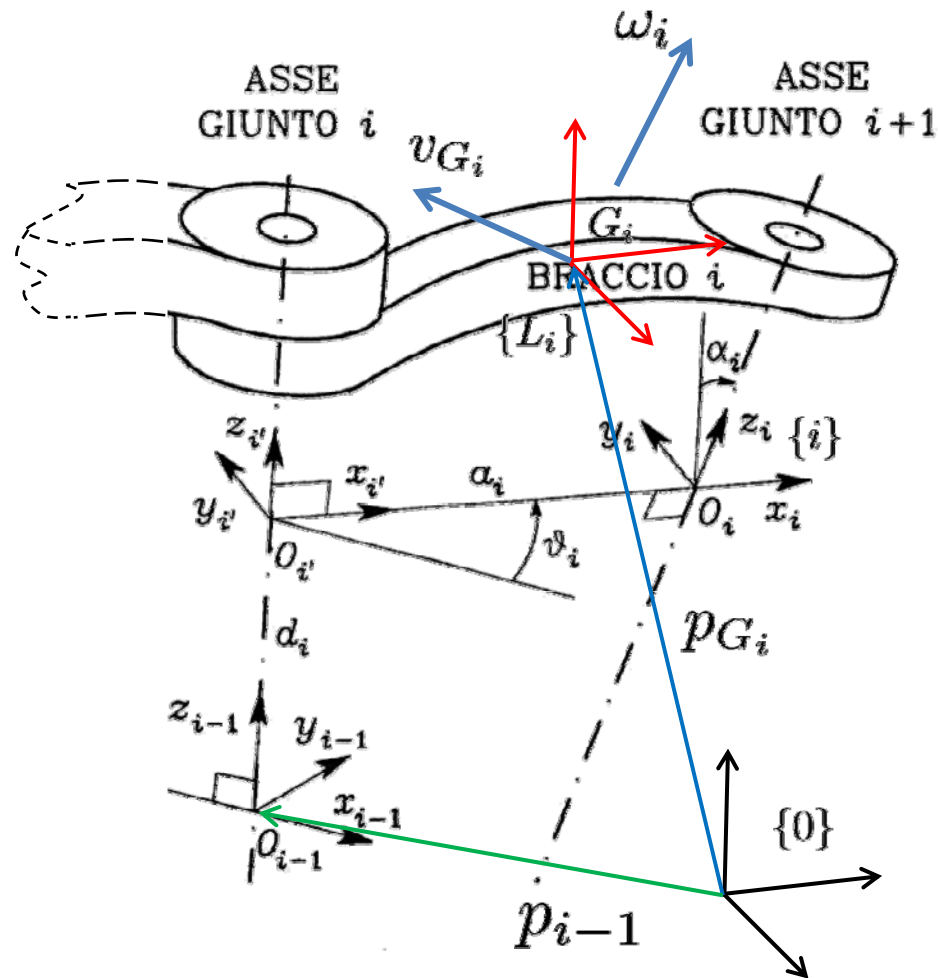
da cui risulta:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[m_i {}^0 v_{G_i}^T {}^0 v_{G_i} + {}^0 \omega_i^T [{}^0 R_{l_i} {}^{l_i} \mathcal{J}_{G_i} {}^0 R_{l_i}^T] {}^0 \omega_i \right]$$

A questo punto si possono esprimere le componenti della velocità lineare del baricentro G_i del link i -esimo e la sua velocità angolare in funzione delle variabili di giunto q semplicemente impiegando i Jacobiani di posizione ed orientazione.

Velocità del generico link

Velocità del baricentro ed angolare del link i-esimo



Frame locale $\{L_i\}$

$${}^0R_{L_i}(q) = {}^0R_{i'}(q)R_{L_i}$$

Comp. vel. angolare

$${}^L_i\omega_i = {}^0R_{L_i}^T {}^0\omega_i$$

Legame fra velocità lineare ed angolare e velocità ai giunti:

$$\begin{cases} {}^0v_{G_i} = J_{P_i}(q)\dot{q} \\ {}^0\omega_i = J_{O_i}(q)\dot{q} \end{cases}$$

Dinamica di un braccio robotico seriale

- Forma dell'energia cinetica di un braccio seriale:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[m_i {}^0v_{G_i}^T {}^0v_{G_i} + {}^0\omega_i^T [{}^0R_{l_i} \mathcal{J}_{G_i} {}^0R_{l_i}^T] {}^0\omega_i \right]$$

- Velocità del baricentro del link i-esimo e la sua velocità angolare in terna fissa $\{0\}$ sono legati alle velocità dei giunti mediante opportuni Jacobiani:

$$\begin{cases} {}^0v_{G_i} &= J_{P_i}(q)\dot{q} \\ {}^0\omega_i &= J_{O_i}(q)\dot{q} \end{cases}$$

Dove, avendo indicato il generico Jacobiano che moltiplica l'intero vettore \dot{q} , ma essendo la velocità del link i-esimo dipendente solo dalle i variabili di giunto a monte, si ha:

$$J_{P_i}(q) = \left[j_{P_1} \mid \cdots \mid j_{P_i} \mid 0 \mid \cdots \mid 0 \right] \quad \dot{q} = \left[\dot{q}_1 \mid \cdots \mid \dot{q}_i \mid \dot{q}_{i+1} \mid \cdots \mid \dot{q}_n \right]^T$$

$$J_{O_i}(q) = \left[j_{O_1} \mid \cdots \mid j_{O_i} \mid 0 \mid \cdots \mid 0 \right]$$

dove con D.-H.

$$j_{P_j} = \begin{cases} z_{j-1}, & \text{prismatico} \\ z_{j-1} \times (p_{G_i} - p_{j-1}), & \text{rotoidale} \end{cases} \quad j_{O_j} = \begin{cases} 0, & \text{prismatico} \\ z_{j-1}, & \text{rotoidale} \end{cases} \quad 0 \leq j \leq i$$

Dinamica di un braccio robotico seriale

- Forma dell'energia cinetica di un braccio seriale:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[m_i {}^0v_{G_i}^T {}^0v_{G_i} + {}^0\omega_i^T [{}^0R_{l_i} {}^{l_i}J_{G_i} {}^0R_{l_i}^T] {}^0\omega_i \right]$$

Ossia, in funzione delle velocità ai giunti:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[m_i \dot{q}^T J_{P_i}^T J_{P_i} \dot{q} + \dot{q}^T J_{O_i}^T [{}^0R_{l_i} {}^{l_i}J_{G_i} {}^0R_{l_i}^T] J_{O_i} \dot{q} \right] \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \left[m_i J_{P_i}^T J_{P_i} + J_{O_i}^T [{}^0R_{l_i} {}^{l_i}J_{G_i} {}^0R_{l_i}^T] J_{O_i} \right] \dot{q} \\ &\triangleq \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \end{aligned}$$

dove si è definita la matrice della en. cinetica nelle variabili generalizzate

$$B(q) \triangleq \sum_{i=1}^n \left[m_i J_{P_i}(q)^T J_{P_i}(q) + J_{O_i}(q)^T [{}^0R_{l_i}(q) {}^{l_i}J_{G_i} {}^0R_{l_i}(q)^T] J_{O_i}(q) \right]$$

L'energia potenziale risulta poi

$$U(q) = \sum_{i=1}^n U_i(q) = \sum_{i=1}^n m_i \|g\| h_i(q) = -g^T \sum_{i=1}^n m_i p_{G_i}(q)$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per ricavare le eq.ni del moto nella forma standard vista in precedenza.

Manipolatore cartesiano a due bracci

Consideriamo il manipolatore cartesiano a due bracci in figura

Configurazione: $q = [q_1 \quad q_2]^T = [d_1 \quad d_2]^T$

Masse: m_{l_1}, m_{l_2}

I tensori d'inerzia posso anche evitare di calcolarli dal momento che i due Jacobiani di orientazione sono nulli. In altre parole, l'energia cinetica rotazionale del sistema è nulla per questa struttura che può solo traslare.

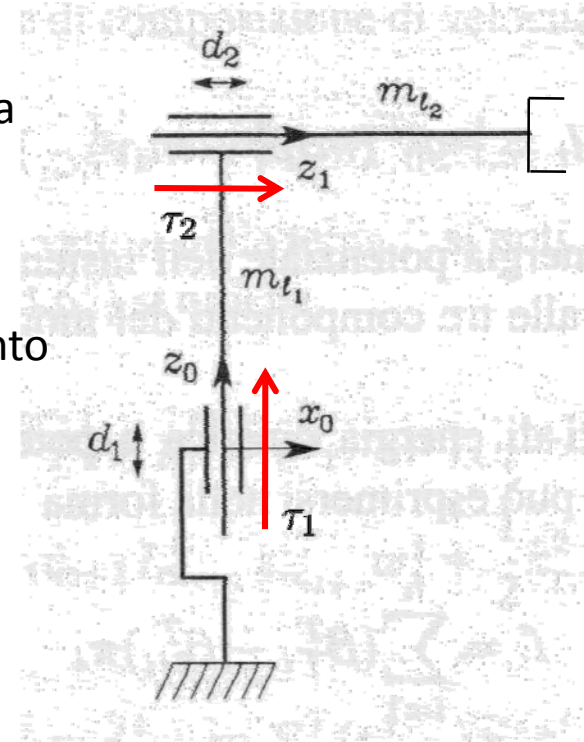
Calcolo dei Jacobiani di posizione dei baricentri dei due link.

$${}^0v_{G_1} = J_{P_1} \dot{q}; \quad J_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$${}^0v_{G_2} = J_{P_2} \dot{q}; \quad J_{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

Calcolo della matrice d'inerzia B

$$B = m_{l_1} J_{P_1}^T J_{P_1} + m_{l_2} J_{P_2}^T J_{P_2} = \begin{bmatrix} m_{l_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{l_2} & 0 \\ 0 & m_{l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{l_1} + m_{l_2} & 0 \\ 0 & m_{l_2} \end{bmatrix}$$



Manipolatore cartesiano a due bracci

Essendo la matrice d'inerzia B costante, ossia non dipende dalla configurazione q

$$B = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

i simboli di Christoffel sono tutti nulli e perciò $C = 0$.
Ciò indica che in tale sistema, nella scelta di coordinate effettuata, non vi sono termini centrifughi né di Coriolis.

I contributi gravitazionali sono espressi da

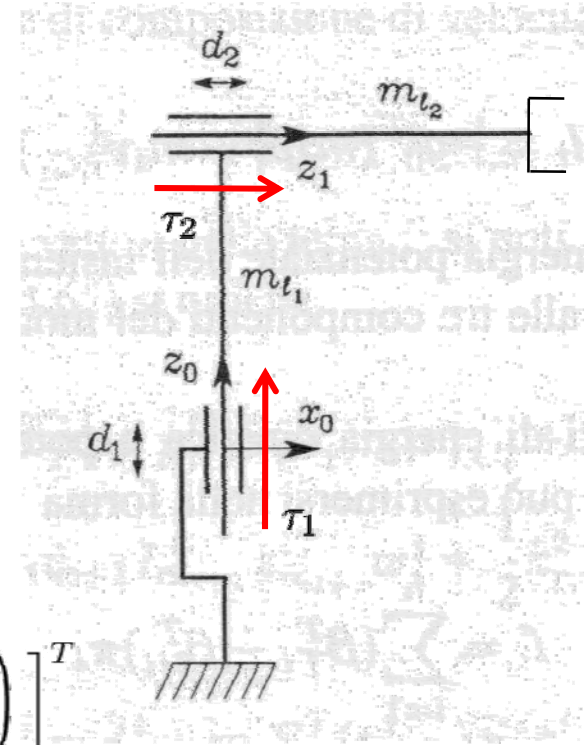
$$G = \left[\frac{\partial U}{\partial q} \right]^T = - \left[{}^0g^T \left(\sum_{i=1}^2 m_i \frac{\partial p_{G_i}}{\partial q} \right) \right]^T = - \left[{}^0g^T \left(\sum_{i=1}^2 m_i J_{P_i} \right) \right]^T$$

$$= - \left(\sum_{i=1}^2 m_i J_{P_i}^T \right) {}^0g = - (m_1 J_{P_1}^T {}^0g + m_2 J_{P_2}^T {}^0g); \quad {}^0g = [0 \quad 0 \quad -g]^T$$

che si esplicitano nel vettore

$$G = \begin{bmatrix} (m_{l_1} + m_{l_2})g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le eq.ni dinamiche risultano quindi:

$$\begin{bmatrix} m_{l_1} + m_{l_2} & 0 \\ 0 & m_{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_{l_1} + m_{l_2})g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$


Manipolatore planare RR

Consideriamo il manipolatore planare RR in figura

Configurazione: $q = [q_1 \quad q_2]^T = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$

Masse: m_{l_1}, m_{l_2}

Tensori d'inerzia baricentrici e principali d'inerzia, ossia rispetto ai frame locali $\{L_1\}$, $\{L_2\}$ dei bracci:

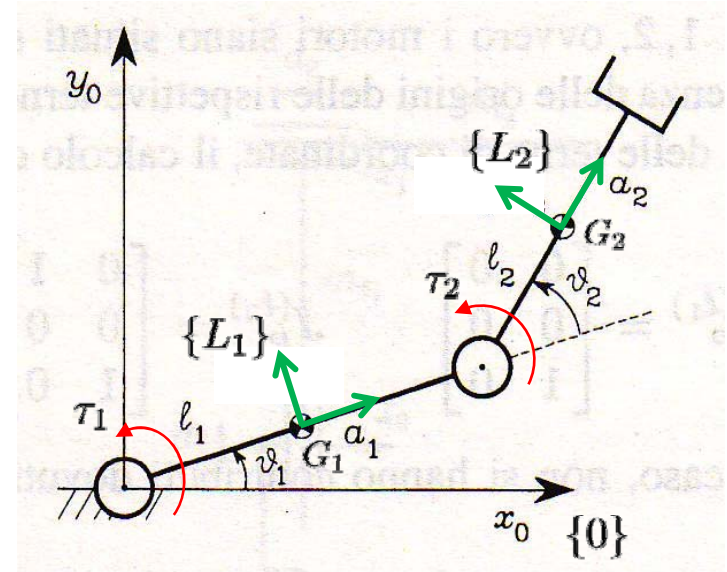
$${}^{l_1}J_{G_1} = \begin{bmatrix} J_{xx}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(1)} \end{bmatrix}; \quad {}^{l_2}J_{G_2} = \begin{bmatrix} J_{xx}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(2)} \end{bmatrix};$$

Jacobiani di posizione dei baricentri dei bracci:

$${}^0v_{G_1} = J_{P_1}\dot{q}; \quad J_{P_1} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 & 0 \\ l_1 C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0v_{G_2} = J_{P_2}\dot{q}; \quad J_{P_2} = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ a_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Jacobiani di orientazione dei due bracci:

$${}^0\omega_1 = J_{O_1}\dot{q}; \quad J_{O_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\omega_2 = J_{O_2}\dot{q}; \quad J_{O_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$



Manipolatore planare RR

Matrici di rotazione fra frame fisso $\{0\}$ e locali $\{L_1\}$, $\{L_2\}$

$${}^0R_{L_1} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0R_{L_2} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Tensori d'inerzia baricentrici in terna fissa $\{0\}$:

$${}^0J_{G_1} = {}^0R_{L_1} l_1 J_{G_1} {}^0R_{L_1}^T = \begin{bmatrix} J_{xx}^{(1)} C_1^2 + J_{yy}^{(1)} S_1^2 & (J_{xx}^{(1)} - J_{yy}^{(1)}) S_1 C_1 & 0 \\ (J_{xx}^{(1)} - J_{yy}^{(1)}) S_1 C_1 & J_{yy}^{(1)} C_1^2 + J_{xx}^{(1)} S_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(1)} \end{bmatrix};$$

$${}^0J_{G_2} = {}^0R_{L_2} l_2 J_{G_2} {}^0R_{L_2}^T = \begin{bmatrix} J_{xx}^{(2)} C_{12}^2 + J_{yy}^{(2)} S_{12}^2 & (J_{xx}^{(2)} - J_{yy}^{(2)}) S_{12} C_{12} & 0 \\ (J_{xx}^{(2)} - J_{yy}^{(2)}) S_{12} C_{12} & J_{yy}^{(2)} C_{12}^2 + J_{xx}^{(2)} S_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(2)} \end{bmatrix};$$

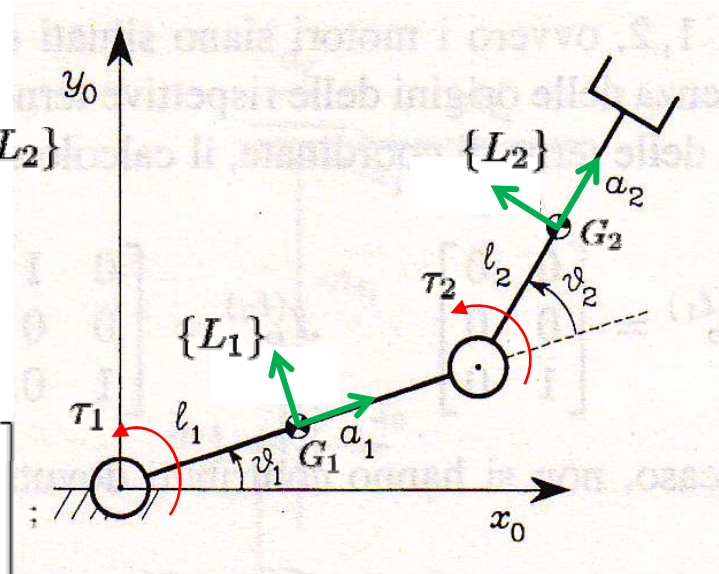
Contributi alla matrice d'inerzia $B(q)$ dei termini traslazionali e rotazionali:

$$B(q) = B_{P_1} + B_{P_2} + B_{O_1}(q) + B_{O_2}(q)$$

con

$$B_{P_1} = m_{l_1} J_{P_1}^T J_{P_1} = \begin{bmatrix} m_{l_1} l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{P_2} = m_{l_2} J_{P_2}^T J_{P_2} = \begin{bmatrix} m_{l_2} (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 C_2) & m_{l_2} l_2 (l_2 + a_1 C_2) \\ m_{l_2} l_2 (l_2 + a_1 C_2) & m_{l_2} l_2^2 \end{bmatrix};$$

$$B_{O_1} = J_{O_1}^T {}^0J_{G_1} J_{O_1} = \begin{bmatrix} J_{zz}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{O_2} = J_{O_2}^T {}^0J_{G_2} J_{O_2} = \begin{bmatrix} J_{zz}^{(2)} & J_{zz}^{(2)} \\ J_{zz}^{(2)} & J_{zz}^{(2)} \end{bmatrix};$$



Manipolatore planare RR

Quindi la matrice d'inerzia $B(q)$ risulta:

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(q_2) & b_{12}(q_2) \\ b_{21}(q_2) & b_{22} \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} b_{11}(q_2) &= J_{zz}^{(1)} + J_{zz}^{(2)} + m_{l_1} l_1^2 + m_{l_2} (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 C_2); \\ b_{12}(q_2) &= b_{21}(q_2) = J_{zz}^{(2)} + m_{l_2} l_2 (l_2 + a_1 C_2); \\ b_{22} &= J_{zz}^{(2)} + m_{l_2} l_2^2; \end{cases}$$

Le componenti di forze d'inerzia **tangenziali** sono semplicemente: $B(q)\ddot{q}$

Le componenti di forze d'inerzia **centrifughe** e di **Coriolis** si calcolano come: $C(q, \dot{q})\dot{q}$

dove:

$$[C]_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k;$$

ed i simboli di Christoffel sono ricavabili per derivazione dal tensore metrico $B(q)$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right];$$

Dai calcoli:

$$\Gamma_{11}^1 = 0; \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = h; \quad \Gamma_{22}^1 = h; \quad \text{con: } h \triangleq -m_{l_2} a_1 l_2 S_2;$$

$$\Gamma_{11}^2 = h; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0; \quad \Gamma_{22}^2 = 0;$$

La matrice $C(q, \dot{q})$ risulta quindi:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare RR

E' interessante notare che il vettore di forze centrifughe e di Coriolis $C(q, \dot{q})\dot{q}$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

è scrivibile anche nella forma che evidenzia esplicitam. la dipendenza dai s. di Christoffel

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \dot{q}^T \Gamma(q) \dot{q} = \dot{q}^T \begin{bmatrix} \Gamma^1(q) \\ \Gamma^2(q) \end{bmatrix} \dot{q}$$

ovvero in forma esplicita

$$\dot{q}^T \begin{bmatrix} \Gamma^1(q) \\ \Gamma^2(q) \end{bmatrix} \dot{q} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & h \\ h & h \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda infine il vettore del contributo gravitazionale si ha:

$$G = - (m_1 J_{P_1}^T {}^0g + m_2 J_{p_2}^T {}^0g); \quad {}^0g = [0 \quad -g \quad 0]^T$$

ed in forma esplicita quindi:

$$G = \begin{bmatrix} m_{l_1} g l_1 C_1 + m_{l_2} g (a_1 C_1 + l_2 C_{12}) \\ m_{l_2} g l_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

Il vettore delle coppie ai giunti risulta poi semplicemente:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare RR

Le eq.ni della dinamica risultano quindi:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

ovvero anche:

$$B(q)\ddot{q} + \dot{q}^T \Gamma(q)\dot{q} + G(q) = \tau$$

L'espressione esplicita, sulla base dei termini precedentemente ricavati, risulta:

$$\begin{cases} [J_{zz}^{(1)} + J_{zz}^{(2)} + m_{l_1} l_1^2 + m_{l_2} (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 C_2)] \ddot{q}_1 + [J_{zz}^{(2)} + m_{l_2} l_2 (l_2 + a_1 C_2)] \ddot{q}_2 \\ \quad - 2m_{l_2} a_1 l_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_{l_2} a_1 l_2 S_2 \dot{q}_2^2 + (m_{l_1} l_1 + m_{l_2} a_1) g C_1 + m_{l_2} l_2 g C_{12} = \tau_1 \\ [J_{zz}^{(2)} + m_{l_2} l_2 (l_2 + a_1 C_2)] \ddot{q}_1 + [J_{zz}^{(2)} + m_{l_2} l_2^2] \ddot{q}_2 + m_{l_2} a_1 l_2 S_2 \dot{q}_1^2 + m_{l_2} l_2 g C_{12} = \tau_2 \end{cases}$$

Osservazione: l'apice nel generico simbolo di Christoffel Γ_{jk}^i indica termini nella i -esima eq.ne del moto. Inoltre:

Γ_{jj}^i , pesa l'effetto di \dot{q}_j^2 sull'eq.ne del giunto i -esimo (termine centrifugo);

Γ_{jk}^i , pesa l'effetto di $\dot{q}_j \dot{q}_k$ sull'eq.ne del giunto i -esimo (termine di Coriolis).

Linearita' nei parametri dinamici

Abbiamo visto che le eq.ni della dinamica risultano :

$$\begin{cases} [J_{zz}^{(1)} + J_{zz}^{(2)} + m_{l_1}l_1^2 + m_{l_2}(a_1^2 + l_2^2 + 2a_1l_2C_2)]\ddot{q}_1 + [J_{zz}^{(2)} + m_{l_2}l_2(l_2 + a_1C_2)]\ddot{q}_2 \\ \quad - 2m_{l_2}a_1l_2S_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - m_{l_2}a_1l_2S_2\dot{q}_2^2 + (m_{l_1}l_1 + m_{l_2}a_1)gC_1 + m_{l_2}l_2gC_{12} = \tau_1 \\ [J_{zz}^{(2)} + m_{l_2}l_2(l_2 + a_1C_2)]\ddot{q}_1 + [J_{zz}^{(2)} + m_{l_2}l_2^2]\ddot{q}_2 + m_{l_2}a_1l_2S_2\dot{q}_1^2 + m_{l_2}l_2gC_{12} = \tau_2 \end{cases}$$

Scegliendo un opportuno insieme di parametri dinamici, ad es.

$$\begin{aligned} \pi_1 &= m_{l_1}; & \pi_2 &= m_{l_1}(l_1 - a_1); & \pi_3 &= J_{zz}^{(1)} + m_{l_1}(l_1 - a_1)^2; & \pi_5 &= m_{l_2}; \\ \pi_6 &= m_{l_2}(l_2 - a_2); & \pi_7 &= J_{zz}^{(2)} + m_{l_2}(l_2 - a_2)^2 \end{aligned}$$

che possono essere raccolti nel vettore $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_5 \ \pi_6 \ \pi_7]^T$,
 si possono riscrivere le eq.ni del moto in una forma che mette in evidenza la linearità nei
 parametri dinamici π_i . In generale se abbiamo n g.d.l. e p parametri dinamici
 (costanti), si ottiene la forma

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta)\pi, \quad Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad \pi = \mathbb{R}^{p \times 1}$$

dove $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta)$ viene detto "regressore", dipendente da q, \dot{q}, \ddot{q} e dai par. geometrici δ

Nell'esempio:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{15} & y_{16} & y_{17} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{25} & y_{26} & y_{27} \end{bmatrix}$$

Linearita' nei parametri dinamici

La fattorizzazione dell'equazioni del moto nel vettore dei parametri scelti

$$\pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_5 \quad \pi_6 \quad \pi_7]^T$$

porta a scrivere il regressore

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{15} & y_{16} & y_{17} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{25} & y_{26} & y_{27} \end{bmatrix}$$

le cui componenti risultano esplicitamente

$$y_{11} = a_1^2 \ddot{q}_1 + a_1 g C_1;$$

$$y_{12} = 2a_1 \ddot{q}_1 + g C_1;$$

$$y_{13} = \ddot{q}_1;$$

$$y_{15} = (a_1^2 + 2a_1 a_2 C_2 + a_2^2) \ddot{q}_1 + (a_1 a_2 C_2 + a_2^2) \ddot{q}_2 - 2a_1 a_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ - a_1 a_2 S_2 \dot{q}_2^2 + a_1 g C_1 + a_2 g C_{12};$$

$$y_{16} = (2a_1 C_2 + 2a_2) \ddot{q}_1 + (a_1 C_2 + 2a_2) \ddot{q}_2 - 2a_1 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - a_1 S_2 \dot{q}_2^2 + g C_{12};$$

$$y_{17} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2;$$

$$y_{21} = 0;$$

$$y_{22} = 0;$$

$$y_{23} = 0;$$

$$y_{25} = (a_1 a_2 C_2 + a_2^2) \ddot{q}_1 + a_2^2 \ddot{q}_2 + a_1 a_2 S_2 \dot{q}_1^2 + a_2 g C_{12};$$

$$y_{26} = (a_1 C_2 + 2a_2) \ddot{q}_1 + 2a_2 \ddot{q}_2 + a_1 S_2 \dot{q}_1^2 + g C_{12};$$

$$y_{27} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2;$$

Linearita' nei parametri dinamici (forma per controllo adattivo)

La forma delle eq.ni del moto lineare nei parametri dinamici può essere ricavata scrivendo il Lagrangiano come somma dei contributi di ciascun link all'energia cinetica e potenziale, già in forma lineare rispetto al vettore dei parametri dinamici (p.d.), ossia:

$$L = \sum_{j=1}^n \left(\beta_{T_j}^T - \beta_{U_j}^T \right) \pi_j$$

dove

$$\pi_j = [m_j \quad m_j^j l_{G_j x} \quad m_j^j l_{G_j y} \quad m_j^j l_{G_j z} \quad \bar{J}_{jxx} \quad \bar{J}_{jxy} \quad \bar{J}_{jxz} \quad \bar{J}_{jyy} \quad \bar{J}_{jyz} \quad \bar{J}_{jzz}]^T \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$$

$\beta_{T_j}, \beta_{U_j} \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$ vettori che consentono di scrivere il Lagrangiano in forma lin. in π_j

E' importante osservare che essi dipendono solo dalle var. giunto/veloc. giunto a monte rispetto al braccio a cui si riferiscono $\beta_{T_j} = \beta_{T_j}(q_1, \dots, q_j, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_j)$; $\beta_{U_j} = \beta_{U_j}(q_1, \dots, q_j)$ perciò nelle eq.ni di Lagrange (dove le derivate non alterano la linearità nei p.d.)

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n y_{ij}^T \pi_j; \quad \text{dove} \quad y_{ij} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta_{T_j}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \beta_{T_j}}{\partial q_i} + \frac{\partial \beta_{U_j}}{\partial q_i}$$

si ha: $y_{ij} = 0, \quad i > j$. Quindi la struttura delle eq.ni dinamiche col regressore risulta

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta) \pi \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^T & y_{12}^T & \cdots & y_{1n}^T \\ 0^T & y_{22}^T & \cdots & y_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^T & 0^T & \cdots & y_{nn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix}$$

Identificazione off-line dei parametri dinamici

La forma delle eq.ni dinamiche nel regressore

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta)\pi$$

risulta molto comoda per l'identificazione off-line dei parametri dinamici di un sistema. Supponendo di assegnare le leggi delle coppie ai giunti $\tau(t)$ e di misurare in corrispondenza di N istanti di tempo t_1, \dots, t_N le $q(t_i), \dot{q}(t_i), \ddot{q}(t_i)$, ($i = 1, \dots, N$), è noto il regressore $Y(t_i)$, ($i = 1, \dots, N$).

Pertanto si può scrivere:

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau(t_1) \\ \vdots \\ \tau(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(t_1) \\ \vdots \\ Y(t_N) \end{bmatrix} \pi = \bar{Y}\pi, \quad \bar{\tau} \in \mathbb{R}^{Nn}, \quad \bar{Y} \in \mathbb{R}^{Nn \times p}, \quad \pi \in \mathbb{R}^{p \times 1}, \quad Nn \gg p$$

La cui soluzione porta a determinare il vettore dei parametri dinamici incogniti come:

$$\pi = \bar{Y}^L \bar{\tau}$$

dove la $\bar{Y}^L = (\bar{Y}^T \bar{Y})^{-1} \bar{Y}^T$ è una inversa sinistra di \bar{Y} .

Eventuali problematiche legate alla non identificabilità di alcuni parametri dinamici a causa di: (1) assenza del loro contributo nelle eq.ni dinamiche; (2) loro presenza in combinazione lineare con altri; vanno identificate per ispezione diretta delle eq.ni o con impiego della SVD di \bar{Y} . In ogni caso le traiettorie debbono essere suff. ricche da consentire valutazione accurata par. identificabili, ossia avere $k_2(\bar{Y})$ "basso".

Metodo diretto per il calcolo della dinamica nel regressore

Data la linearità con cui i parametri dinamici (massa, momenti primi e secondi d'inerzia) appaiono nelle eq.ni del moto, si può senz'altro scrivere

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta)\pi, \quad Y \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad \pi \in \mathbb{R}^{r \times 1}$$

Ma come si possono scrivere le eq.ni del moto direttamente in questa forma, ossia senza applicare le classiche eq.ni di Lagrange e procedere successivamente a raccogliere (in qualche modo) nel regressore i coefficienti dei parametri dinamici?

L'idea base è la seguente: supponiamo di avere una catena seriale di n link e supponiamo che per specificare le proprietà inerziali del generico link i sia necessario un vettore $\pi^{(i)} \in \mathbb{R}^{r_i \times 1}$ di parametri dinamici. Allora dato che il Lagrangiano complessivo del sistema può essere scritto sommando il contributo di ogni link, si può scrivere

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = \sum_{i=1}^n (T^{(i)} - U^{(i)}) = \sum_{i=1}^n L^{(i)};$$

Allora anche le forze d'inerzia e conservative globali possono essere scritte sommando i contributi su ciascun link come segue

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right]^T = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L^{(i)}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L^{(i)}}{\partial q} \right]^T \triangleq \sum_{i=1}^n Y^{(i)} \pi^{(i)} = Y \pi, \quad Y^{(i)} \in \mathbb{R}^{n \times r_i}; \quad \pi^{(i)} \in \mathbb{R}^{r_i \times 1}$$

con: $Y = [Y^{(1)} \quad \dots \quad Y^{(n)}]; \quad Y \in \mathbb{R}^{n \times r}; \quad \pi^T = [\pi^{(1)T} \quad \dots \quad \pi^{(n)T}]^T; \quad \pi \in \mathbb{R}^{r \times 1}; \quad r = \sum_{i=1}^n r_i$

Metodo diretto per il calcolo della dinamica nel regressore

Si è quindi definito il blocco di regressore $Y^{(i)}$ e la porzione di parametri dinamici $\pi^{(i)}$ relativi al link i-esimo come segue:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L^{(i)}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L^{(i)}}{\partial q} \right]^T \triangleq Y^{(i)} \pi^{(i)}$$

La forma esplicita nella energie cinetica e potenziale risulta:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T^{(i)}}{\partial q} + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial q} \right]^T \triangleq Y^{(i)} \pi^{(i)}$$

L'energia cinetica del link i-esimo può essere scritta con Koenig:

$$T^{(i)} = T_{tr}^{(i)} + T_{rot}^{(i)} = \frac{1}{2} m_i {}^0 v_{c_i}^{T0} v_{c_i} + \frac{1}{2} {}^i \omega_i^{Ti} \mathcal{J}_{c_i} {}^i \omega_i$$

con: ${}^0 v_{c_i}$ (velocità del baricentro c_i del link i-esimo nel frame fisso $\{0\}$);

${}^i \omega_i$ (velocità angolare del link i-esimo nel frame di D.-H. $\{i\}$);

${}^i \mathcal{J}_{c_i}$ (tensore d'inerzia baricentrico del link i-esimo con componenti in $\{i\}$).

Allora impiegando le definizioni di Jacobiani nella convenzione di D.-H. si ha:

$${}^0 v_{c_i} = {}^0 v_i + {}^0 \omega_i \times {}^0 p_{i,c_i} = J_{v_i} \dot{q} + J_{\omega_i} \dot{q} \times {}^0 R_i p_{i,c_i}; \quad {}^i \omega_i = {}^0 R_i^{T0} \omega_i;$$

con: ${}^0 v_i = J_{v_i} \dot{q}$ (velocità in terna fissa dell'origine O_i del frame di D.-H. $\{i\}$);

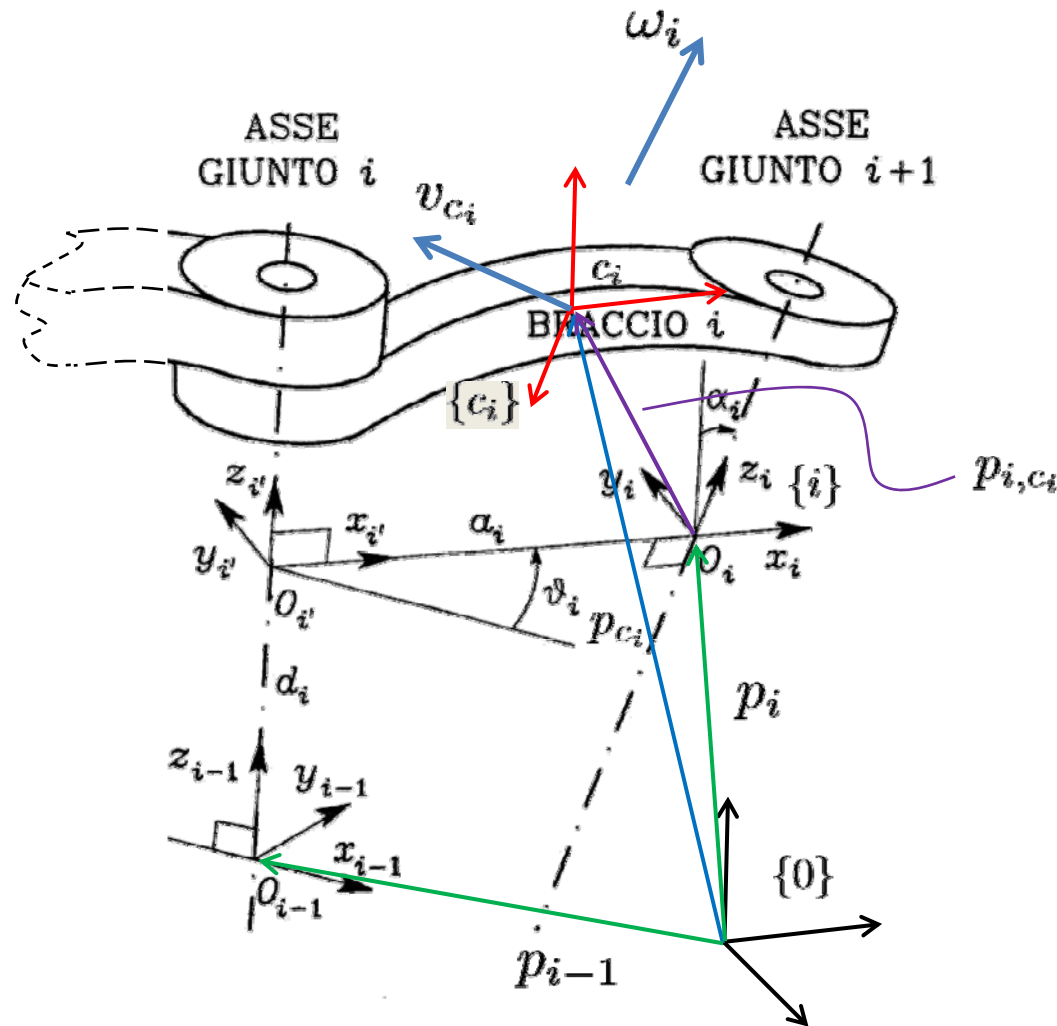
${}^0 \omega_i = J_{\omega_i} \dot{q}$ (velocità angolare in terna fissa del frame di D.-H. $\{i\}$);

${}^0 R_i$ (matrice di rotazione fra terna fissa e terna solidale al link i-esimo);

p_{i,c_i} (componenti in $\{i\}$ del vettore che collega O_i con c_i)

Definizione delle quantità necessarie per link i-esimo

Velocità del baricentro ed angolare del link i-esimo



$${}^0R_{i_i}(q) = {}^0R_i^i(q)R_{i_i}$$

Frame loc. baric. $\{c_i\}$

Frame loc. di D.-H. $\{i\}$

Frame fisso $\{0\}$

Comp. vel. ang. in frame $\{i\}$

$${}^i\omega_i = {}^0R_i^T {}^0\omega_i$$

Comp. di $c_i - O_i$ in frame $\{i\}$

$${}^i(c_i - O_i) = p_{i,c_i}$$

Legame fra velocità lineare ed angolare e velocità ai giunti:

$$\begin{cases} {}^0v_i &= J_{v_i}(q)\dot{q} \\ {}^0\omega_i &= J_{\omega_i}(q)\dot{q} \end{cases}$$

N.B. : stavolta il Jac. di posiz. è proprio quello di D.-H.

Trattamento della $T^{(i)}$ per derivazione in \dot{q}

$$T^{(i)} = T_{\text{tr}}^{(i)} + T_{\text{rot}}^{(i)}$$

Applicando la definizione si ha:

$$\begin{aligned} T_{\text{tr}}^{(i)} &= \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{c_i}^T \mathbf{v}_{c_i} \\ &= \frac{1}{2} m_i \left[\dot{q}^T J_{v_i}^T + (J_{\omega_i} \dot{q} \times {}^0 R_i p_{i,c_i})^T \right] \left[J_{v_i} \dot{q} + (J_{\omega_i} \dot{q} \times {}^0 R_i p_{i,c_i}) \right] \\ &= \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T \left[J_{v_i}^T J_{v_i} \right] \dot{q} - m_i \dot{q}^T \left[J_{v_i}^T S({}^0 R_i p_{i,c_i}) J_{\omega_i} \right] \dot{q} + \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T \left[J_{\omega_i}^T S^T({}^0 R_i p_{i,c_i}) S({}^0 R_i p_{i,c_i}) J_{\omega_i} \right] \dot{q} \end{aligned}$$

$$T_{\text{rot}}^{(i)} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[J_{\omega_i}^T {}^0 R_i {}^i \mathcal{J}_{c_i} {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \right] \dot{q}$$

Da cui, sommando e manipolando un poco le espressioni:

$$\begin{aligned} T^{(i)} &= \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T \left[J_{v_i}^T J_{v_i} \right] \dot{q} \\ &\quad - m_i \dot{q}^T \left[J_{v_i}^T S({}^0 R_i p_{i,c_i}) J_{\omega_i} \right] \dot{q} \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[J_{\omega_i}^T {}^0 R_i \left(\underbrace{{}^i \mathcal{J}_{c_i} + m_i S^T(p_{i,c_i}) S(p_{i,c_i})}_{{}^i \mathcal{J}_i} \right) {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \right] \dot{q} \end{aligned}$$

Calcolo del termine $\left[\frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} \right]^T$

Derivando la forma (comoda) appena calcolata e manipolandola un poco per mettere in evidenza (a destra) i parametri dinamici di ordine zero (massa) e di ordine uno si ottiene

$$\left[\frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} \right]^T = \{ J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{q} \} m_i + \left\{ \left[J_{v_i}^T S(J_{\omega_i} \dot{q}) - J_{\omega_i}^T S(J_{v_i} \dot{q}) \right]^0 R_i \right\} m_i p_{i,c_i} + J_{\omega_i}^T {}^0 R_i {}^i J_i {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \dot{q}$$

E' importante osservare che si riesce a mettere in evidenza in modo diretto i parametri dinamici di ordine zero ed ordine uno semplicemente manipolando in modo "classico" le espressioni, mentre non è immediato esplicitare gli elementi contenuti nel tensore di inerzia ${}^i J_i$ nel termine finale. Tuttavia scrivendo ${}^i J_i$, tensore simmetrico del 2° ordine con espressione esplicita

$${}^i J_i = \begin{bmatrix} \bar{J}_{xx} & -\bar{J}_{xy} & -\bar{J}_{xz} \\ -\bar{J}_{xy} & -\bar{J}_{yy} & -\bar{J}_{yz} \\ -\bar{J}_{xz} & -\bar{J}_{yz} & \bar{J}_{zz} \end{bmatrix}$$

come prodotto interno di un tensore E del 3° ordine che ne porta le informazioni sulla struttura ed il vettore $\pi_2^{(i)}$ con

$$\pi_2^{(i)T} = [\bar{J}_{xx} \quad \bar{J}_{xy} \quad \bar{J}_{xz} \quad \bar{J}_{yy} \quad \bar{J}_{yz} \quad \bar{J}_{zz}]$$

si scrive

$${}^i J_i = E \pi_2^{(i)}; \quad E \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 6}$$

cosicché l'ultimo termine può essere reso lin. in $\pi_2^{(i)}$: $\left\{ J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \dot{q} \right\} \pi_2^{(i)}$

Calcolo del termine $\left[\frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} \right]^T$

Allora il termine sopra può essere scritto come:

$$\left[\frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} \right]^T = X_0^{(i)} \pi_0^{(i)} + X_1^{(i)} \pi_1^{(i)} + X_2^{(i)} \pi_2^{(i)}$$

dove si sono definite le seguenti quantità relative al link i -esimo:

- Momenti d'inerzia di ordine zero, uno e due:

$$\pi_0^{(i)} \triangleq m_i; \quad \pi_1^{(i)} \triangleq m_i p_{i,c_i}; \quad \pi_2^{(i)T} = [\bar{J}_{xx} \quad \bar{J}_{xy} \quad \bar{J}_{xz} \quad \bar{J}_{yy} \quad \bar{J}_{yz} \quad \bar{J}_{zz}];$$

- Quantità le cui derivate temporali contribuiscono al regressore:

$$X_0^{(i)} \triangleq J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{q};$$

$$X_1^{(i)} \triangleq \left[J_{v_i}^T S(J_{\omega_i} \dot{q}) - J_{\omega_i}^T S(J_{v_i} \dot{q}) \right]^0 R_i;$$

$$X_2^{(i)} \triangleq J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \dot{q};$$

Calcolo del termine $\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} \right) \right]^T$

Il primo termine nelle equazioni di Lagrange può essere scritto come segue:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} \right]^T = \dot{X}_0^{(i)} \pi_0^{(i)} + \dot{X}_1^{(i)} \pi_1^{(i)} + \dot{X}_2^{(i)} \pi_2^{(i)}$$

dove i parametri dinamici sono quelli definiti in precedenza e le derivate temporali

$$\dot{X}_0^{(i)} = \frac{dX_0^{(i)}}{dt};$$

$$\dot{X}_1^{(i)} = \frac{dX_1^{(i)}}{dt};$$

$$\dot{X}_2^{(i)} = \frac{dX_2^{(i)}}{dt};$$

possono essere calcolate in modo automatico con l'ausilio di un software di calcolo simbolico come Mathematica o Maple.

Trattamento della $T^{(i)}$ per derivazione in q

L'energia cinetica totale del link i -esimo calcolata precedentemente, di cui ricordiamo l'espressione esplicita

$$\begin{aligned}
 T^{(i)} = & \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T \left[J_{v_i}^T J_{v_i} \right] \dot{q} \\
 & - m_i \dot{q}^T \left[J_{v_i}^T S({}^0 R_i p_{i,c_i}) J_{\omega_i} \right] \dot{q} \\
 & + \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[J_{\omega_i}^T {}^0 R_i \left(\underbrace{{}^i \mathcal{J}_{c_i} + m_i S^T(p_{i,c_i}) S(p_{i,c_i})}_{{}^i \mathcal{J}_i} \right) {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \right] \dot{q}
 \end{aligned}$$

può essere riscritta nel modo equivalente di seguito riportato che meglio si presta alla successiva derivazione rispetto a q e ne mette in evidenza la dipendenza lineare dai parametri dinamici già introdotti

$$\begin{aligned}
 T^{(i)} = & \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[J_{v_i}^T J_{v_i} \right] \dot{q} \right\} \pi_0^{(i)} \\
 & + (\pi_1^{(i)})^T \left\{ {}^0 R_i^T S^T(J_{\omega_i} \dot{q}) J_{v_i} \dot{q} \right\} \\
 & + (\pi_2^{(i)})^T \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \right] \dot{q} \right\}
 \end{aligned}$$

Calcolo del termine $\left[\frac{\partial T^{(i)}}{\partial q} \right]^T$

Allora il termine sopra può essere scritto come:

$$\boxed{\left[\frac{\partial T^{(i)}}{\partial q} \right]^T = W_0^{(i)} \pi_0^{(i)} + W_1^{(i)} \pi_1^{(i)} + W_2^{(i)} \pi_2^{(i)}}$$

dove si definiscono le seguenti quantità calcolabili in modo sistematico

$$W_0^{(i)} \triangleq \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} \left[\dot{q}^T (J_{v_i}^T J_{v_i}) \dot{q} \right] \right\}^T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (J_{v_i}^T J_{v_i}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} (J_{v_i}^T J_{v_i}) \end{bmatrix} \dot{q};$$

$$W_1^{(i)} \triangleq \left\{ \frac{\partial}{\partial q} \left[{}^0 R_i^T S^T (J_{\omega_i} \dot{q}) J_{v_i} \dot{q} \right] \right\}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} [{}^0 R_i^T S^T (J_{\omega_i} \dot{q}) J_{v_i} \dot{q}] \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} [{}^0 R_i^T S^T (J_{\omega_i} \dot{q}) J_{v_i} \dot{q}] \end{bmatrix};$$

$$W_2^{(i)} \triangleq \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} \left[\dot{q}^T (J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E {}^0 R_i^T J_{\omega_i}) \dot{q} \right] \right\}^T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} [(J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E {}^0 R_i^T J_{\omega_i})] \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} [(J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E {}^0 R_i^T J_{\omega_i})] \end{bmatrix} \dot{q};$$

Trattamento della $U^{(i)}$ per derivazione in q

L'energia potenziale del link i -esimo può essere scritta esprimendo il vettore posizione del baricentro c_i passando attraverso l'origine del frame di D.-H. del medesimo link, per cui si può scrivere

$$U^{(i)} = -m_i g^T \left({}^0 p_i + {}^0 R_i p_{i,c_i} \right) = -m_i g^T {}^0 p_i - m_i p_{i,c_i}^T {}^0 R_i^T g$$

Derivando rispetto alla configurazione q e ricordandosi che $J_{v_i} = \frac{\partial {}^0 p_i}{\partial q}$ si ottiene

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial q} = -m_i g^T \frac{\partial {}^0 p_i}{\partial q} - m_i p_{i,c_i}^T \frac{\partial ({}^0 R_i^T g)}{\partial q} = -g^T J_{v_i} \pi_0^{(i)} - \pi_1^{(i)T} \frac{\partial ({}^0 R_i^T g)}{\partial q}$$

da cui trasponendo

$$\boxed{\left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial q} \right]^T = Z_0^{(i)} \pi_0^{(i)} + Z_1^{(i)} \pi_1^{(i)}}$$

dove si sono definite le quantità calcolabili sistematicamente tramite software simbolico

$$Z_0^{(i)} \triangleq -J_{v_i}^T g;$$

$$Z_1^{(i)} \triangleq - \left[\frac{\partial (g^T {}^0 R_i)}{\partial q} \right]^T = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (g^T {}^0 R_i) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} (g^T {}^0 R_i) \end{bmatrix}$$

Porzione delle equazioni di moto dipendente dal link i-esimo

Riportiamo la definizione della porzione di equazioni di Lagrange per il link i-esimo

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T^{(i)}}{\partial q} + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial q} \right]^T \triangleq Y^{(i)} \pi^{(i)} = \begin{bmatrix} Y_0^{(i)} & Y_1^{(i)} & Y_2^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0^{(i)} \\ \pi_1^{(i)} \\ \pi_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

dove le colonne del regressore parziale per il link i-esimo $Y^{(i)}$ sono state nominate in riferimento all'ordine dei momenti di inerzia che vanno a moltiplicare.

In base alle definizioni testé fornite ed alle elaborazioni precedenti si può procedere ad un calcolo diretto del regressore per il link i-esimo mediante le formule

$$Y_0^{(i)} \triangleq \dot{X}_0^{(i)} - W_0^{(i)} + Z_0^{(i)};$$

$$Y_1^{(i)} \triangleq \dot{X}_1^{(i)} - W_1^{(i)} + Z_1^{(i)};$$

$$Y_2^{(i)} \triangleq \dot{X}_2^{(i)} - W_2^{(i)};$$

Il procedimento può essere ripetuto calcolando $Y^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ per ciascun link e costruendo poi il regressore completo $Y = [Y^{(1)} \dots Y^{(n)}]$ giustappondendo i regressori parziali in colonna come già visto. In questo modo il vettore dei parametri dinamici di ciascun link ha dimensione 10 (1+3+6) con componenti esplicite:

$$\pi_0^{(i)} \triangleq m_i; \quad \pi_1^{(i)} \triangleq m_i p_{i,c_i}; \quad \pi_2^{(i)T} = [\bar{J}_{xx} \quad \bar{J}_{xy} \quad \bar{J}_{xz} \quad \bar{J}_{yy} \quad \bar{J}_{yz} \quad \bar{J}_{zz}];$$

Applicazione: calcolo della dinamica nel regressore per RR planare

Consideriamo il manipolatore planare RR in figura

Configurazione: $q = [q_1 \quad q_2]^T = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$

Parametri dinamici:

- Link 1:

- ordine 0: $\pi_0^{(1)} = m_{l_1}$;

- ordine 1: $\pi_1^{(1)T} = m_{l_1} [(l_1 - a_1) \quad 0 \quad 0]$;

- ordine 2: $\pi_2^{(1)T} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{xx}^{(1)} & \bar{J}_{xy}^{(1)} & \bar{J}_{xz}^{(1)} & \bar{J}_{yy}^{(1)} & \bar{J}_{yz}^{(1)} & J_{zz}^{(1)} + m_{l_1}(a_1 - l_1)^2 \end{bmatrix}$;

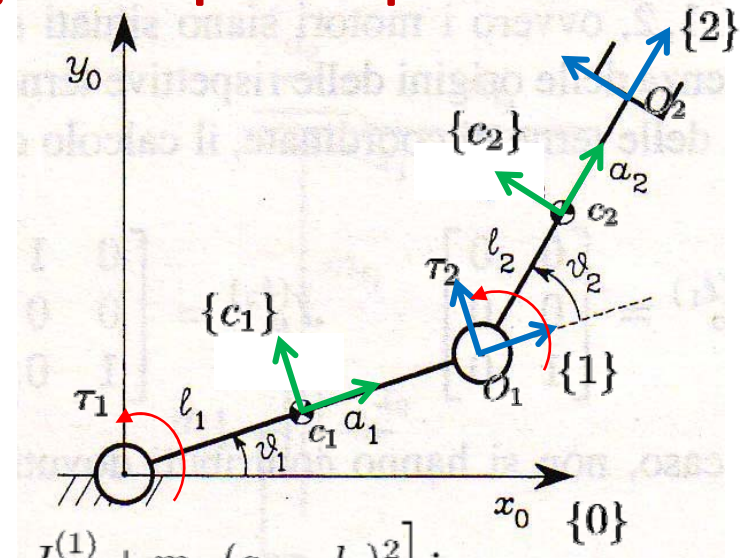
- Link 2:

- ordine 0: $\pi_0^{(2)} = m_{l_2}$;

- ordine 1: $\pi_1^{(2)T} = m_{l_2} [(l_2 - a_2) \quad 0 \quad 0]$;

- ordine 2: $\pi_2^{(2)T} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{xx}^{(2)} & \bar{J}_{xy}^{(2)} & \bar{J}_{xz}^{(2)} & \bar{J}_{yy}^{(2)} & \bar{J}_{yz}^{(2)} & J_{zz}^{(2)} + m_{l_2}(a_2 - l_2)^2 \end{bmatrix}$;

In questo caso, a causa della struttura del manipolatore, nelle equazioni della dinamica compariranno solo le componenti in posizione (1) dei momenti primi di inerzia e le componenti in posizione (6) dei momenti secondi di inerzia.



Applicazione: calcolo della dinamica nel regressore per RR planare

Consideriamo il manipolatore planare RR in figura

Configurazione: $q = [q_1 \ q_2]^T = [\theta_1 \ \theta_2]^T$

Il calcolo dei Jacobiani di posizione (veloc. lineare) e di orientazione (veloc. angolare) dalla convenzione di Denavit-Hartenberg porta a scrivere:

Link 1:

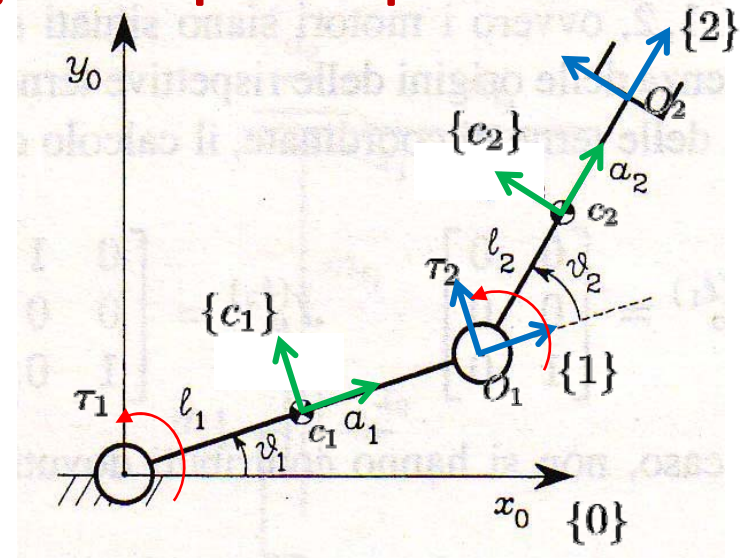
$${}^0v_1 = J_{v_1}(q)\dot{q}; \quad J_{v_1}(q) = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 & 0 \\ a_1 C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$${}^0\omega_1 = J_{\omega_1}(q)\dot{q}; \quad J_{\omega_1}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

Link 2:

$${}^0v_2 = J_{v_2}(q)\dot{q}; \quad J_{v_2}(q) = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - a_2 S_{12} & -a_2 S_{12} \\ a_1 C_1 + a_2 C_{12} & a_2 C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$${}^0\omega_2 = J_{\omega_2}(q)\dot{q}; \quad J_{\omega_2}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$



Applicazione: calcolo della dinamica nel regressore per RR planare

Consideriamo il manipolatore planare RR in figura

Configurazione: $q = [q_1 \ q_2]^T = [\theta_1 \ \theta_2]^T$

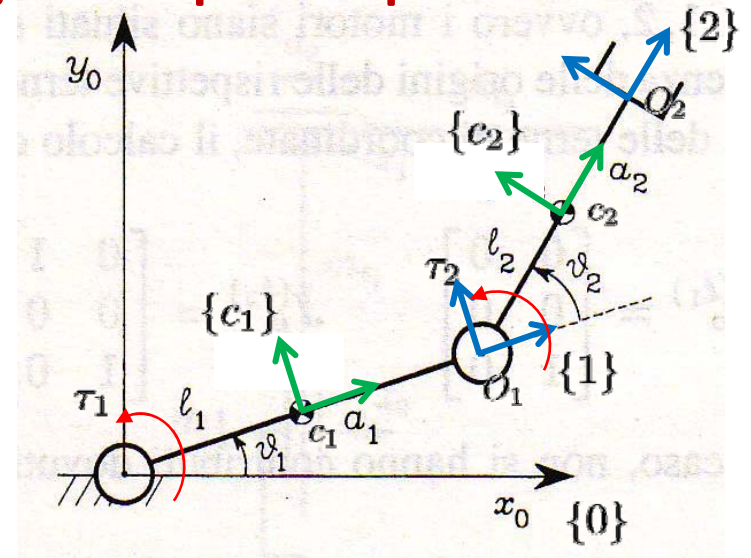
Le matrici di orientazione per i due link sono:

Link 1:

$${}^0R_1(q) = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Link 2:

$${}^0R_2(q) = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$



Applicazione: calcolo della dinamica nel regressore per RR planare

Calcolo delle quantità che contribuiscono alla porzione di regressore relat. a **link 1** $Y^{(1)}$:

-Termini da: $d_t \partial_{\dot{q}} T^{(1)}$

$$X_0^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1^2 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{X}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1^2 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 2a_1 \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{X}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 2a_1 \ddot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{q}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{X}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{q}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Termini da: $\partial_q T^{(1)}$

$$W_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad W_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad W_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Termini da: $\partial_q U^{(1)}$

$$Z_0^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1 g C_1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$Z_1^{(1)} = \begin{bmatrix} g C_1 & -g S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Applicazione: calcolo della dinamica nel regressore per RR planare

Blocco di regressore relativo a **link 1** $Y^{(1)}$:

$$Y_0^{(1)} \triangleq \dot{X}_0^{(1)} - W_0^{(1)} + Z_0^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1(gC_1 + a_1\ddot{q}_1) \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$Y_1^{(1)} \triangleq \dot{X}_1^{(1)} - W_1^{(1)} + Z_1^{(1)} = \begin{bmatrix} gC_1 + 2a_1\ddot{q}_1 & -gS_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$Y_2^{(1)} \triangleq \dot{X}_2^{(1)} - W_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{q}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Il blocco di regressore relativo al **link 1** $Y^{(1)}$ risulta quindi:

$$Y^{(1)} = \begin{bmatrix} Y_0^{(1)} & Y_1^{(1)} & Y_2^{(1)} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_1(gC_1 + a_1\ddot{q}_1) & gC_1 + 2a_1\ddot{q}_1 & -gS_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{q}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Una versione ridotta (reduced) in cui vengono selezionate solo le colonne non nulle o che moltiplicano solo elementi non nulli del vettore dei parametri dinamici risulta:

$$Y_{\text{red}}^{(1)} = Y^{(1)}(1, 2, 10) = \begin{bmatrix} a_1(gC_1 + a_1\ddot{q}_1) & gC_1 + 2a_1\ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Il corrispondente vettore dei par. din. ridotto risulta:

$$\pi_{\text{red}}^{(1)T} = \pi^{(1)}(1, 2, 10)^T = \begin{bmatrix} m_{l_1} & m_{l_1}(l_1 - a_1) & J_{zz}^{(1)} + m_{l_1}(a_1 - l_1)^2 \end{bmatrix};$$

Applicazione: calcolo della dinamica nel regressore per RR planare

Calcolo delle quantità che contribuiscono alla porzione di regressore relat. a **link 2** $Y^{(2)}$:

-Termini da: $d_t \partial_{\dot{q}} T^{(2)}$

$$X_0^{(2)} = \begin{bmatrix} (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2C_2\dot{q}_2)\dot{q}_1 + a_2(a_2 + a_1C_2)\dot{q}_2 \\ a_2[(a_2 + a_1C_2)\dot{q}_1 + a_2\dot{q}_2] \end{bmatrix}; \quad \dot{X}_0^{(2)} = d_t X_0^{(2)};$$

$$X_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 2(a_2 + a_1C_2)\dot{q}_1 + (2a_2 + a_1C_2)\dot{q}_2 & -a_1S_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ (2a_2 + a_1C_2)\dot{q}_1 + 2a_2\dot{q}_2 & -a_1S_2\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{X}_1^{(2)} = d_t X_1^{(2)};$$

$$X_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}; \quad \dot{X}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix};$$

- Termini da: $\partial_q T^{(2)}$

$$W_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_1a_2S_2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix};$$

$$W_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_1S_2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & -a_1C_2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \end{bmatrix};$$

$$W_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Termini da: $\partial_q U^{(2)}$

$$Z_0^{(2)} = \begin{bmatrix} g(a_1C_1 + a_2C_{12}) \\ ga_2C_{12} \end{bmatrix}; \quad Z_1^{(2)} = \begin{bmatrix} gC_{12} & -gS_{12} & 0 \\ gC_{12} & -gS_{12} & 0 \end{bmatrix};$$

Applicazione: calcolo della dinamica nel regressore per RR planare

Blocco di regressore relativo al **link 2** $Y^{(2)}$:

$$Y_0^{(2)} \triangleq \dot{X}_0^{(2)} - W_0^{(2)} + Z_0^{(2)} = \begin{bmatrix} g(a_1 C_1 + a_2 C_{12}) - 2a_1 a_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - a_1 a_2 S_2 \dot{q}_2^2 + (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 C_2) \ddot{q}_1 + a_2(a_2 + a_1 C_2) \ddot{q}_2 \\ a_2(g C_{12} + a_1 S_2 \dot{q}_1^2 + (a_2 + a_1 C_2) \ddot{q}_1 + a_2 \ddot{q}_2) \end{bmatrix};$$

$$Y_1^{(2)} \triangleq \dot{X}_1^{(2)} - W_1^{(2)} + Z_1^{(2)} = \begin{bmatrix} Y_1^{(2)}(1) & Y_1^{(2)}(2) & Y_1^{(2)}(3) \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} Y_1^{(2)}(1) = \begin{bmatrix} g C_{12} - 2a_1 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - a_1 S_2 \dot{q}_2^2 + 2(a_2 + a_1 C_2) \ddot{q}_1 + (2a_2 + a_1 C_2) \ddot{q}_2 \\ g C_{12} + a_1 S_2 \dot{q}_1^2 + (2a_2 + a_1 C_2) \ddot{q}_1 + 2a_2 \ddot{q}_2 \end{bmatrix}; \\ Y_1^{(2)}(2) = \begin{bmatrix} -g S_{12} - a_1 C_2 \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - a_1 S_2 (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ -g S_{12} + a_1 C_2 \dot{q}_1^2 - a_1 S_2 \ddot{q}_1 \end{bmatrix}; \\ Y_1^{(2)}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{cases}$$

$$Y_2^{(2)} \triangleq \dot{X}_2^{(2)} - W_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix};$$

Da cui risulta comodo selezionare colonne non nulle/ che multipl. elem. non nulli di $\pi^{(2)}$

$$Y_{\text{red}}^{(2)} = Y^{(2)}(1, 2, 10);$$

Il corrispondente vettore dei parametri dinamici risulta:

$$\pi_{\text{red}}^{(2)T} = \pi^{(2)}(1, 2, 10)^T = \begin{bmatrix} m_{l_2} & m_{l_2}(l_2 - a_2) & J_{zz}^{(2)} + m_{l_2}(a_2 - l_2)^2 \end{bmatrix};$$

Applicazione: calcolo della dinamica nel regressore per RR planare

La dinamica del sistema completo risulta quindi descritta dalle eq.ni:

$$\begin{bmatrix} Y_{\text{red}}^{(1)} & Y_{\text{red}}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{\text{red}}^{(1)} \\ \pi_{\text{red}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

In accordo con le espressioni della trasparenza 44 di questa pres. ed i risultati in Sciavicco-Siciliano, pp. 156-157.

I risultati dei calcoli qui riportati sono stati sviluppati in modo automatico mediante uno script in linguaggio Mathematica.