

Cinematica e statica dei manipolatori paralleli

Robotica I

Antonio Bicchi, Marco Gabiccini



A.A. 2008/2009 Laurea Specialistica in
Ingegneria dell'Automazione

Catene cinematiche chiuse - esempi

- Bracci con strutture cinematiche miste

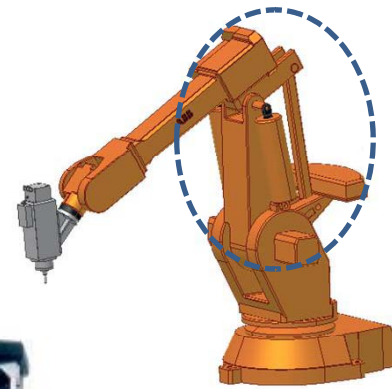
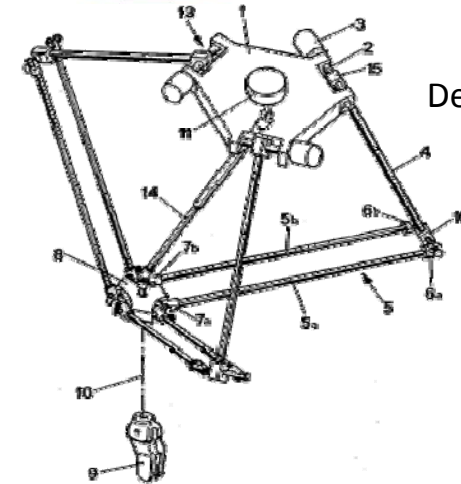


ABB Hybrid arm

- Manipolatori paralleli



Stewart-Gough platform



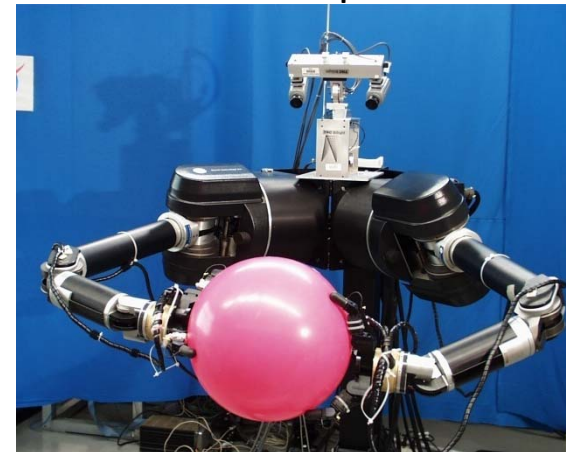
Delta Robot

- Mani per robot



Multifingered
hand with rolling
contact

- Bracci seriali cooperanti



Cooperating arms

Catene cinematiche chiuse - esempi

- Bracci con sostegno



CanadArm - NASA

- Veicoli su gambe



Walking robot

Caratteristiche principali:

- le configurazioni dei giunti non possono essere assegnate arbitrariamente – esistono vincoli che esprimono chiusura della catena cinematica;
- tipicamente, non tutti i giunti sono attuati né tutti sono sensorizzati

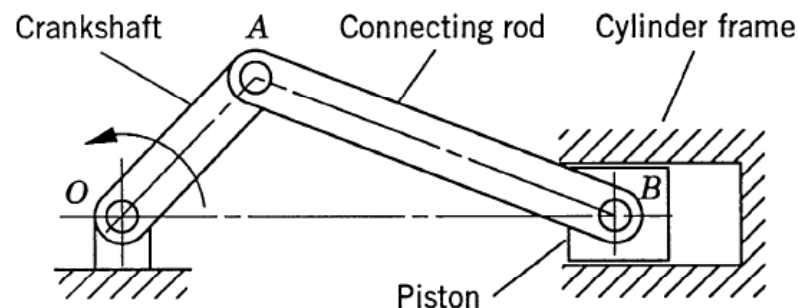
Configurazione e configurazione minima

Si dice *variabile di configurazione*, o brevemente *configurazione*, di un sistema meccanico parallelo con corpi rigidi una n -pla $q \in \mathbb{R}^n$ di grandezze sufficienti ad individuare univocamente posizione ed orientazione di tutti i corpi che lo compongono.

Una configurazione si dice *minima* se non esiste alcun insieme composto da un numero inferiore di grandezze scalari che sia una configurazione. Il numero m di variabili strettamente necessario a determinare tutte le posiz./orientazioni del sistema si dice numero di configurazioni indipendenti o gradi di libertà.

L'insieme dei valori ammissibili per le variabili di configurazione $q \in \mathbb{R}^n$ è dunque un sottoinsieme di dimensione m nello spazio $\mathbb{R}^n$.

Esempio:



Calcolo della dimensione della configurazione minima

Il calcolo della dimensione m della configurazione minima di un sistema meccanico tenendo conto dei gradi di vincolo imposti dai giunti che collegano i corpi rigidi può essere effettuato mediante le **formule di Grübler**.

Per sistemi 2D: $m \geq 3b - 2(p + r)$

Per sistemi 3D: $m \geq 6b - 5(p + r) - 3s$

dove: b no. di corpi rigidi (escluso il telaio o base) - bodies;

p no. di coppie prismatiche (prismatic joints);

r no. di coppie rotoidali (revolute joints);

s no. di coppie sferiche (ball-in-socket).

Generalmente vale il segno di uguaglianza, eccettuato configurazioni appartenenti a sottoinsiemi di misura nulla nello spazio delle configurazioni che corrispondono a configurazioni singolari: ecco perché a rigore si impiega il $\geq$.

Generalmente, per motivi di economia, i meccanismi hanno spesso un numero di giunti attuati n_A e sensorizzati n_S pari ad m , ossia: $n_A = n_S = m$.

Se poi: $n_A > m$ si ha ridondanza di attuatori (vale analogo per i sensori)

$n_A < m$ il sistema è sottoattuato.

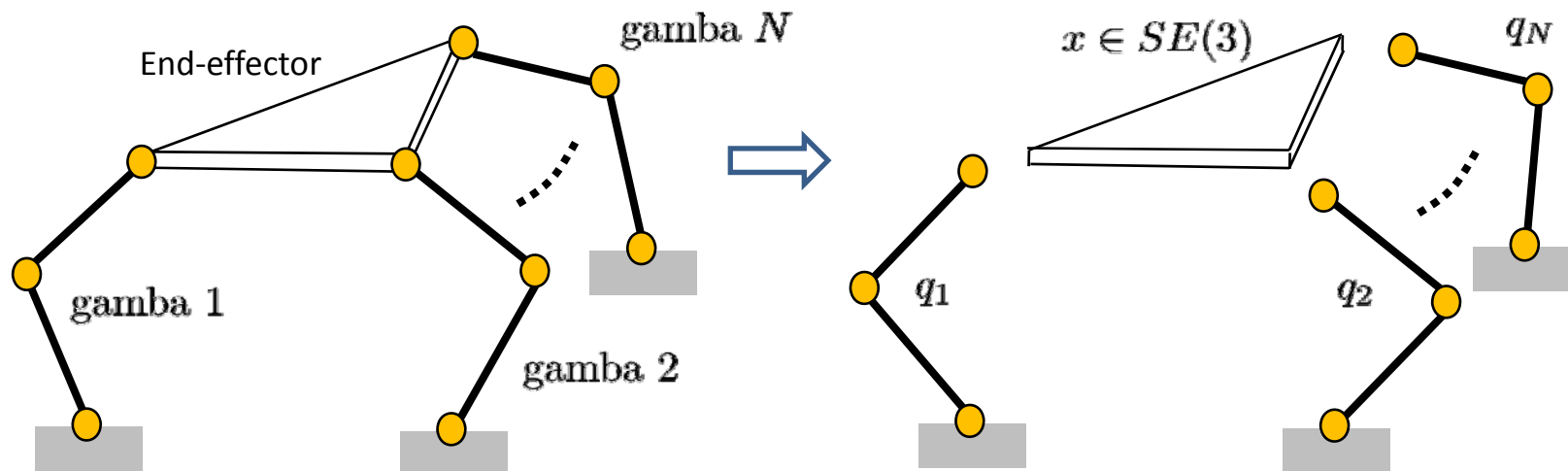
Geometria delle catene chiuse

Come nel caso delle catene seriali, individuiamo un elemento di riferimento che chiameremo convenzionalmente end-effector (o coupler) che, una volta rimosso, riduce il sistema ad un insieme N di catene cinematiche seriali (catena chiusa semplice).

- configurazioni dell'end-effector espresse da $x \in SE(3)$, dove la parametrizzazione locale di $SE(3)$ sarà da scegliere secondo opportunità;
- configurazione dei giunti $q \in \mathbb{R}^n$.

Nota che le $q = [q_1^T \ \dots \ q_N^T]^T$ con le $q_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ e numero totale dato da:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_N = \sum_{i=1}^N n_i$$



Geometria delle catene chiuse

Spesso converrà anche partizionare le coordinate ai giunti non tanto sulla base della gamba a cui si riferiscono ma piuttosto in base al fatto che sono attuate o meno, sensorizzate o meno.

Dunque possiamo distinguerle in:

$$q_A \in \mathbb{R}^{n_A}, \quad q_A = S_A q;$$

$$q_{\bar{A}} \in \mathbb{R}^{n_{\bar{A}}}, \quad q_{\bar{A}} = S_{\bar{A}} q$$

dove $n_A + n_{\bar{A}} = n$ e le matrici $S_A \in \mathbb{R}^{n_A \times n}$ e $S_{\bar{A}} \in \mathbb{R}^{n_{\bar{A}} \times n}$ hanno elementi $\in \{0, 1\}$.

La matrice a blocchi

$$S = \begin{bmatrix} S_A \\ S_{\bar{A}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

è una matrice di permutazione. Analogamente con $n_S + n_{\bar{S}} = n$ si ha:

$$q_S \in \mathbb{R}^{n_S}, \quad q_S = S_S q; \quad S_S \in \mathbb{R}^{n_S \times n}$$

$$q_{\bar{S}} \in \mathbb{R}^{n_{\bar{S}}}, \quad q_{\bar{S}} = S_{\bar{S}} q \quad S_{\bar{S}} \in \mathbb{R}^{n_{\bar{S}} \times n}$$

Equazioni di chiusura della catene cinematiche

Per scrivere le equazioni di chiusura della catena cinematica si opera come segue:

- 1) Per rappresentare le configurazioni del sistema si introduce una n -pla $q \in Q \subset \mathbb{R}^n$ di valori delle coordinate di giunto delle N gambe del parallelo. Tali coords possono essere angoli per giunti R, ed elongazioni per giunti P.

- 2) Per rappresentare la postura dell'end-effector si introduce una parametrizzazione locale $x \in SE(3)$ a cui è associata, rispetto ad un opportuno riferimento, la matrice omogenea

$$T_E(x) = \left[\begin{array}{c|c} R_E(x) & p_E(x) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

- 3) Si apre la catena cinematica effettuando un numero di "tagli" su e.-e. sufficienti per svincolare l'end-effector dalle gambe e si associa alla sezione di taglio pensata appartenente a ciascuna gamba, la cui configurazione è descritta dal sottoinsieme di variabili di giunto $q_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, la matrice

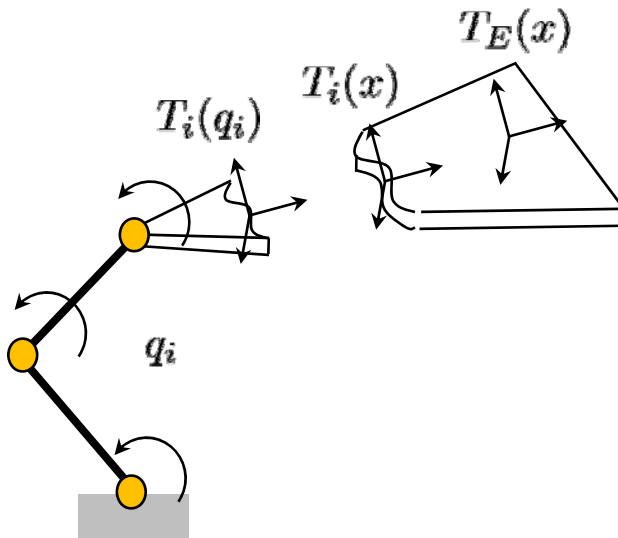
$$T_i(q_i) = \left[\begin{array}{c|c} R_i(q_i) & p_i(q_i) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

- 4) Si costruiscono le matrici $T_i(x) = T_E(x)^E T_i$ che esprimono la trasformazione che in funzione di x esprime la postura della sezione in cui è stato effettuato il taglio pensata appartenente all'end-effector. Le ${}^E T_i$, $i = 1, \dots, N$ sono costanti.

Equazioni di chiusura della catene cinematiche

- 5) I vincoli rimossi con i N tagli vengono ripristinati imponendo un vincolo di solidarietà fra le due parti dello stesso corpo rigido mediante le $6N$ eq.ni

$$T_i(q_i) = T_i(x), \quad i = 1, \dots, N$$



$T_E(x)$ postura frame di riferimento su e.-e.

$T_E(x)$ postura frame di riferimento su sezione del taglio solidale all'e.-e.

$T_i(q_i)$ postura frame di riferimento su sezione del taglio solidale alla gamba i-esima

${}^E T_i :$ $T_i(x) = T_E(x) {}^E T_i$ postura del frame di riferimento sulla sezione del taglio rispetto al frame sull'e.-e.
N.B. sono trasformazioni costanti ed in terna e.-e.

Tagli in corrispondenza dei giunti fra gambe ed e.-e.

Se i tagli che svincolano l'end-effector dalle N gambe vengono operati in corrispondenza dei giunti che li collegano, si opera come segue:

- se il giunto è sferico, si dovrà imporre solo che:

$$p_i(q_i) = p_i(x) \quad 3 \text{ eq.ni scalari indep.}$$

- se il giunto è rotoidale R, si dovrà imporre che

$$p_i(q_i) = p_i(x)$$

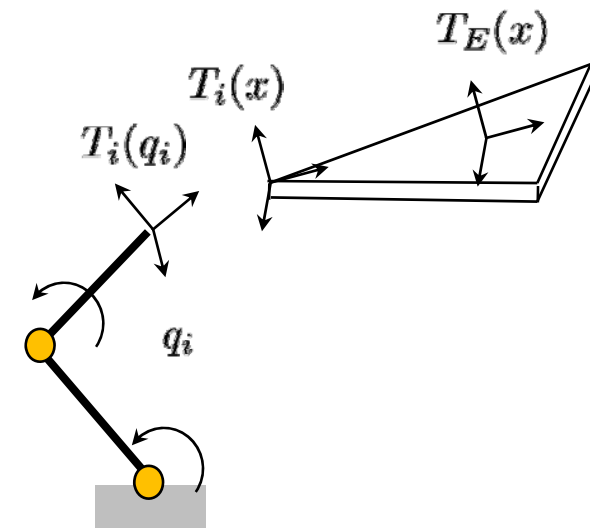
$$z_i(q_i) = z_i(x) \quad \text{tot. 5 eq.ni scalari indep.}$$

se l'asse del giunto coincideva con il terzo asse.

- se il giunto è prismatico P ed ha asse coincidente con il terzo asse dei due frames, si dovrà imporre che

$$R_i(q_i) = R_i(x)$$

$$(p_i(q_i) - p_i(x))^T x_i = (p_i(q_i) - p_i(x))^T y_i = 0 \quad \text{tot. 5 eq.ni scalari indep.}$$



Osservazione: con tagli sui giunti il vettore q_i non contiene le variabili che esprimono la postura della sezione dell'e.-e. rispetto alla gamba i-esima. Le equazioni che si scrivono in questo caso contengono perciò meno variabili e sono perciò meno complesse.

Cinematica diretta

Il problema **geometrico diretto** per i sistemi in catena chiusa ha la formulazione:

$$\Lambda : Q_S \rightarrow SE(3) \\ q_S \mapsto \Lambda(q) = x \in SE(3)$$

dove Q_S è l'insieme dei valori che possono essere assunti dalle configurazioni dei giunti sensorizzati.

- Nel caso in cui fosse $Q = Q_S$, ossia si disponesse di sensori su ogni giunto, o anche nel caso in cui anche solo una delle gambe avesse tutti i suoi giunti sensorizzati (anche quello che la collega all'e.-e.), il problema cinematico diretto si esaurirebbe nello scrivere la cin. diretta $T_i(q_i)$ per la gamba i-esima e ricavare mediante prodotto di matrici note:

$$T_i(q_i) = T_E^E T_i \rightarrow T_E = T_i(q_i) ({}^E T_i)^{-1} \rightarrow x$$

- Nel caso (usuale) in cui nessuna delle gambe è completamente sensorizzata, il pb cin. diretto è difficile poiché occorre determinare oltre che la postura incognita x dell'e.-e., anche i valori delle variabili non sensorizzate $q_{\bar{S}}$. Ciò significa risolvere (nel caso di vincoli di solidarietà) il sistema

$$T_i(q_S, q_{\bar{S}}) - T_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

che risulta di $6N$ equazioni nelle $6 + n - n_S$. Risolubile se $6 + (n - n_S) = 6N$.

Natura equazioni: trigonometrica, non lineare. No semplificazioni, no metodi sistematici.

Cinematica inversa

Il problema **geometrico inverso** per i sistemi in catena chiusa ha la formulazione:

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda} : SE(3) &\rightarrow Q_A \\ x &\mapsto \bar{\Lambda}(x) = q \in Q_A\end{aligned}$$

dove Q_A è l'insieme dei valori che possono essere assunti dalle configurazioni dei giunti attuati.

- Per un manipolatore in catena chiusa è equivalente ad N problemi cinematici inversi disaccoppiati, uno per ciascuna gamba. In pratica, data la postura dell'end-effector $T_E(x)$, è nota anche quella del sistema di riferimento terminale dove si è operato il taglio, mediante la relazione:

$$T_i(x) = T_E(x)^E T_i$$

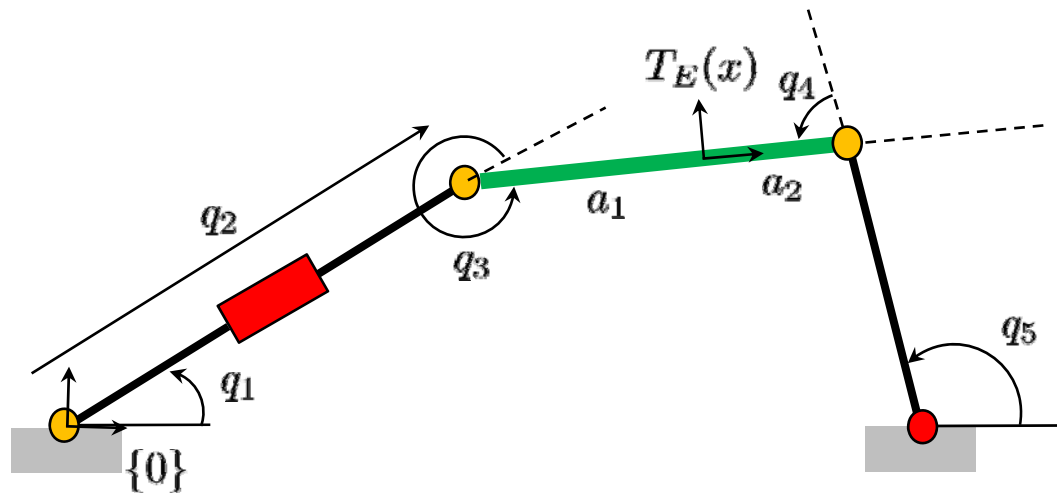
A questo punto il calcolo delle variabili di giunto della gamba i -esima, sia attuati che non, è effettuabile risolvendo in $(q_{A_i}, q_{\bar{A}_i})$ (attuate e non della gamba i -esima)

$$T_i(q_{A_i}, q_{\bar{A}_i}) = T_i(x)$$

Quindi si ricavano contemporaneamente anche i valori delle variabili di giunto non attuate
Osservazione: poiché, tipicamente, le gambe di un parallelo sono meccanismi seriali semplici, la cinematica inversa di un manipolatore parallelo è generalmente di facile soluzione.

Esempio: manipolatore parallelo planare RPRRR

Studiamo la cinematica diretta ed inversa di questo manipolatore



Configurazioni del sistema: $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$, $n = 5$

Configurazione minima: con Grubler: $m \geq 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$

Si sceglie: $n_A = n_S = m = 2$

In particolare i giunti attuati e sensorizzati sono: $q_A = q_S = [q_2 \ q_5]^T$

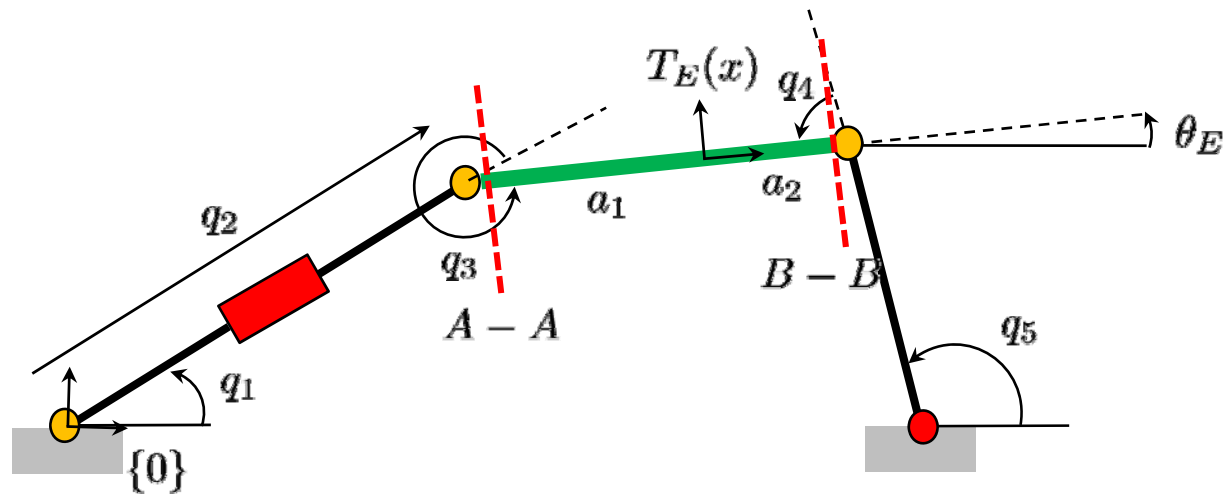
Quelli non attuati né sensorizzati sono: $q_{\bar{A}} = q_{\bar{S}} = [q_1 \ q_3 \ q_4]^T$

Tra l'altro:

$$S_A = S_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_{\bar{A}} = S_{\bar{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Config. end-effector: $x = (x_E, y_E, \theta_E)$

Effettuiamo due tagli sull'e.-e. e imponiamo vincoli di solidarieta'

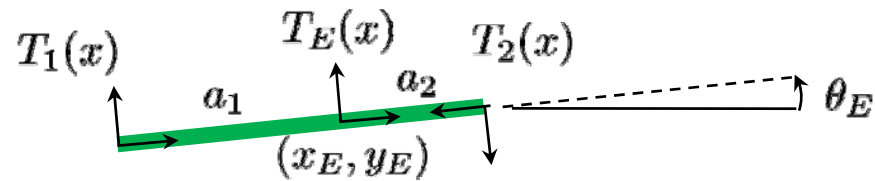


Per end-effector:

$$T_E(x) = \begin{bmatrix} R_z(\theta_E) & \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^E T_1 = \begin{bmatrix} I_2 & \begin{bmatrix} -a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

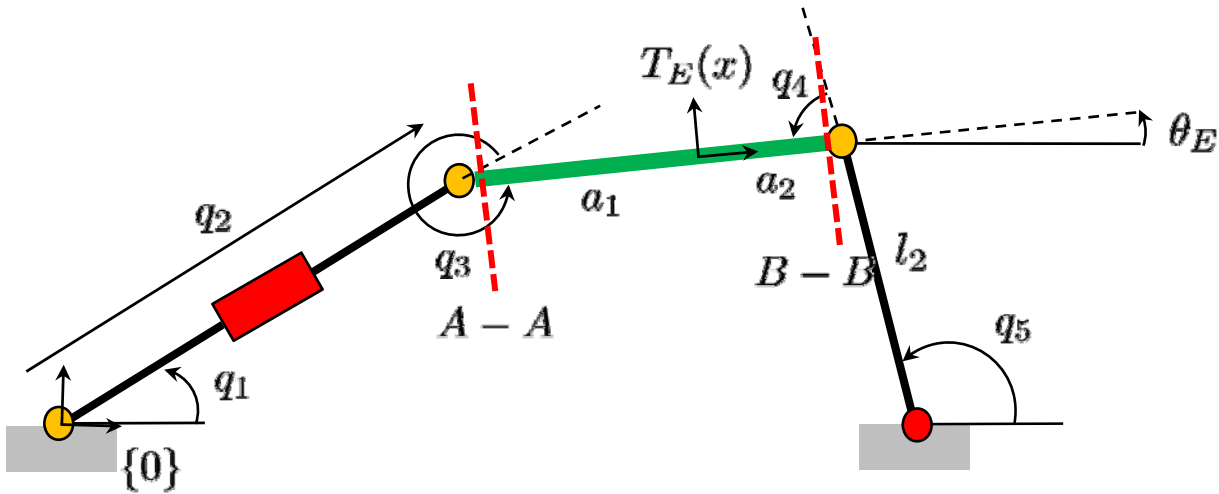
$${}^E T_2 = \begin{bmatrix} I_2 & \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R_z(\pi)$$



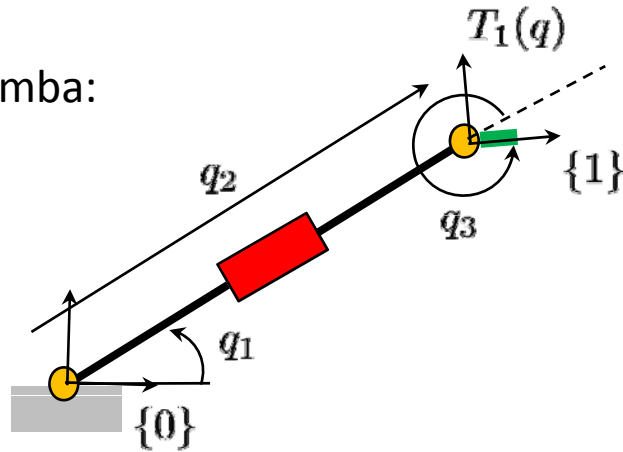
$$T_1(x) = T_E(x) {}^E T_1 = \begin{bmatrix} C_{\theta_E} & -S_{\theta_E} & x_E - a_1 C_{\theta_E} \\ S_{\theta_E} & C_{\theta_E} & y_E - a_1 S_{\theta_E} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2(x) = T_E(x) {}^E T_2 = \begin{bmatrix} -C_{\theta_E} & S_{\theta_E} & x_E + a_2 C_{\theta_E} \\ -S_{\theta_E} & -C_{\theta_E} & y_E + a_2 S_{\theta_E} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Effettuiamo due tagli sull'e.-e. e imponiamo vincoli di solidarietà

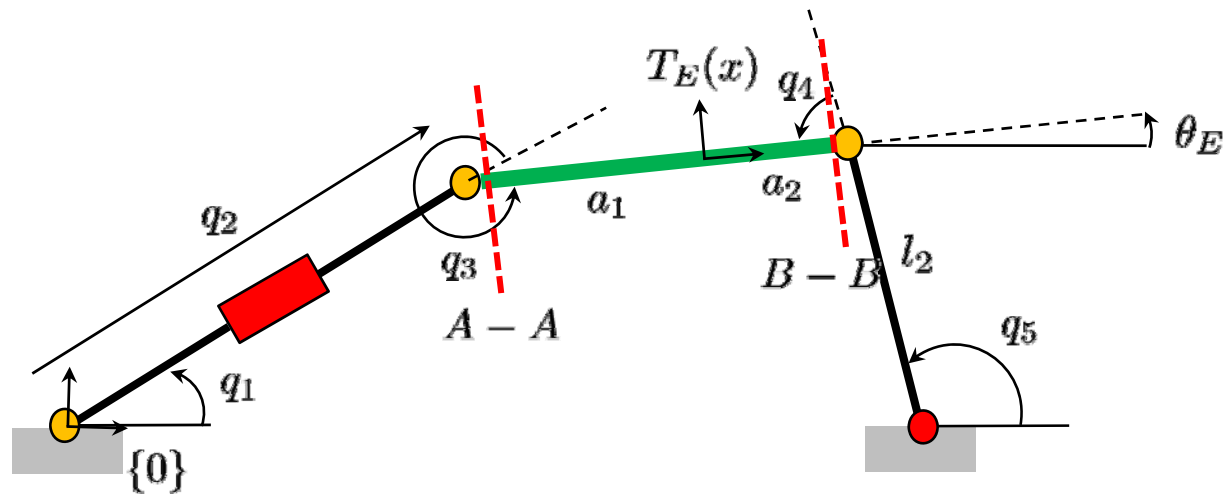


Per la prima gamba:

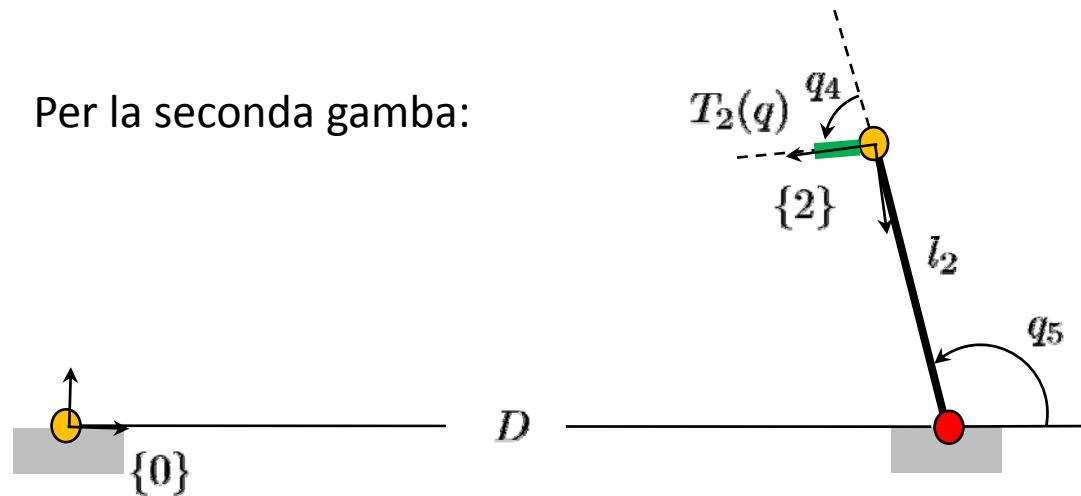


$$T_1(q) = R_z(q_1)T_x(q_2)R_z(q_3) = \left[\begin{array}{cc|c} C_{13} & -S_{13} & q_2 C_1 \\ S_{13} & C_{13} & q_2 S_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Effettuiamo due tagli sull'e.-e. e imponiamo vincoli di solidarieta'

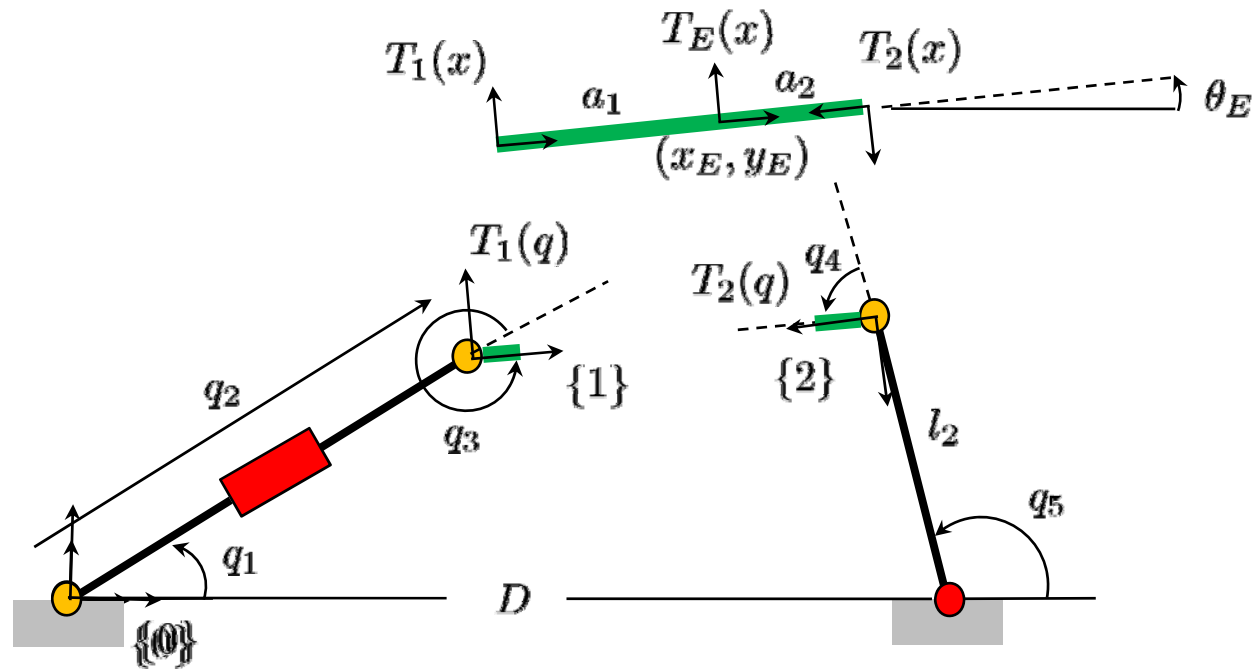


Per la seconda gamba:



$$T_2(q) = T_x(D)R_z(q_5)T_x(l_2)R_z(q_4) = \begin{bmatrix} C_{45} & -S_{45} & D + l_2 C_5 \\ S_{45} & C_{45} & l_2 S_5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imposizione dei vincoli di solidarieta'



Si traduce nel richiedere che le seguenti equazioni di vincolo siano verificate:

Prima gamba:

$$T_1(q) = T_1(x)$$

$$\begin{cases} q_1 + q_3 = \theta_E \\ x_E - a_1 C_{\theta_E} = q_2 C_{q_1} \\ y_E - a_1 S_{\theta_E} = q_2 S_{q_1} \end{cases}$$

Seconda gamba:

$$T_2(q) = T_2(x)$$

$$\begin{cases} q_4 + q_5 = \theta_E + \pi \\ x_E + a_2 C_{\theta_E} = D + l_2 C_{q_5} \\ y_E + a_2 S_{\theta_E} = l_2 S_{q_5} \end{cases}$$

Notare che per cinematica inversa tali sistemi di eq.ni sono disaccoppiati.

Soluzione della cinematica inversa prima gamba

Cinematica inversa: calcolo delle variabili di giunto prima gamba.

$$\begin{cases} q_1 + q_3 = \theta_E \\ x_E - a_1 C_{\theta_E} = q_2 C_{q_1} \\ y_E - a_1 S_{\theta_E} = q_2 S_{q_1} \end{cases}$$

Si quadra e somma (2) e (3):

$$q_2 = [(x_E - a_1 C_{\theta_E})^2 + (y_E - a_1 S_{\theta_E})^2]^{1/2} > 0$$

Ancora da (2) e (3):

$$C_{q_1} = \frac{x_E - a_1 C_{\theta_E}}{q_2}; \quad S_{q_1} = \frac{y_E - a_1 S_{\theta_E}}{q_2}$$
$$q_1 = \text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(y_E - a_1 S_{\theta_E}, x_E - a_1 C_{\theta_E})$$

Poi da (1):

$$q_3 = \theta_E - q_1$$

Dunque per la prima gamba:

$$q_{A_1} = q_2; \quad q_{\bar{A}_1} = [q_1 \quad q_3]^T$$

Soluzione della cinematica inversa seconda gamba

Cinematica inversa: calcolo delle variabili di giunto seconda gamba.

$$\begin{cases} q_4 + q_5 = \theta_E + \pi \\ x_E + a_2 C_{\theta_E} = D + l_2 C_{q_5} \\ y_E + a_2 S_{\theta_E} = l_2 S_{q_5} \end{cases}$$

Come prima da (2) e (3):

$$q_5 = \text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(y_E + a_2 S_{\theta_E}, x_E + a_2 C_{\theta_E} - D)$$

Poi da (1):

$$q_4 = \theta_E + \pi - q_5$$

Dunque per la seconda gamba:

$$q_{A_2} = q_5; \quad q_{\bar{A}_2} = q_4$$

Soluzione della cinematica diretta

Il problema è questo: noti i valori della variabili sensorizzate che nel nostro caso abbiamo scelto essere $q_S = q_A = [q_2 \ q_5]^T$, vogliamo determinare la postura dell'end-effector $x = [x_E \ y_E \ \theta_E]^T$.

In realtà questo non può essere effettuato se non passando attraverso il calcolo anche delle $q_{\bar{S}} = [q_1 \ q_3 \ q_4]^T$, dato che non c'è modo di disaccoppiare il sistema, che risulta pertanto essere:

$$\begin{cases} q_1 + q_3 = \theta_E \\ x_E - a_1 C_{\theta_E} = q_2 C_{q_1} \rightarrow x_E = a_1 C_{\theta_E} + q_2 C_{q_1} \\ y_E - a_1 S_{\theta_E} = q_2 S_{q_1} \rightarrow y_E = a_1 S_{\theta_E} + q_2 S_{q_1} \\ q_4 + q_5 = \theta_E + \pi \\ x_E + a_2 C_{\theta_E} = D + l_2 C_{q_5} \rightarrow x_E = D + l_2 C_{q_5} - a_2 C_{\theta_E} \\ y_E + a_2 S_{\theta_E} = l_2 S_{q_5} \rightarrow y_E = -a_2 S_{\theta_E} + l_2 S_{q_5} \end{cases}$$

Si procede eguagliando le x_E , y_E nelle (2), (5) e nelle (3), (6), si può scrivere ($a = a_1 + a_2$)

$$\begin{cases} q_2 C_{q_1} + a C_{\theta_E} = D + l_2 C_{q_5} \\ q_2 S_{q_1} + a S_{\theta_E} = l_2 S_{q_5} \end{cases}$$

Quadrando e sommando si ha:

$$q_2^2 + a^2 + 2aq_2(C_{q_1}C_{\theta_E} + S_{q_1}S_{\theta_E}) = D^2 + l_2^2 + 2Dl_2C_{q_5}$$

Soluzione della cinematica diretta

Riconoscendo che: $C_{q_1}C_{\theta_E} + S_{q_1}S_{\theta_E} = C_{(\theta_E - q_1)} = C_{q_3}$ allora si può scrivere:

$$q_2^2 + a^2 + 2aq_2C_{q_3} = D^2 + l_2^2 + 2Dl_2C_{q_5}$$

da cui ancora ($q_2 \neq 0$):

$$q_3 = q_3(q_2, q_5) = \pm \arccos \left[\frac{D^2 + l_2^2 - a^2 - q_2^2 + 2Dl_2C_{q_5}}{2 a q_2} \right]$$

Definendo poi:

$$L_x = q_2C_{q_1} + aC_{(q_1+q_3)} = D + l_2C_{q_5} = \text{noto}$$

$$L_y = q_2S_{q_1} + aS_{(q_1+q_3)} = l_2S_{q_5} = \text{noto}$$

Come per la soluzione della cin. inv. planare a due bracci (gamba 1):

$$S_{q_1} = \frac{(q_2 + aC_{q_3})L_y - aS_{q_3}L_x}{L_x^2 + L_y^2}$$

$$C_{q_1} = \frac{(q_2 + aC_{q_3})L_x + aS_{q_3}L_y}{L_x^2 + L_y^2}$$

ovvero:

$$q_1 = \text{atan2}(S_{q_1}, C_{q_1})$$

Soluzione della cinematica diretta

Quindi si calcolano gli angoli rimanenti mediante le:

$$\theta_E = q_1 + q_3$$

$$q_4 = \theta_E + \pi - q_5$$

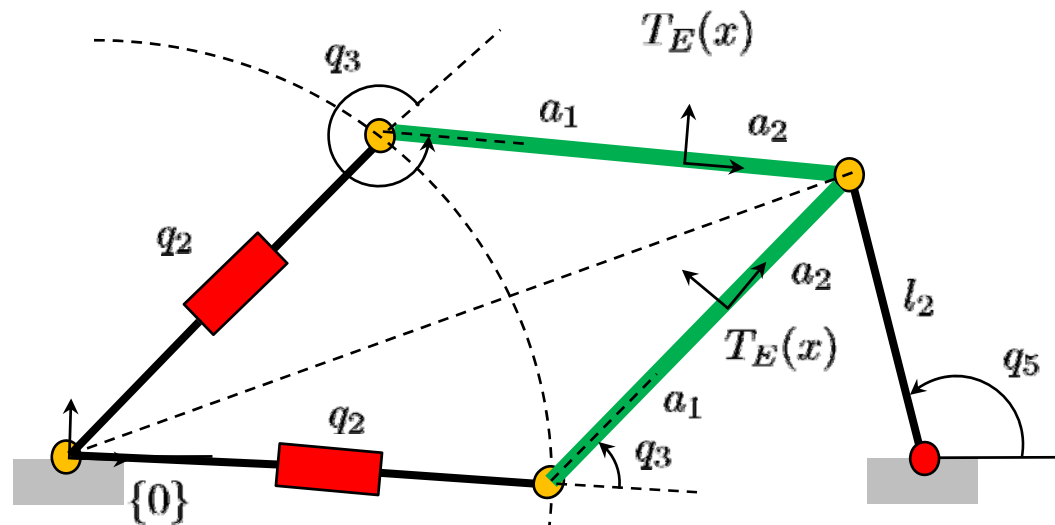
Rimangono solo le coordinate dell'origine della terna $T_E(x)$ che risultano:

$$x_E = q_2 C_{q_1} + a_1 C_{\theta_E}$$

$$y_E = q_2 S_{q_1} + a_1 S_{\theta_E}$$

Il fatto che per la cinematica diretta si ottengono due soluzioni in q_3 e quindi in q_1 si esprime in termini grafici nelle due situazioni possibili:

Note $q_S = [q_2 \quad q_5]^T$ sono su una o sull'altra a seconda della posizione da cui parto.



Singularita'

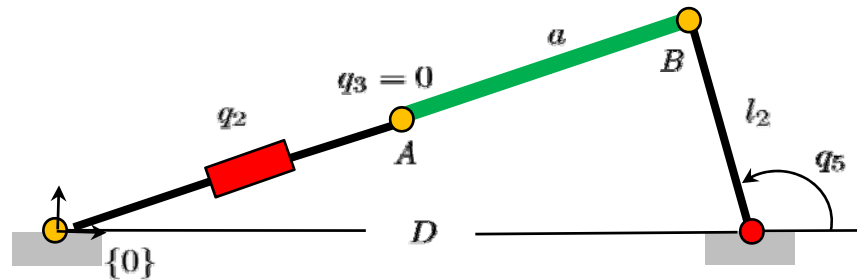
Attenzione al fatto che se il $C_{q_3} = 1$ o $C_{q_3} = -1$ le soluzioni che si ottengono, in ciascun caso, sono coincidenti si riferiscono alla medesima configurazione.

Queste configurazioni vengono dette **singolari**.

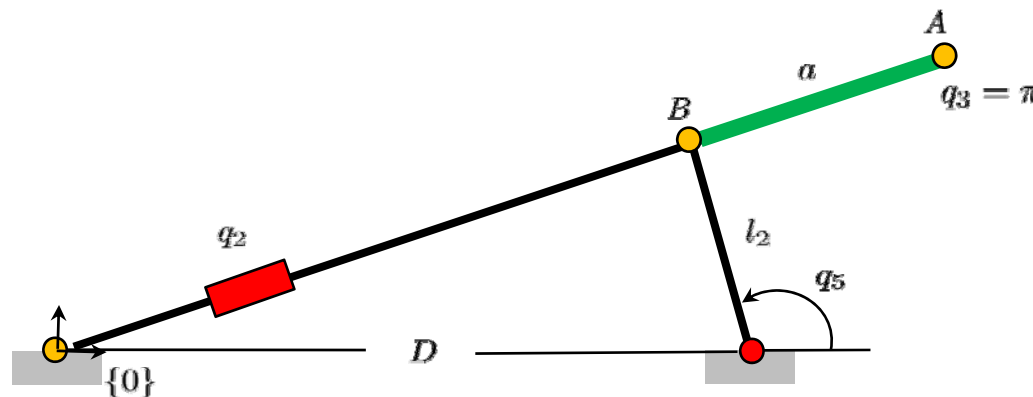
Ad es. se $C_{q_3} = 1$, si ha che $q_3 = 0$ il che comporta che

$$(q_2 + a)^2 = D^2 + l_2^2 + 2Dl_2C_{q_5}$$

ossia l'end-effector e la prima gamba sono allineati e distesi (1 sola soluzione)



Se invece $C_{q_3} = -1$, si ha che $q_3 = \pi$ che corrisponde che end-effector e prima gamba sono allineati ma ripiegati l'uno sull'altra (1 sola soluzione)



Condizione per permanere in singolarita'

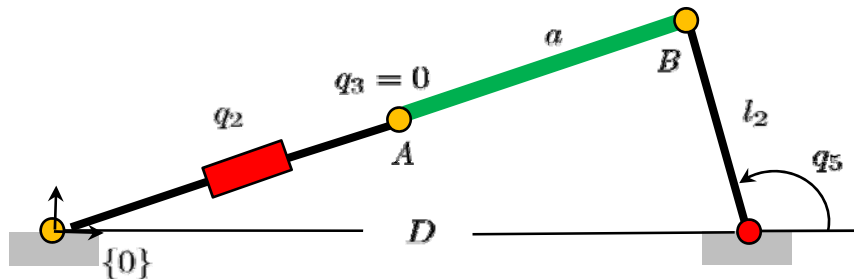
E' interessante notare che ad es. per il primo caso $q_3 = 0$ l'equazione implicita

$$(q_2 + a)^2 = D^2 + l_2^2 + 2Dl_2C_{q_5}$$

definisce un legame funzionale fra le variabili $q_A = [q_2 \quad q_5]^T$ per rimanere in singolarità, ossia

$$f(q_2, q_5) = 0$$

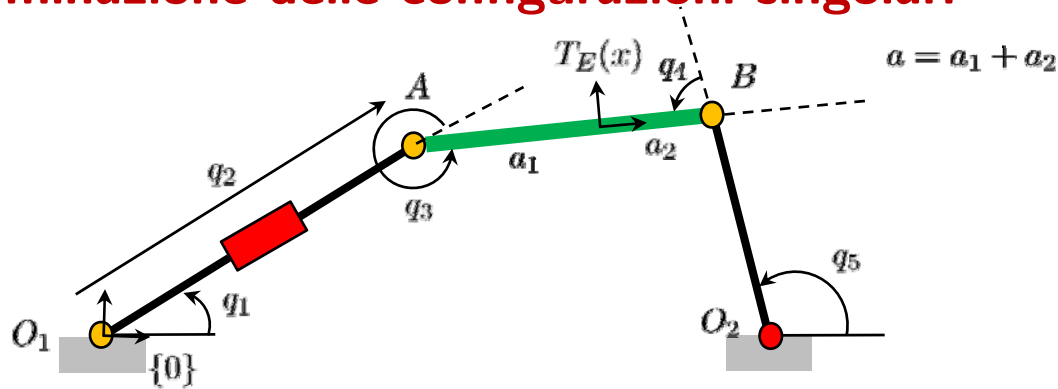
Perciò se cambio q_2 esiste un modo per cambiare q_5 e rimanere in singolarità.



Un ragionamento analogo può essere sviluppato per l'altra condizione di singolarità.

Osservazione: si può passare da un insieme di soluzioni ad un altro (nel caso in cui non sono in singolarità) soltanto attraversando una singolarità. Vedi dopo.

Determinazione delle configurazioni singolari



Scrivendo le equazioni di chiusura della catena cinematica, supponendo di aver effettuato i tagli sui giunti R che collegano le gambe all'end-effector, si arriva a scrivere le seguenti eq.ni di vincolo: $O_1A + AB = O_1O_2 + O_2B$

$$V(q_S, q_{\bar{S}}) = \begin{bmatrix} q_2 C_{q_1} + a C_{(q_1+q_3)} - D - l_2 C_{q_5} \\ q_2 S_{q_1} + a S_{(q_1+q_3)} - l_2 S_{q_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove abbiamo ridefinito le $q_{\bar{S}} = [q_1 \quad q_3]^T$ e mantenuto le $q_S = [q_2 \quad q_5]^T$.

Con questa scrittura si vuol evidenziare che le $q_S, q_{\bar{S}}$ sono implicitamente vincolate dalle due equazioni di chiusura. Le q_S sono note, le $q_{\bar{S}}$ sono incognite.

Supponiamo nota una soluzione $(q_S^0, q_{\bar{S}}^0)$ tale che $V(q_S^0, q_{\bar{S}}^0) = 0$.

Quando per valori di q_S vicini a q_S^0 è possibile determinare univocamente una soluzione per $q_{\bar{S}}$, vicina a $q_{\bar{S}}^0$?

Strumento: **teorema della funzione implicita o di Dini.**

(Ulisse Dini, illustre matematico, primo preside Fac. Ing. UniPi 1913)

Teorema della funzione implicita o di Dini (in piu' variabili)

Sia $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione vettoriale derivabile con continuità e supponiamo che $\mathbb{R}^{n+m}$ abbia coordinate $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (x, y)$. Sia cioè $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Sia (x^0, y^0) un punto in cui $f(x^0, y^0) = 0$.

Allora, se il Jacobiano

$$J_f(x^0, y^0) \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^0, y^0)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

è invertibile, esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ contenente x^0 ed un aperto $V \subset \mathbb{R}^m$ contenente y^0 ed una funzione derivabile $g : U \rightarrow V$ tale che

$$\{(x, g(x))\} = \{(x, y) : f(x, y) = 0\} \cap (U \times V)$$

Ciò significa che la f.ne implicita definisce una dipendenza funzionale $y = g(x)$ in $U \times V$. In particolare poi, potendosi scrivere $f(x, y(x)) = 0$, derivando rispetto ad x :

$$\frac{Df(x, y(x))}{Dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x} = - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Osserva:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{R}^{m \times m}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Analisi delle singolarita' RPRRR con teorema di Dini

Nel caso in esame $V : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$V(q_S, q_{\bar{S}}) = \begin{bmatrix} q_2 C_{q_1} + a C_{(q_1+q_3)} - D - l_2 C_{q_5} \\ q_2 S_{q_1} + a S_{(q_1+q_3)} - l_2 S_{q_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $(q_S, q_{\bar{S}}) = ((q_2, q_5), (q_1, q_4))$.

Allora le variabili di giunto non sensorizzate risultano funzione di quelle sensorizzate se è invertibile il Jacobiano:

$$J_V(q_S, q_{\bar{S}}) \triangleq \frac{\partial V(q_S, q_{\bar{S}})}{\partial q_{\bar{S}}}$$

Che equivale alla condizione che $\det(J_V(q_S, q_{\bar{S}})) \neq 0$.

In questa ipotesi tra l'altro si può ottenere:

$$\frac{\partial J_V}{\partial q_S} = \frac{\partial V}{\partial q_S} + \frac{\partial V}{\partial q_{\bar{S}}} \frac{\partial q_{\bar{S}}}{\partial q_S} = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial q_{\bar{S}}}{\partial q_S} \right|_{(q_S, q_{\bar{S}})} = -J_V^{-1}(q_S, q_{\bar{S}}) \left. \frac{\partial V}{\partial q_S} \right|_{(q_S, q_{\bar{S}})}$$

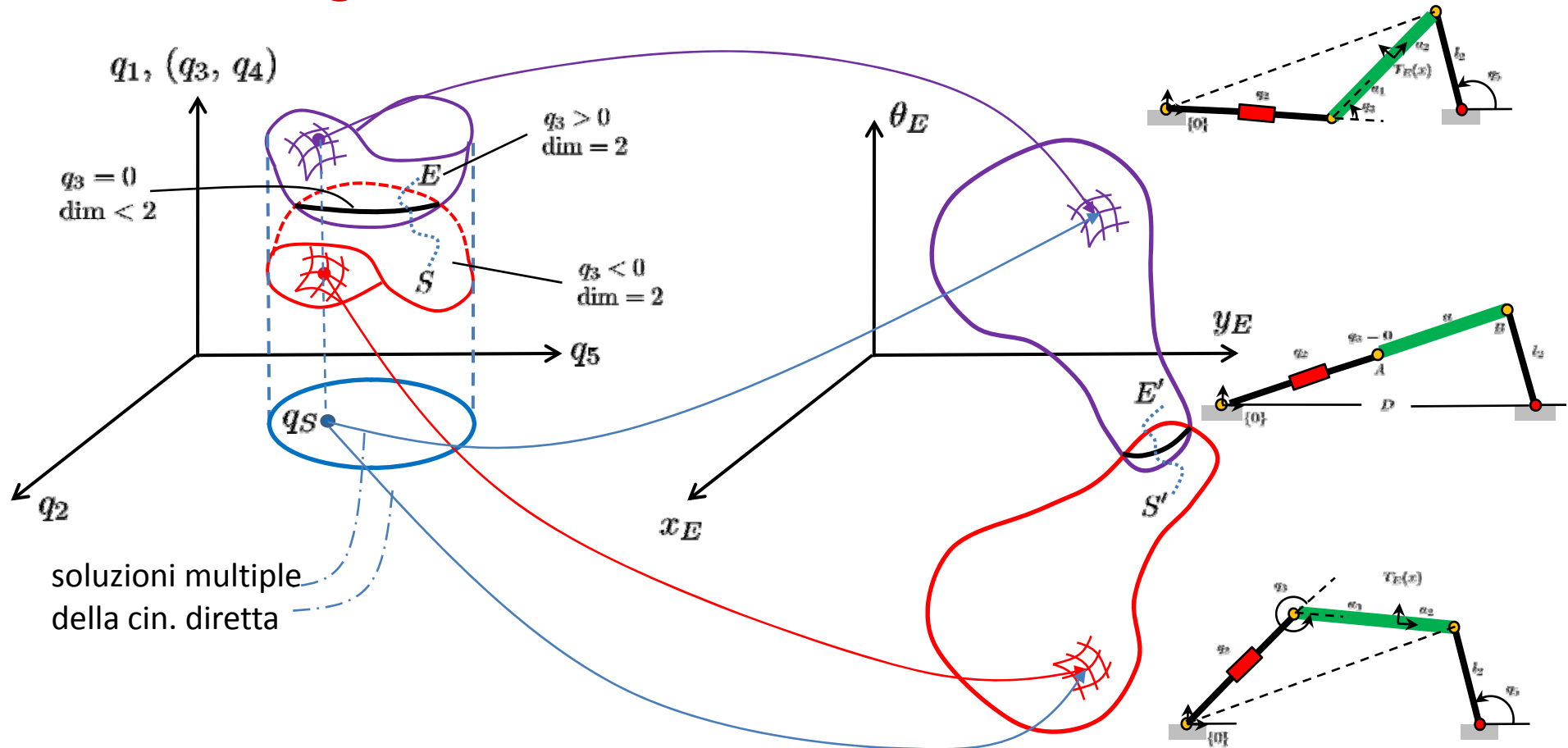
Nel nostro caso esplicitamente:

$$J_V(q_S, q_{\bar{S}}) = \begin{bmatrix} V_{1,q_1} & V_{1,q_3} \\ V_{2,q_1} & V_{2,q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_2 S_{q_1} - a S_{(q_1+q_3)} & -a S_{(q_1+q_3)} \\ q_2 C_{q_1} + a C_{(q_1+q_3)} & a C_{(q_1+q_3)} \end{bmatrix}$$

$$\det(J_V(q_S, q_{\bar{S}})) = a q_2 S_{q_3} = 0 \iff q_3 = 0 \quad \vee \quad q_3 = \pi$$

Configurazioni singolari viste precedentemente. In queste config. la conoscenza delle variabili di giunto sensorizzate non ci permette di conoscere le $q_{\bar{S}}$.

Descrizione grafica soluzioni RPRRR



Si noti che, al di fuori della singolarità, soluzioni che appartengono ad una delle due varietà possibili rimangono per continuità sulla stessa varietà per “piccole” variazioni dei q_S . Si può disambiguare la cinematica diretta se si conosce il valore iniziale di (x_E, y_E, θ_E) . Questo vale localmente ma non ovunque! Se la configurazione q raggiunge una singolarità, il sistema può cambiare varietà. Es. percorso da S ad E .

Cinematica differenziale dei manipolatori paralleli

Robotica I

Marco Gabiccini
`m.gabiccini@ing.unipi.it`

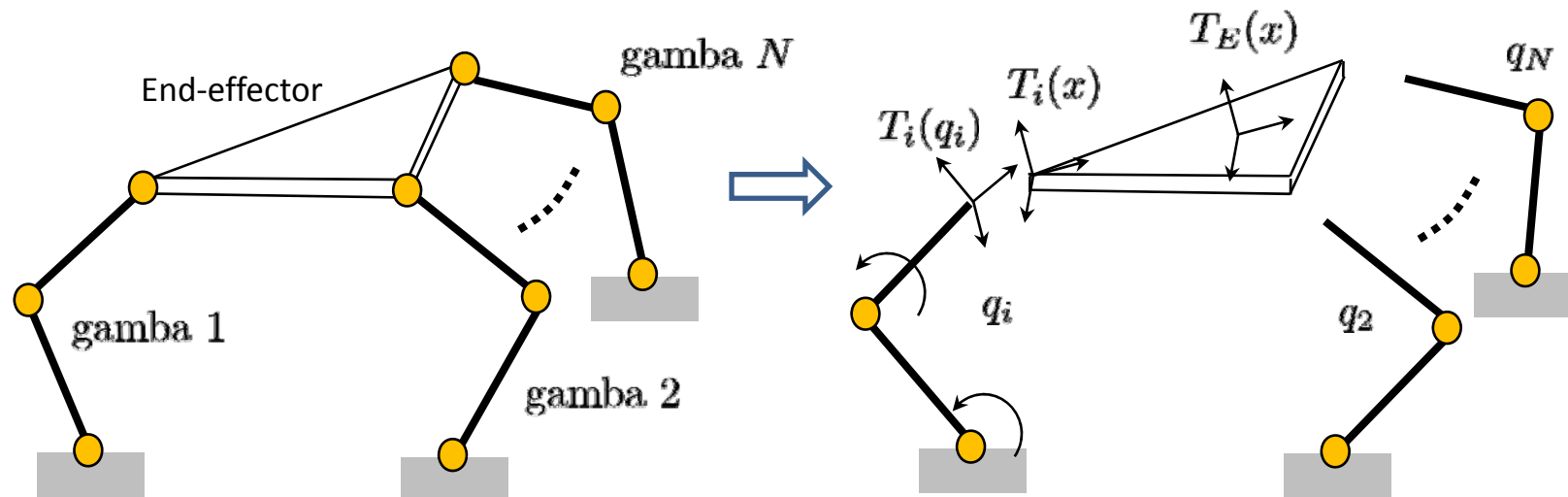


A.A. 2007/2008 Laurea Specialistica in
Ingegneria dell'Automazione



Cinematica differenziale delle catene chiuse

Consideriamo di nuovo un sistema in catena chiusa scomposto secondo il metodo precedentemente visto. In particolare supponiamo di effettuare dei tagli sui giunti fra le N gambe e l'end-effector.



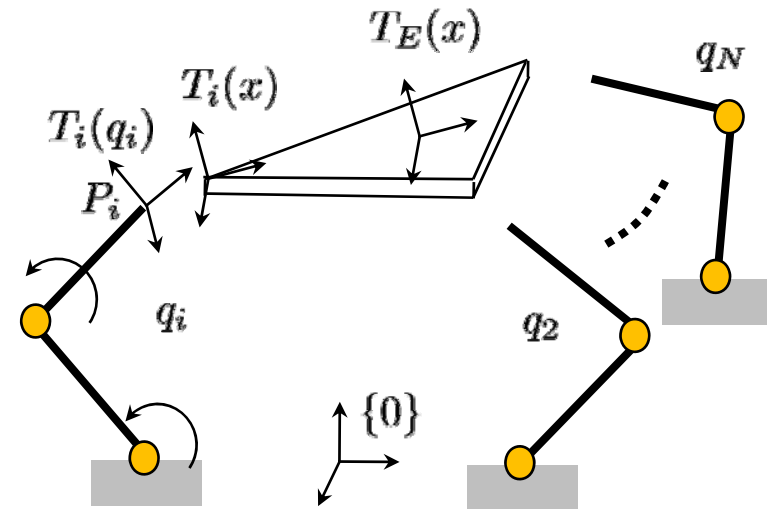
Stavolta però cerchiamo di ripristinare i vincoli rimossi al livello di velocità generalizzate. In pratica si calcolano i twist delle terne $T_i(x)$ solidali all'end-effector ed i twist delle terne $T_i(q_i)$ solidali alle gambe e si scrive una equazione di congruenza del "twist relativo" sulla base della tipologia del vincolo rimosso. Vediamo in dettaglio come si opera.

Velocita' generalizzate delle gambe

Il twist della terna i-esima $\{i(q)\}$ di origine P_i solidale alla gamba i-esima è scrivibile semplicemente considerando la gamba come un comune robot seriale.

Il twist $\xi_i(q_i) \in \mathbb{R}^m$ (con polo P_i) vale quindi:

$$\xi_i(q_i) = \begin{bmatrix} v_{P_i} \\ \omega_i \end{bmatrix} = J_i(q_i) \dot{q}_i \quad J_i(q_i) \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$$



Se si definisce un vettore globale $\xi(q)$ dei twist di tutte le gambe del parallelo giustapponendo in colonna i twist di ogni gamba, si può scrivere:

$$\xi(q) \triangleq \begin{bmatrix} \xi_1(q_1) \\ \vdots \\ \xi_i(q_i) \\ \vdots \\ \xi_N(q_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(q_1) & \cdots & 0_{m \times n_i} & \cdots & 0_{m \times n_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{m \times n_1} & \cdots & J_i(q_i) & \vdots & 0_{m \times n_N} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m \times n_1} & \cdots & 0_{m \times n_i} & \cdots & J_N(q_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix} \triangleq J(q) \dot{q}$$

$$q_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad n = \sum_{i=1}^N n_i, \quad J(q) \in \mathbb{R}^{(Nm) \times n}$$

Equilibrio di ogni gamba

Se ogni gamba del manipolatore parallelo viene riguardata come un classico manipolatore seriale, il bilancio fra forza generalizzata w_i trasmessa attraverso il giunto gamba/e.-e. e le coppie ai giunti della rispettiva gamba è descritto da:

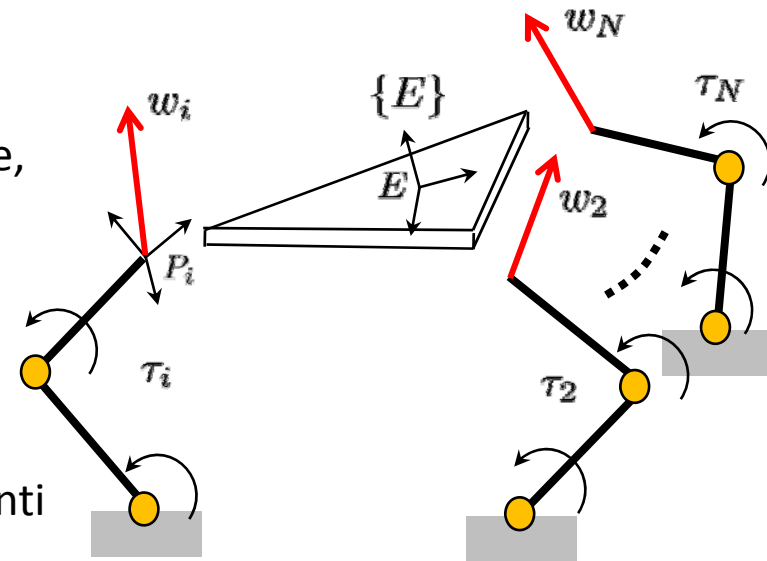
$$\tau_i = J_i^T(q_i)w_i$$

Semplicemente giustapponendo le coppie ai giunti su tutte le gambe si può scrivere:

$$\tau = J^T(q)w$$

In forma espansa si ha:

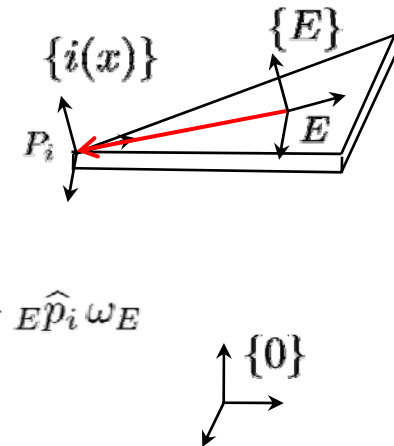
$$\tau \triangleq \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_i \\ \vdots \\ \tau_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^T(q_1) & \cdots & 0_{n_1 \times m} & \cdots & 0_{n_1 \times m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{n_i \times m} & \cdots & J_i^T(q_i) & \vdots & 0_{n_i \times m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n_N \times m} & \cdots & 0_{n_N \times m} & \cdots & J_N^T(q_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \triangleq J(q)^T w \quad J^T(q) \in \mathbb{R}^{n \times (Nm)}$$



Velocita' generalizzate dei p.ti di collegamento su e.-e.

Consideriamo adesso di descrivere l'atto di moto della piattaforma introducendo il twist della terna $\{E\}$, ossia $\xi_E(x)$. Per calcolare il twist del punto P_i basta trasformare la velocità lineare (componenti in terna fissa):

$$\xi_E = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{\omega_E} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} v_{P_i} &= v_E + \omega_E \times EP_i = v_E - EP_i \times \omega_E = v_E - E\hat{p}_i \omega_E \\ \omega_i &= \omega_E \end{cases}$$



Dunque in modo compatto:

$$\xi_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{v_{P_i}}{\omega_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & -E\hat{p}_i \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_E}{\omega_E} \end{bmatrix} = M_{P_i,E} \xi_E \triangleq B_i \xi_E \quad B_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Allora, se si definisce un vettore globale $\xi(x)$ ottenuto giustapponendo i twist dei punti P_i della piattaforma in cui le gambe sono ad essa collegate mediante i giusti rimossi, si può scrivere:

$$\xi(x) \triangleq \begin{bmatrix} \xi_1(x) \\ \vdots \\ \xi_i(x) \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} \xi_E(x) \triangleq B \xi_E(x) \quad B \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(Nm) \times m}$$

Equilibrio globale della piattaforma

Se in corrispondenza del giunto i-esimo viene esercitata una forza generalizzata w_i dove:

$$w_i = \begin{bmatrix} F_{P_i} \\ M_{P_i} \end{bmatrix}$$

l'effetto riportato all'origine della terna $\{E\}$ è semplicemente la riduzione al polo E, ossia:

$$w_{E_i} = \begin{bmatrix} F_{P_i} \\ M_{P_i} + {}_E\hat{p}_i F_{P_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ {}_E\hat{p}_i & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{P_i} \\ M_{P_i} \end{bmatrix} = G_i w_i$$

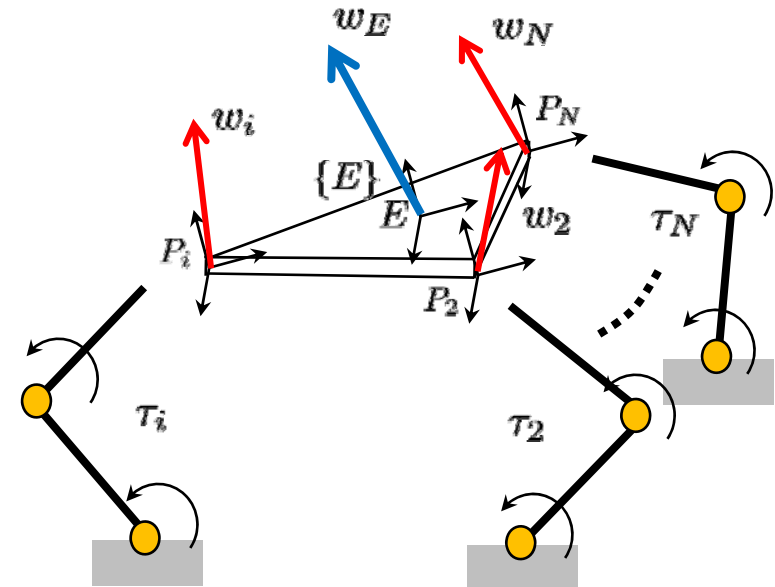
Si definisce così la matrice:

$$G_i \triangleq \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ {}_E\hat{p}_i & I_3 \end{bmatrix}, \quad G_i = B_i^T$$

Inoltre dalla riduzione delle forze generalizzate di tutte le gambe sull'end-effector si ha:

$$w_E = \sum_{i=1}^N w_{E_i} = \sum_{i=1}^N G_i w_i = [G_1 \cdots G_N] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \triangleq G w$$

La matrice $G = B^T$ viene detta matrice di "grasp" (presa) dalla letteratura sulla presa con mani robotiche. Piattaforma=oggetto afferrato, gambe=dita della mano.



Ripristino dei vincoli sui giunti

I vincoli fra le gambe e la piattaforma, rimossi mediante gli N tagli effettuati, vengono ripristinati vincolando il twist relativo fra piattaforma e gamba.

Se si introduce per l' i -esimo giunto la matrice F_i la cui immagine coincide con il sottospazio della velocità generalizzata relativa permessa dal vincolo i -esimo, si scrive

$$\xi_i(x) - \xi_i(q_i) \in \mathcal{R}(F_i)$$

In realtà, dal punto di vista computazionale, è più comodo introdurre una matrice H_i il cui spazio nullo coincide con l'immagine di F_i , ossia per cui:

$$\mathcal{N}(H_i) \equiv \mathcal{R}(F_i) \rightarrow H_i F_i \equiv 0$$

In questo modo, la richiesta precedente equivale alla richiesta che

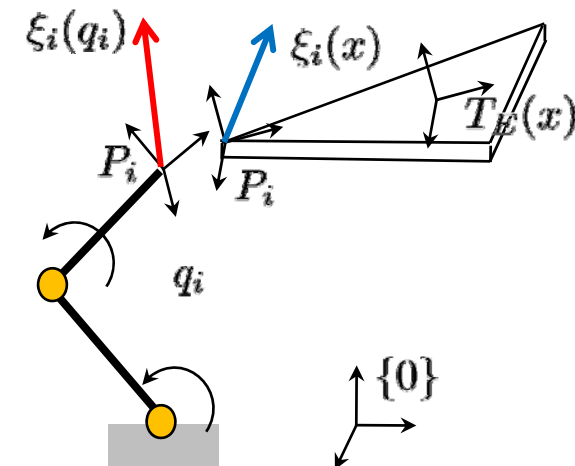
$$\xi_i(x) - \xi_i(q_i) \in \mathcal{N}(H_i)$$

Perché si abbia $H_i F_i \equiv 0$, deve essere:

$$\mathcal{R}(H_i^T) = \mathcal{N}(H_i)^\perp = \mathcal{R}(F_i)^\perp$$

Inoltre, anche per la matrice F_i : $\mathcal{R}(F_i)^\perp = \mathcal{N}(F_i^T)$, da cui

$$\mathcal{R}(H_i^T) = \mathcal{N}(F_i^T) \rightarrow H_i = (\mathcal{N}(F_i^T))^T \quad \text{es. su MATLAB} \quad H_i = \text{null}(F_i')'$$



Ripristino dei vincoli sui giunti

Di conseguenza, più che imporre la direzione permessa del twist relativo, si richiede che si annullino le componenti nelle direzioni impedito. Quindi:

$$H_i(\xi_i(x) - \xi_i(q_i)) = 0$$

Ma date le relazioni $\xi_i(q_i) = J_i(q_i)\dot{q}_i$ e $\xi_i(x) = G_i^T \xi_E$ si ottiene la forma più espressiva:

$$H_i(J_i(q_i)\dot{q}_i - G_i^T \xi_E) = 0$$

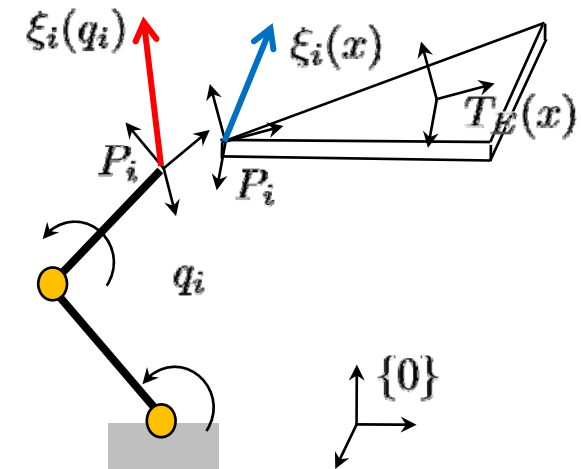
Ossia anche:

$$\begin{bmatrix} H_i J_i & -H_i G_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0$$

Se consideriamo che la generica matrice di vincolo $H_i \in \mathbb{R}^{c_i \times m}$ impone l'annullarsi di $c_i \leq m$ componenti del twist relativo, si può condensare il ripristino dei vincoli su tutti i giunti introducendo la matrice diagonale a blocchi

$$H \in \mathbb{R}^{c \times (Nm)}$$

dove: $c = \sum_{i=1}^n c_i$



Ripristino dei vincoli sui giunti

In modo esplicito la matrice globale $H \in \mathbb{R}^{c \times (Nm)}$ risulta:

$$H \triangleq \begin{bmatrix} H_1 & \cdots & 0_{c_1 \times m} & \cdots & 0_{c_1 \times m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{c_i \times m} & \cdots & H_i & \vdots & 0_{c_i \times m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{c_N \times m} & \cdots & 0_{c_N \times m} & \cdots & H_N \end{bmatrix}$$

Dunque, essendo $J(q) \in \mathbb{R}^{(Nm) \times n}$, $G^T \in \mathbb{R}^{(Nm) \times m}$ si possono condensare le relazioni vincolari fornite dai giunti di collegamento fra tutte le gambe e l'end-effector nella forma:

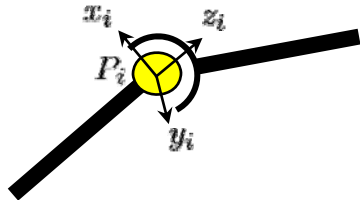
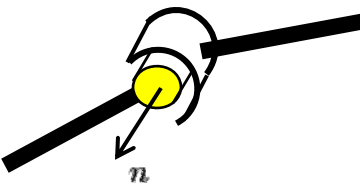
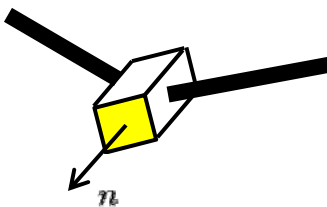
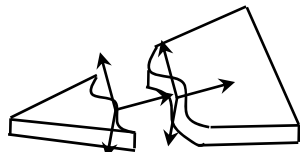
$$\begin{bmatrix} HJ & -HG^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0$$

Le soluzioni della cinematica differenziale in termini di velocità ai giunti $\dot{q}$ delle gambe del parallelo e di twist ξ_E dell'end-effector sono quelle che stanno nello spazio nullo della matrice di vincolo, ossia

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \xi_E \end{bmatrix} \text{ è un atto di moto possibile se e solo se } \begin{bmatrix} HJ & -HG^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0, \\ \text{con } \begin{bmatrix} HJ & -HG^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{c \times (n+m)}$$

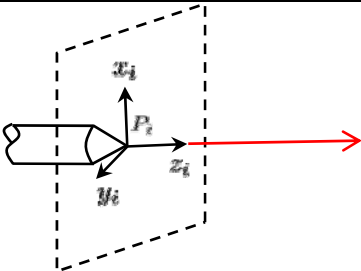
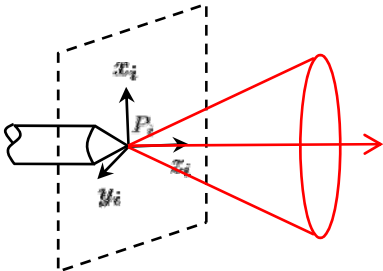
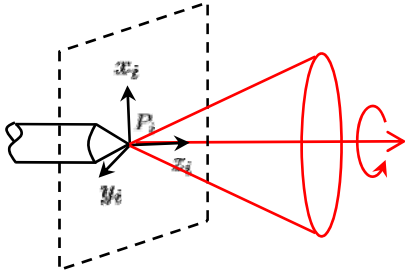
Tipologie di vincolo (1)

Riportiamo le espressioni di F_i e della corrispondente H_i per varie tipologie di vincolo.

Tipologia	Schema	Base twist relativo (cols)	Base wrench (rows)
Giunto sferico (ball-in-socket)		$F_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Giunto rotoidale (revolute)		$F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$	$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n_z & 0 & n_x \end{bmatrix}$
Giunto prismatico (prismatic)		$F_i = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$H_i = \begin{bmatrix} -n_y & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n_z & 0 & n_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Solidarietà		$F_i = 0 \in \mathbb{R}^6$	$H_i = I_{6 \times 6}$

Tipologie di vincolo (2)

Per certi tipi di vincolo tipo contatto dita/oggetto può essere comodo esprimere la base del twist relativo permesso, ovvero del wrench esercitabile dal vincolo, in terna locale $\{i(q)\}$ e poi riportarla in componenti in terna base $\{0\}$ come già visto.

Tipologia	Schema	Base twist relativo (cols)	Base wrench (rows)
Frictionless point contact		${}^iF_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	${}^iH_i = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$
Point contact with friction		${}^iF_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	${}^iH_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Soft-finger		${}^iF_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	${}^iH_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Espressione della matrice di vincolo nel frame di base

Se per comodità si sceglie di esprimere la matrice di vincolo nel frame locale $\{i(q)\}$, ossia si è scritto la iH_i , si può procedere a determinare la versione nel frame di base $\{0\}$ mediante la seguente scrittura:

$${}^iH_i {}^i\xi_i^{(r)} = 0$$

Ma dato che le coordinate dei twist (con stesso polo) si trasformano secondo la legge:

$${}^i\xi_i^{(r)} = M({}^iR_0, 0) {}^0\xi_i^{(r)}, \quad M({}^iR_0, 0) = \left[\begin{array}{c|c} {}^iR_0 & 0_3 \\ \hline 0_3 & {}^iR_0 \end{array} \right]$$

Allora si può riscrivere:

$${}^iH_i M({}^iR_0, 0) {}^0\xi_i^{(r)} = 0$$

Da cui, definendo la ${}^0H_i \triangleq {}^iH_i M({}^iR_0, 0)$, si può di nuovo scrivere (omett. apici)

$$H_i (\xi_i(q_i) - \xi_i(x)) = 0$$

Analisi della cinematica differenziale

Abbiamo visto che le soluzioni della cinematica differenziale in termini di velocità ai giunti $\dot{q}$ delle gambe del parallelo e di twist ξ_E dell'end-effector sono quelle che stanno nello spazio nullo della matrice di vincolo, ossia tali che:

$$\begin{bmatrix} HJ & -HG^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0 \quad HJ \in \mathbb{R}^{c \times n}; \quad HG^T \in \mathbb{R}^{c \times m}$$

Può essere utile distinguere nelle $\dot{q}$ quelle attuate e quelle non attuate.

$$\begin{aligned} \dot{q}_A &\in \mathbb{R}^{n_A}, \quad \dot{q}_A = S_A \dot{q}; \\ \dot{q}_{\bar{A}} &\in \mathbb{R}^{n_{\bar{A}}}, \quad \dot{q}_{\bar{A}} = S_{\bar{A}} \dot{q} \quad n_A + n_{\bar{A}} = n \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_A \\ S_{\bar{A}} \end{bmatrix} \dot{q} \rightarrow \dot{q} = \begin{bmatrix} S_A \\ S_{\bar{A}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \end{bmatrix}$$

Allora definendo:

$$\begin{bmatrix} J_A & J_{\bar{A}} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} S_A \\ S_{\bar{A}} \end{bmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{Nm \times (n_A + n_{\bar{A}})}$$

Si può esplicitamente fare riferimento alle velocità ai giunti attuati e non, oltre al twist dell'end-effector, mediante la scrittura:

$$\begin{bmatrix} HJ_A & HJ_{\bar{A}} & -HG^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0 \rightarrow A(\phi) \dot{\phi} = 0$$

Analisi esplicita della struttura del $\mathcal{N}(A)$

La soluzione della cinematica differenziale può essere scritta combinando linearmente i vettori che rappresentano una base del $\mathcal{N}(A)$.

Se le c eq.ni di vincolo sono indipendenti (rango pieno righe) il nullo ha dimensione $n + m - c$

Dunque introducendo un coefficiente $\lambda \in \mathbb{R}^{n+m-c}$ definito dei “gradi di libertà”, si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \\ \xi_E \end{bmatrix} = N\lambda = \begin{bmatrix} N_A \\ N_{\bar{A}} \\ N_E \end{bmatrix} \lambda, \quad \mathcal{R}(N) = \mathcal{N}(A)$$

A questo punto posso studiare la struttura della base del $\mathcal{N}(A)$, cioè della matrice N , per vedere se ho dei blocchi così fatti:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \\ \xi_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{AR} & 0 & N_{AC} \\ N_{\bar{A}R} & 0 & N_{\bar{A}C} \\ 0 & N_{EL} & N_{EC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_R \\ \lambda_L \\ \lambda_C \end{bmatrix}$$

Da questa struttura posso trarre delle conclusioni interessanti...

Soluzione esplicita della cinematica differenziale

In particolare, riscrivendola così:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \\ \xi_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{AR} & 0 & N_{AC} \\ N_{\bar{A}R} & 0 & N_{\bar{A}C} \\ 0 & N_{EL} & N_{EC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_R \\ \lambda_L \\ \lambda_C \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \\ \xi_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{AR} \\ N_{\bar{A}R} \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_R + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{EL} \end{bmatrix} \lambda_L + \begin{bmatrix} N_{AC} \\ N_{\bar{A}C} \\ N_{EC} \end{bmatrix} \lambda_C$$

Vedo che:

- λ_R sono i gradi di libertà ridondanti, ossia sono moti dei giunti attuati e non attuati che lasciano fermo l'end-effector. Il blocco:

$\begin{bmatrix} N_{AR} \\ N_{\bar{A}R} \end{bmatrix}$ è una base del $\mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} HJ_A & HJ_{\bar{A}} \end{bmatrix} \right)$;

- λ_L sono i gradi di labilità, ossia i moti dell'end-effector a giunti attuati e non attuati che rimangono fermi (indesiderabile)

Il blocco:

N_{EL} è una base del $\mathcal{N}(HG^T)$;

- λ_C sono i gradi di libertà coordinati, ossia in cui si muovono insieme giunti attuati, non attuati ed end-effector mediante il blocco matriciale

Con $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ridond.); $\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_L \\ 0 \end{bmatrix}$ (labili); $\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_C \end{bmatrix}$ (coordinati).

$$\begin{bmatrix} N_{AC} \\ N_{\bar{A}C} \\ N_{EC} \end{bmatrix}$$

Problema duale: analisi delle forze scambiate

Consideriamo adesso l'**equilibrio** dell'end-effector, che è retto dalle equazioni viste:

$$\begin{cases} \tau &= J^T w \\ w_E &= -G w \end{cases}$$

Attenzione che in questa sede i wrench vincolari w sono quelli che fanno equilibrio al wrench esterno w_E . I wrench vincolari sono poi generati mediante le coppie ai giunti τ .

Dato che i wrench vincolari possono essere esercitati soltanto nelle direzioni che impediscono il moto relativo, posso essere scritti come

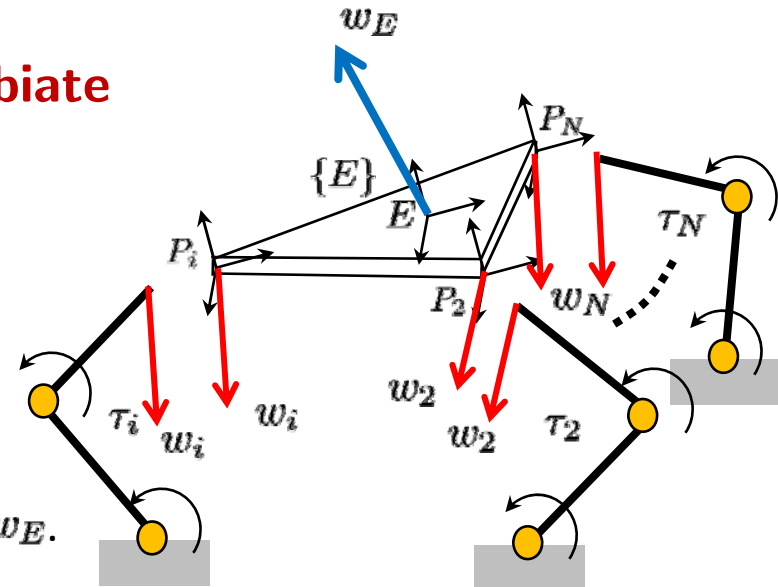
$$w = H^T \tilde{w}$$

dove $\tilde{w}$ sono le componenti di w nella base del wrench effettivamente esercitabile dal vincolo rimosso.

Supponendo vincoli lisci, i wrench vincolari w sui giunti rimossi non fanno lavoro – sono complementari – sui twist relativi, dunque:

$$\xi^{(r)} \in \mathcal{N}(H) \rightarrow w \in \mathcal{N}(H)^\perp = \mathcal{R}(H^T)$$

Perciò scrivo il wrench w come combinazione lineare delle colonne di H^T .



Problema duale: analisi delle forze scambiate

Sulla base delle considerazioni viste si può scrivere:

$$\begin{cases} \tau &= J^T H^T \tilde{w} \\ w_E &= -GH^T \tilde{w} \end{cases}$$

Ovvero in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \tau \\ w_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^T H^T \\ -GH^T \end{bmatrix} \tilde{w}$$

Ricordando che per le velocità possibili:

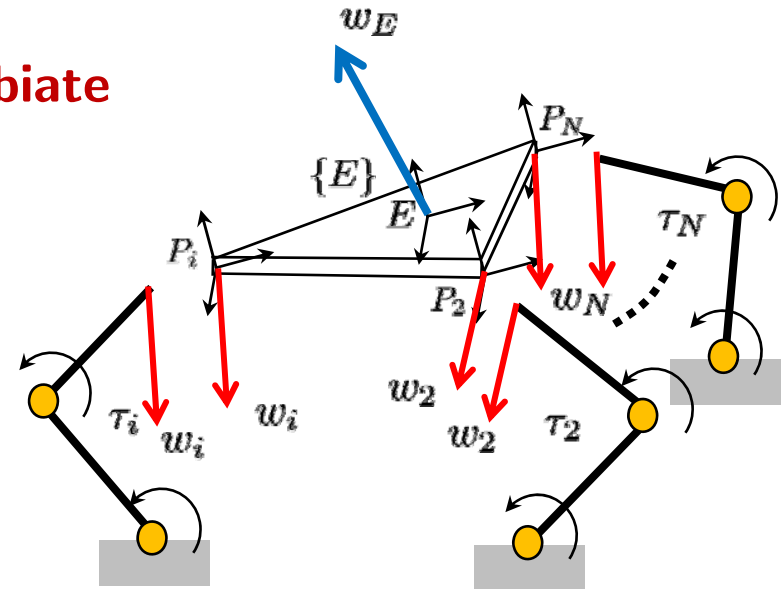
$$\begin{bmatrix} HJ & -HG^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0 \rightarrow A(q, x) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0$$

Per le coppie ai giunti/wrench equilibrati:

$$\begin{bmatrix} \tau \\ w_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^T H^T \\ -GH^T \end{bmatrix} \tilde{w} \rightarrow \begin{bmatrix} \tau \\ w_E \end{bmatrix} = A^T(q, x) \tilde{w}$$

Infatti, la potenza sviluppata dalle reazioni vincolari in corrisp. dei giunti di collegamento gambe/piattaforma sugli atti di moto relativi ammessi è nulla:

$$\begin{bmatrix} \tau^T & w_E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \xi_E \end{bmatrix} = \tilde{w}^T A(q, x) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0$$



Discussione su unicità della soluzione

$$\begin{bmatrix} \frac{\tau}{w_E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^T H^T \\ -G H^T \end{bmatrix} \tilde{w} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\tau}{w_E} \end{bmatrix} = A^T(q, x) \tilde{w}$$

Se il $\mathcal{N}(A^T) = 0$, allora dato un wrench esterno su e.-e. w_E e delle coppie ai giunti τ , **se esiste** $\tilde{w}$, questo è **unico**. In questo caso il sistema è in equilibrio e si è in grado di determinare le reazioni vincolari sui giunti gambe/piattaforma. Il sistema è **isostatico**.

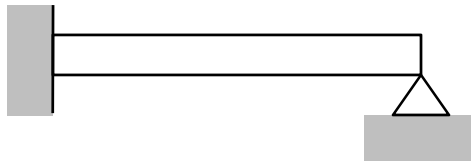
Se invece $\mathcal{N}(A^T) \neq 0$, a partire dal carico applicato dall'esterno sul manipolatore (w_E, τ) ancorché in equilibrio, **non** si è in grado di determinare le forze generalizzate interne $\tilde{w}$, che si scambiano i suoi membri. In questo caso il sistema si dice **staticamente indeterminato**, o anche **iperstatico**.

Si osservi che

$$\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} HJ \\ -HG^T \end{bmatrix} \right)^\perp \neq 0$$

Ciò significa che la matrice di vincolo A non ha rango pieno righe e quindi che esistono vincoli che sono linearmente dipendenti.

Ad esempio: sbarra con incastro ed appoggio.



Discussione su esistenza della soluzione

Avendo discusso l'**unicità**, vediamo ora l'**esistenza** di soluzioni.

Tra l'altro si possono riscrivere le equazioni di equilibrio esplicitando le coppie ai giunti attuati e non attuati. Si parte dalle equazioni di equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \tau \\ w_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^T H^T \\ -GH^T \end{bmatrix} \tilde{w}$$

con

$$\begin{bmatrix} \tau_A \\ \tau_{\bar{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_A \\ S_{\bar{A}} \end{bmatrix} \tau \rightarrow \tau = \begin{bmatrix} S_A \\ S_{\bar{A}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_A \\ \tau_{\bar{A}} \end{bmatrix} \rightarrow \tau = S^{-1} \begin{bmatrix} \tau_A \\ \tau_{\bar{A}} \end{bmatrix}$$

Il primo blocco di equazioni risulta:

$$\tau = J^T H^T \tilde{w} \rightarrow S^{-1} \begin{bmatrix} \tau_A \\ \tau_{\bar{A}} \end{bmatrix} = J^T H^T \tilde{w} \rightarrow \begin{bmatrix} \tau_A \\ \tau_{\bar{A}} \end{bmatrix} = S J^T H^T \tilde{w}$$

Ma dato che per una matrice di permutazione $S^{-1} = S^T$ e la definizione di

$$\begin{bmatrix} J_A \\ J_{\bar{A}} \end{bmatrix} = JS^{-1} = JS^T \rightarrow \begin{bmatrix} J_A^T \\ J_{\bar{A}}^T \end{bmatrix} = SJ^T$$

Quindi si ha la forma desiderata:

$$\begin{cases} \tau_A &= J_A^T H^T \tilde{w} && \text{(bilancio sui giunti attuati)} \\ \tau_{\bar{A}} &= J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = 0 && \text{(bilancio sui giunti non attuati)} \\ w_E &= -GH^T \tilde{w} && \text{(equilibrio su end-effector)} \end{cases}$$

Discussione su esistenza della soluzione

$$\begin{cases} \tau_A &= J_A^T H^T \tilde{w} & \text{(bilancio sui giunti attuati)} \\ \tau_{\bar{A}} &= J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = 0 & \text{(bilancio sui giunti non attuati)} \\ w_E &= -GH^T \tilde{w} & \text{(equilibrio su end-effector)} \end{cases}$$

Caso 1) $w_E \notin \mathcal{R}(GH^T)$

In questo caso non si può avere equilibrio dell'end-effector. Questo può succedere solo se GH^T non ha rango pieno righe, e dunque il complemento ortogonale al $\mathcal{R}(GH^T)$ è non nullo. Ossia se esistono moti labili dell'end-effector, ossia se:

$$\mathcal{R}(GH^T)^\perp = \mathcal{N}(HG^T) \neq 0$$

Caso 2) $w_E \in \mathcal{R}(GH^T)$

In questo caso si ha equilibrio. In particolare, dato che tipicamente si progettano i manipolatori per avere $\mathcal{N}(HG^T) = 0$, allora la GH^T (rettang. bassa) ha rango pieno righe ed esiste quindi una inversa destra per cui la soluzione dell'equilibrio sull'end-effector è data da:

$$\tilde{w} = (GH^T)^R (-w_E) + Py$$

con:

$$(GH^T)(GH^T)^R = I_m \quad \mathcal{R}(P) \text{ è base del } \mathcal{N}(GH^T)$$

$$GH^T \in \mathbb{R}^{m \times c} \quad \dim(\mathcal{N}(GH^T)) = c - m \quad P \in \mathbb{R}^{m \times (c-m)} \quad y \in \mathbb{R}^{c-m}$$

Struttura della soluzione

$$\begin{cases} \tau_A &= J_A^T H^T \tilde{w} & \text{(bilancio sui giunti attuati)} \\ \tau_{\bar{A}} &= J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = 0 & \text{(bilancio sui giunti non attuati)} \\ w_E &= -GH^T \tilde{w} & \text{(equilibrio su end-effector)} \end{cases}$$

Nel caso in cui esiste, la soluzione è della forma:

$$\tilde{w} = (GH^T)^R (-w_E) + Py$$

- il primo termine $(GH^T)^R (-w_E)$ è una soluzione particolare;
- il secondo termine Py è la soluzione omogenea, parametrizzata dal vettore di coefficienti $y \in \mathbb{R}^{c-m}$. Interessantemente, la soluzione omogenea rappresenta le forze interne applicate dalle gambe (dita) sull'end-effector (oggetto afferrato), che non si riflettono in alcuna azione risultante sull'end-effector.

Le forze interne sono importanti ad esempio in problemi di manipolazione con mani robotiche, dove possono essere usate per intensificare le forze normali di contatto ed accrescere opportunamente le forze di attrito, senza influenzare l'equilibrio dell'oggetto manipolato.

Struttura della soluzione

$$\begin{cases} \tau_A &= J_A^T H^T \tilde{w} & (\text{bilancio sui giunti attuati}) \\ \tau_{\bar{A}} &= J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = 0 & (\text{bilancio sui giunti non attuati}) \\ w_E &= -GH^T \tilde{w} & (\text{equilibrio su end-effector}) \end{cases}$$

Data la **soluzione nelle forze interne**:

$$\tilde{w} = (GH^T)^R (-w_E) + Py$$

Le **coppie ai giunti attuati** che possono soddisfare l'eq. di equilibrio sono date da

$$\tau_A = J_A^T H^T \tilde{w} = J_A^T H^T (GH^T)^R (-w_E) + J_A^T H^T Py$$

Attenzione al fatto che in realtà le $y \in \mathbb{R}^{c-m}$ che modulano le forze interne non possono essere scelte in modo arbitrario, ma debbono soddisfare l'**equilibrio sui giunti non attuati**, ossia che

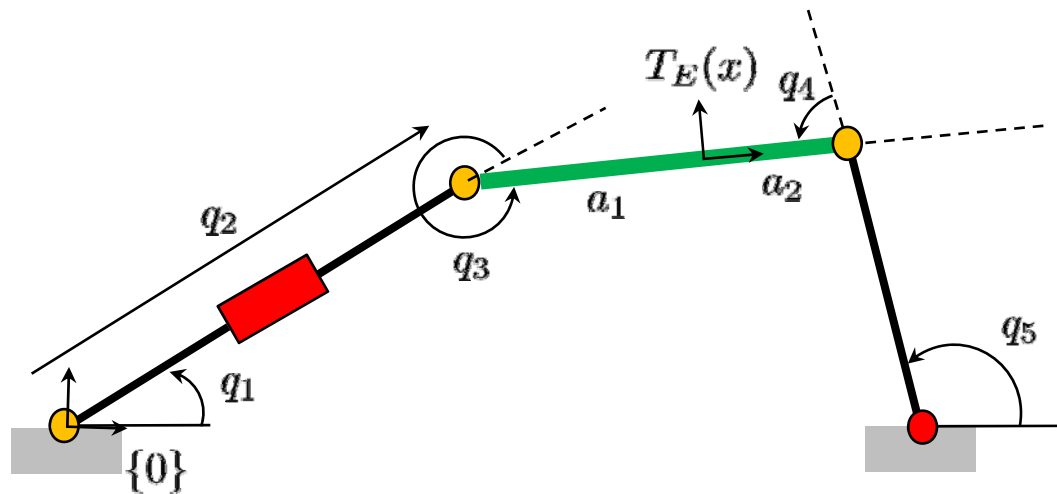
$$\tau_{\bar{A}} = J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = J_{\bar{A}}^T H^T (GH^T)^R (-w_E) + J_{\bar{A}}^T H^T Py = 0$$

Queste rappresentano $n_{\bar{A}}$ equazioni di vincolo.

In pratica quindi, per un dato wrench esterno w_E , esiste una infinità di possibili coppie ai giunti attuati τ_A che lo equilibrano pari alla dimensione dello spazio delle forze interne $\mathcal{N}(GH^T)$ meno le $n_{\bar{A}}$ condizioni. In definitiva: $c - m - n_{\bar{A}}$

Esempio: analisi della cinematica differenziale RPRRR planare

Specializziamo la metodologia appena sviluppata per il **caso dell'RPRRR** planare già visto.



Configurazioni del sistema: $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$, $n = 5$

Configurazione minima: con Grubler: $m \geq 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$

Si sceglie: $n_A = n_S = m = 2$

In particolare i giunti attuati e sensorizzati sono: $q_A = q_S = [q_2 \ q_5]^T$

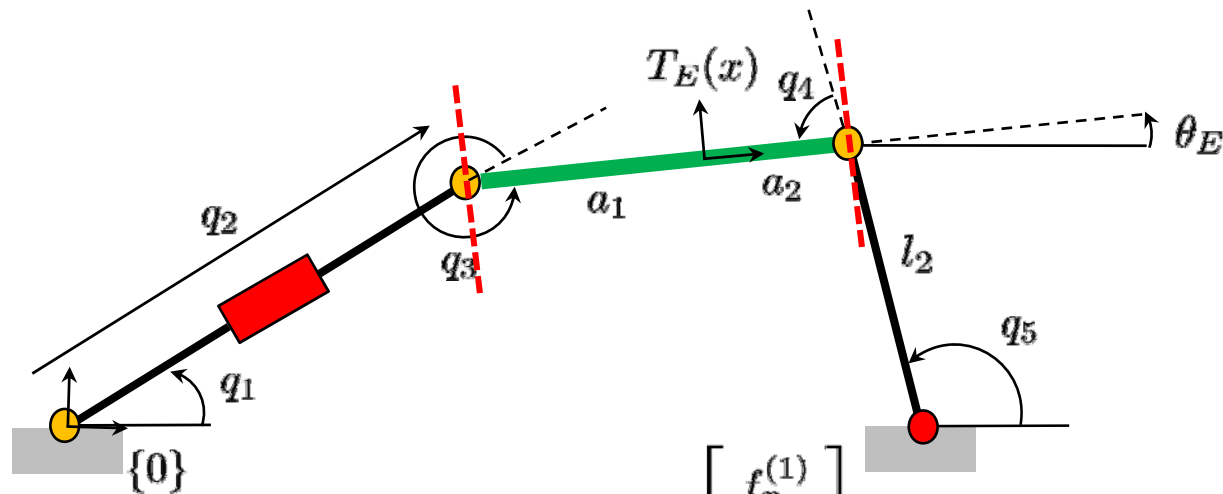
Quelli non attuati né sensorizzati sono: $q_{\bar{A}} = q_{\bar{S}} = [q_1 \ q_3 \ q_4]^T$

Tra l'altro:

$$S_A = S_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_{\bar{A}} = S_{\bar{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Config. end-effector: $x = (x_E, y_E, \theta_E)$

Tagliamo sui giunti e scriviamo il Jacobiano della prima gamba



In **termini statici**: $\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = J_1^T w_1 \quad w_1 = \begin{bmatrix} f_x^{(1)} \\ f_y^{(1)} \\ m_z^{(1)} \end{bmatrix}$

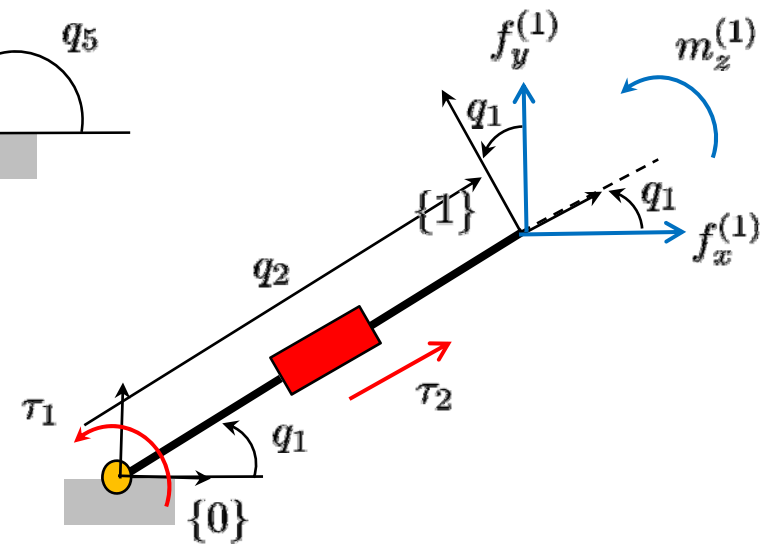
Allora il Jacobiano trasp. risulta:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_2 S_{q_1} & q_2 C_{q_1} & 1 \\ C_{q_1} & S_{q_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^{(1)} \\ f_y^{(1)} \\ m_z^{(1)} \end{bmatrix}$$

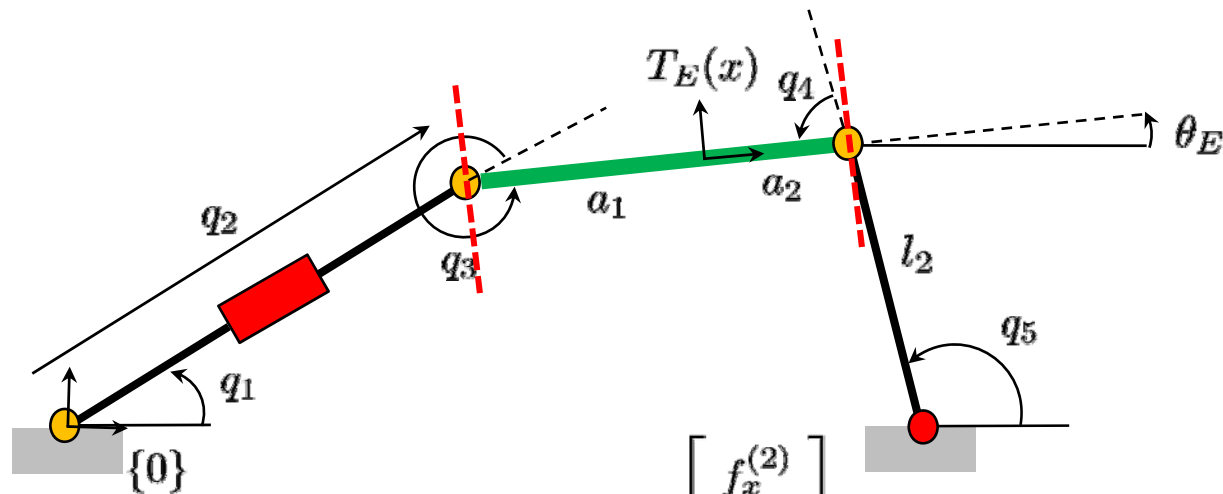
In **termini cinematici** quindi:

$$\xi_1(q) = \begin{bmatrix} v_x^{(1)} \\ v_y^{(1)} \\ \omega_z^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_2 S_{q_1} & C_{q_1} \\ q_2 C_{q_1} & S_{q_1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$J_1(q) = \begin{bmatrix} -q_2 S_{q_1} & C_{q_1} \\ q_2 C_{q_1} & S_{q_1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Tagliamo sui giunti e scriviamo il Jacobiano della seconda gamba



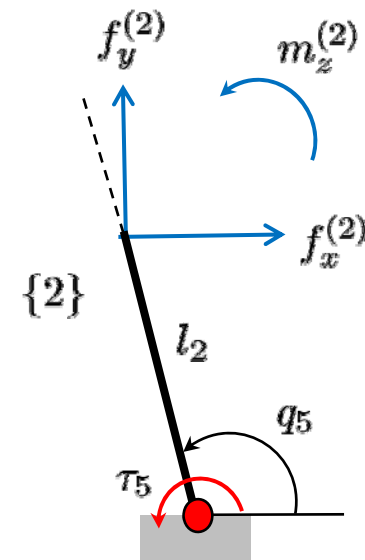
In **termini statici**: $\tau_5 = J_2^T w_2$ $w_2 = \begin{bmatrix} f_x^{(2)} \\ f_y^{(2)} \\ \hline m_z^{(2)} \end{bmatrix}$

Allora il Jacobiano trasp. risulta:

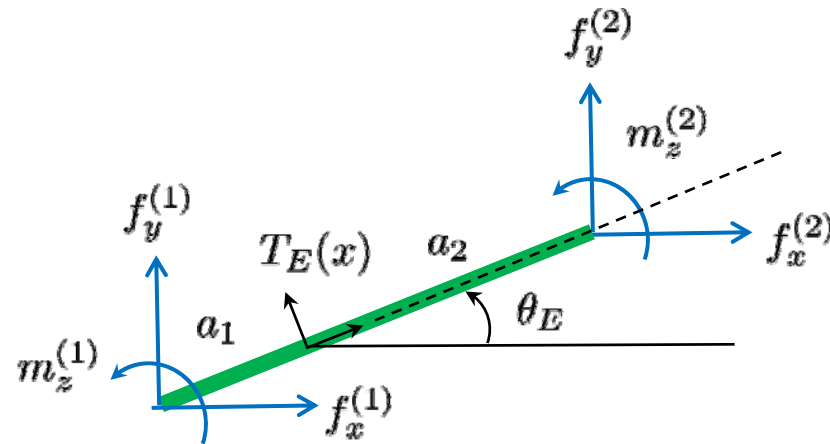
$$\tau_5 = \begin{bmatrix} -l_2 S_{q_1} & l_2 C_{q_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^{(2)} \\ f_y^{(2)} \\ \hline m_z^{(2)} \end{bmatrix}$$

In **termini cinematici** quindi:

$$\xi_2(q) = \begin{bmatrix} v_x^{(2)} \\ v_y^{(2)} \\ \hline \omega_z^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 S_{q_5} \\ l_2 C_{q_5} \\ \hline 1 \end{bmatrix} \dot{q}_5 \quad J_2(q) = \begin{bmatrix} -l_2 S_{q_5} \\ l_2 C_{q_5} \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$



Tagliamo sui giunti e costruiamo la matrice di grasp



La **matrice di grasp** G condensa l'effetto dei wrench ai giunti rispetto al polo E

$$w_E = Gw = [G_1 \mid G_2] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Le singole matrici di grasp risultano quindi:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 S_{\theta_E} & -a_1 C_{\theta_E} & 1 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_2 S_{\theta_E} & a_2 C_{\theta_E} & 1 \end{bmatrix} \quad w_E = \begin{bmatrix} f_x^{(E)} \\ f_y^{(E)} \\ m_z^{(E)} \end{bmatrix}$$

Globalmente perciò:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ a_1 S_{\theta_E} & -a_1 C_{\theta_E} & 1 & \vdots & -a_2 S_{\theta_E} & a_2 C_{\theta_E} & 1 \end{bmatrix}$$

Caratterizzazione dei vincoli rimossi fra gambe ed end-effector

Le coppie rotoidali che collegano le gambe all'end-effector concedono nel 2D dei moti il cui span è dato dai vettori

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici il cui nullo coincide con il range delle F_i sono date da:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La **matrice** $H \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ risulta quindi:

$$H = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0_{2 \times 3} \\ \hline 0_{2 \times 3} & H_2 \end{array} \right]$$

Il **Jacobiano complessivo** $J \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ risulta a sua volta:

$$J(q) = \left[\begin{array}{c|c} J_1(q) & 0_{3 \times 1} \\ \hline 0_{3 \times 2} & J_2(q) \end{array} \right] \quad \xi(q) = J(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix}$$

La **matrice di grasp trasposta** $G^T \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ risulta poi:

$$G^T = \left[\begin{array}{c} G_1^T \\ \hline G_2^T \end{array} \right]$$

Scrittura condensata dei vincoli sulle velocità'

Il vincolo fra le velocità ai giunti e la velocità dell'end-effector è scrivibile quindi come:

$$\left[HJ \mid -HG^T \right] \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0$$

Esplicitando la struttura a blocchi della matrice di vincolo con raggruppamento in base all'appartenenza ad una gamba:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} H_1 J_1 & 0_{2 \times 1} & -H_1 G_1^T \\ \hline 0_{2 \times 2} & H_2 J_2 & -H_2 G_2^T \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0$$

Esplicitando la struttura a blocchi con raggruppamento in base al fatto che i vincoli sono attuati/non attuati: $q_A = [q_2 \ q_5]^T$ $q_{\bar{A}} = q_1$

$$\left[HJ_{\bar{A}} \mid HJ_A \mid -HG^T \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_{\bar{A}} \\ \dot{q}_A \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0$$

Esplicitamente si ha:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -q_2 S_1 & C_1 & 0 \\ q_2 C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -l_2 S_5 \\ 0 & 0 & l_2 C_5 \end{array} \mid \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \mid \begin{array}{c} -a_1 S_{\theta_E} \\ a_1 C_{\theta_E} \\ a_2 S_{\theta} \\ -a_2 C_{\theta} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Discussione sulla struttura cineto-statica del manipolatore

Vincoli cinematici:

$$\begin{bmatrix} HJ_{\bar{A}} & HJ_A & -HG^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{\bar{A}} \\ \dot{q}_A \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -q_2 S_1 & C_1 & 0 & -1 & 0 & -a_1 S_{\theta_E} \\ q_2 C_1 & S_1 & 0 & 0 & -1 & a_1 C_{\theta_E} \\ 0 & 0 & -l_2 S_5 & -1 & 0 & a_2 S_{\theta_E} \\ 0 & 0 & l_2 C_5 & 0 & -1 & -a_2 C_{\theta_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equilibrio del manipolatore:

$$\begin{cases} \tau_{\bar{A}} = J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = 0 \\ \tau_A = J_A^T H^T \tilde{w} \\ w_E = -GH^T \tilde{w} \end{cases} \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} f_x^{(1)} \\ f_y^{(1)} \\ f_x^{(2)} \\ f_y^{(2)} \end{bmatrix}$$

La matrice di vincolo $A(q, x)$ ha rango pieno righe (=4), dunque $\mathcal{N}(A^T) = 0$, ossia sistema è **isostatico**.

Una base delle forze interne si calcola come base del $\mathcal{N}(GH^T)$.

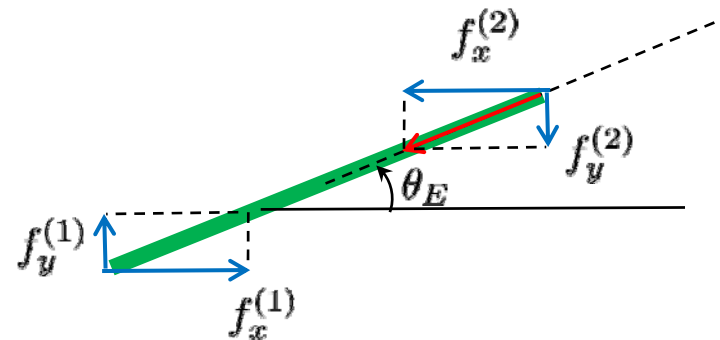
$$GH^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_1 S_{\theta_E} & -a_1 C_{\theta_E} & -a_2 S_{\theta_E} & a_2 C_{\theta_E} \end{bmatrix} \quad \mathcal{N}(GH^T) = \text{span} \begin{bmatrix} C_{\theta_E} \\ S_{\theta_E} \\ -C_{\theta_E} \\ -S_{\theta_E} \end{bmatrix}$$

Forze interne

$$\begin{cases} \tau_{\bar{A}} &= J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = 0 \\ \tau_A &= J_A^T H^T \tilde{w} \\ w_E &= -GH^T \tilde{w} \end{cases} \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} f_x^{(1)} \\ f_y^{(1)} \\ f_x^{(2)} \\ f_y^{(2)} \end{bmatrix}$$

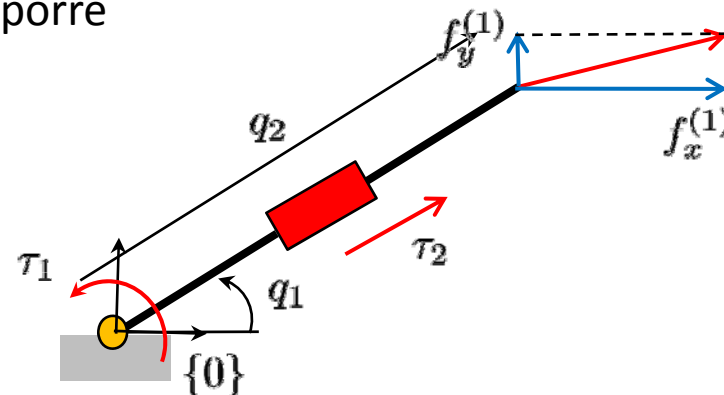
In effetti, le forze interne corrispondenti al $N(GH^T)$ corrispondono ad una azione netta sull'end-effector pari a zero.

$$N(GH^T) = \text{span} \begin{bmatrix} C_{\theta_E} \\ S_{\theta_E} \\ -C_{\theta_E} \\ -S_{\theta_E} \end{bmatrix}$$



Attenzione però al fatto che, per poter esercitare delle forze interne in una configurazione generica, occorrerebbe che anche il primo giunto fosse attuato. Dato che nel nostro esempio non lo è, si deve imporre che sia verificata

$$\tau_{\bar{A}} = J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = 0$$



Forze interne

$$\begin{cases} \tau_{\bar{A}} &= J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = 0 \\ \tau_A &= J_A^T H^T \tilde{w} \\ w_E &= -GH^T \tilde{w} \end{cases} \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} f_x^{(1)} \\ f_y^{(1)} \\ f_x^{(2)} \\ f_y^{(2)} \end{bmatrix}$$

Nel caso specifico

$$\tau_{\bar{A}} = J_{\bar{A}}^T H^T \tilde{w} = 0$$

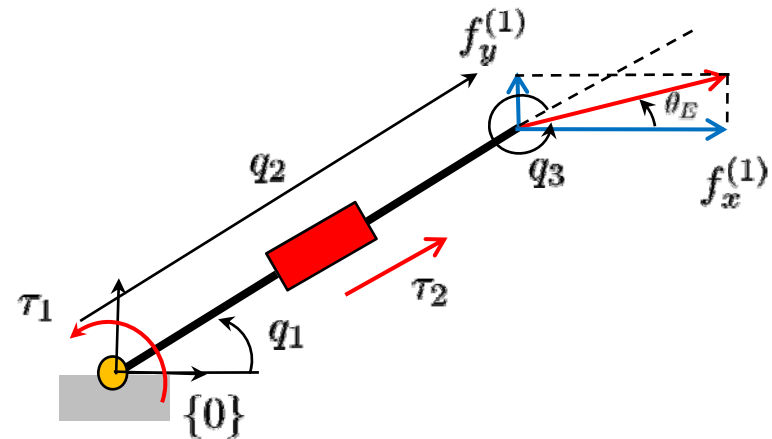
si esplicita nella

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} -q_2 S_{q_1} & q_2 C_{q_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\theta_E} \\ S_{\theta_E} \\ -C_{\theta_E} \\ -S_{\theta_E} \end{bmatrix} = 0$$

Quindi:

$$q_2 (S_{\theta_E} C_{q_1} - C_{\theta_E} S_{q_1}) = 0 \rightarrow q_2 \sin(\theta_E - q_1) = 0 \rightarrow q_2 \sin(q_3) = 0 \quad q_3 = 0, \quad q_3 = \pi$$

Dunque, per poter esercitare delle forze interne essendo il primo giunto non attuato, il manipolatore in questione deve trovarsi in una configurazione singolare.



Scrittura della cinematica con base del $\mathcal{N}(A)$

Vincoli cinematici:

$$\begin{bmatrix} HJ_{\bar{A}} & HJ_A & -HG^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{\bar{A}} \\ \dot{q}_A \\ \dot{\xi}_E \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -q_2 S_1 & C_1 & 0 & -1 & 0 & -a_1 S_{\theta_E} \\ q_2 C_1 & S_1 & 0 & 0 & -1 & a_1 C_{\theta_E} \\ 0 & 0 & -l_2 S_5 & -1 & 0 & a_2 S_{\theta_E} \\ 0 & 0 & l_2 C_5 & 0 & -1 & -a_2 C_{\theta_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si può quindi esplicitare il legame fra le velocità ai giunti e la velocità dell'e.-e. scrivendo

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \\ n_{31} & n_{32} \\ n_{41} & n_{42} \\ n_{51} & n_{52} \\ n_{61} & n_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = N\lambda \quad AN = 0$$

Se, ad es., interessa che le pseudo-velocità corrispondano proprio alle velocità attuate, oppure alla velocità lineare dell'e.-e., basta imporre rispettivamente

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \dot{q}_2; & \begin{bmatrix} n_{21} & n_{22} \\ n_{31} & n_{32} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 &= \dot{q}_5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \dot{x}_E; & \begin{bmatrix} n_{41} & n_{42} \\ n_{51} & n_{52} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 &= \dot{y}_E; \end{aligned}$$

Scrittura della cinematica come base del $\mathcal{N}(A)$

Nel primo caso si ha esplicitamente:

$$\begin{bmatrix} HJ_{\bar{A}} & HJ_A & -HG^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_A \\ \dot{\xi}_E \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -q_2 S_1 & C_1 & 0 & -1 & 0 & -a_1 S_{\theta_E} \\ q_2 C_1 & S_1 & 0 & 0 & -1 & a_1 C_{\theta_E} \\ 0 & 0 & -l_2 S_5 & -1 & 0 & a_2 S_{\theta_E} \\ 0 & 0 & l_2 C_5 & 0 & -1 & -a_2 C_{\theta_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ovvero:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\cot(q_3)}{q^2} & -\frac{l_2 \csc(q_3) \sin(q_5 - \theta_e)}{q^2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{a_2 \csc(q_3) \sin(\theta_e)}{a_1 + a_2} & l_2 \csc(q_3) \left(\cos(\theta_e) \sin(q_1) \sin(q_5) - \frac{(a_2 \cos(q_5) \sin(q_1) + a_1 \cos(q_1) \sin(q_5)) \sin(\theta_e)}{a_1 + a_2} \right) \\ -\frac{a_2 \cos(\theta_e) \csc(q_3)}{a_1 + a_2} & l_2 \csc(q_3) \left(\cos(q_1) \cos(q_5) \sin(\theta_e) - \frac{\cos(\theta_e) (a_1 \cos(q_5) \sin(q_1) + a_2 \cos(q_1) \sin(q_5))}{a_1 + a_2} \right) \\ \frac{\csc(q_3)}{a_1 + a_2} & -\frac{l_2 \csc(q_3) \sin(q_1 - q_5)}{a_1 + a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$