Compito di Meccanica dei Robot – 05 Febbraio 2013

1) La Figura 1 mostra lo schema cinematico di un veicolo con due assali sterzanti. Gli assali possono ruotare, rispetto alla scocca di baricentro G, attorno a due assi verticali in corrispondenza dei pivot A e P. Su ciascun assale sono incernierate folli due ruote rigide che, in virtù del loro profilo a coltello, rotolano senza strisciamento trasversale né longitudinale rispetto al terreno (piano). Il sistema è mosso dalle azioni $\tau_a(t)$ e $\tau_p(t)$ di due attuatori come schematizzato in Figura. Il candidato introduca le quantità inerziali (masse e tensori di inerzia) dei vari corpi in base a considerazioni ponderate e risponda ai quesiti di seguito: (i) si scrivano le equazioni di vincolo cinematico per il sistema in esame e le si riportino in forma Pfaffiana; (ii) si scrivano l'energia cinetica T e l'energia potenziale U per il sistema non vincolato; (iii) si scrivano le equazioni di moto del sistema considerando opportunamente le azioni degli attuatori.

Si argomenti sul modo di variare delle equazioni del veicolo nel caso in cui esso sia posto su una tavola rotante (orizzontale) che ruota a velocità angolare costante.

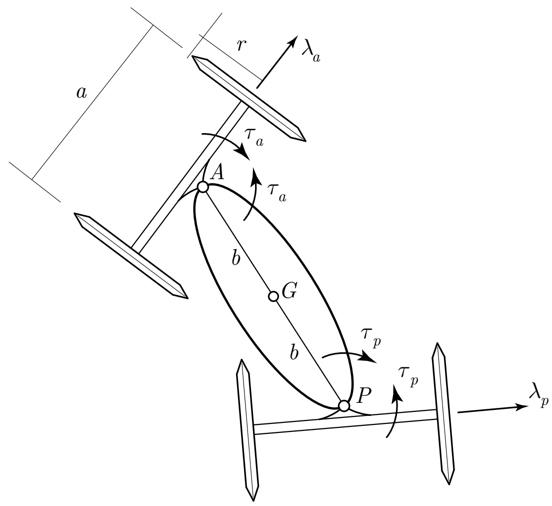


Figura 1: Schema cinematico di un veicolo a due assali sterzanti.

2) La Figura 2 mostra due frame, $\{A\}$ e $\{B\}$. $\{B\}$ è solidale ad un blocco rettangolare con origine in corrispondenza del vertice B, le cui coordinate in $\{A\}$ sono $(2, 6, 3)$. L'asse Z di $\{B\}$ è diretto come il segmento da B a C, ed è sul piano $BDCF$, che è parallelo al piano YZ di $\{A\}$. L'asse z di $\{B\}$ forma un angolo di 30° rispetto al segmento BF, con $F = (2, 4, 3)$. I punti M ed N sono solidali ad $\{A\}$ ed hanno le coordinate indicate in Figura 2. Il blocco è sottoposto, nell'ordine, a questa sequenza di spostamenti: (i) rotazione attorno a Z di $\{A\}$ di 30°; (ii) rotazione di 60° attorno ad un asse indicato dal segmento da M ad N; (iii) rotazione di 90° attorno al proprio asse y (asse y di $\{B\}$). Si determini la nuova posizione del vertice F del blocco nel frame $\{A\}$.

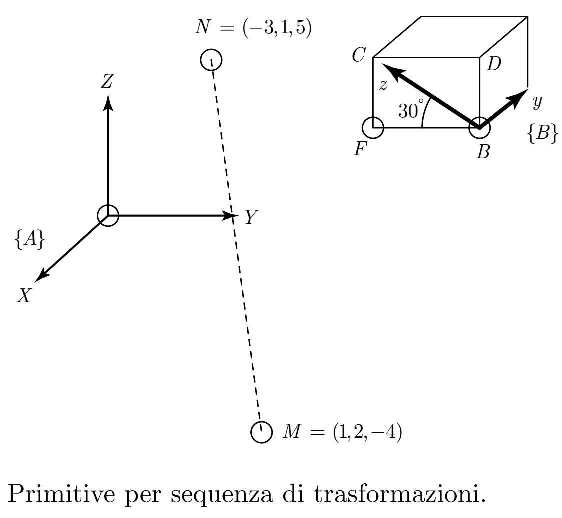
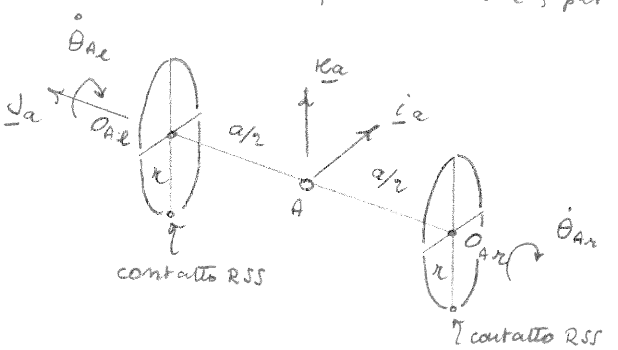


Figura 2: Primitive per sequenza di trasformazioni.

Consideriamo un assale (quello anteriore, per fissare le idee). A questo assale è solidale un sistema di versori $\{\underline{i}_a, \underline{j}_a, \underline{k}_a\}$



Scrivo la velocità del punto O_{Ar}

$$\underline{v}_{O_{Ar}} = \dot\theta_{Ar}\, r\, \underline{i}_a$$

Velocità angolare della ruota destra (right)

$$\underline{\omega}_{Ar} = \dot\theta_{Ar}\, \underline{j}_a + \dot\theta_A\, \underline{k}_a$$

Quindi, il twist della anteriore (A) destra (r, right) scritto rispetto a O_{Ar} è dato da

$$\underline{\xi}^{Ar}_{O_{Ar}} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_{Ar}} \\ \underline{\omega}_{Ar} \end{bmatrix}$$

Ripeto ragionamento per l'anteriore (A) sinistra (l, left).

Velocità del punto O_{Al}

$$\underline{v}_{O_{Al}} = \dot\theta_{Al}\, r\, \underline{i}_a$$

Velocità angolare della ruota sinistra (left)

$$\underline{\omega}_{Al} = \dot\theta_{Al}\, \underline{j}_a + \dot\theta_A\, \underline{k}_a$$

Nota bene che la velocità angolare di imbardata dell'assale è la componente di imbardata anche per le due ruote

Twist della anteriore (A) sinistra (l, left) scritto rispetto a O_{Al} è dato da

$$\underline{\xi}^{Al}_{O_{Al}} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_{Al}} \\ \underline{\omega}_{Al} \end{bmatrix}$$

A questo punto, considerando O_{Al} e O_{Ar} punti dell'assale, posso scrivere (per f.f. cinematica)

$$\underline{v}_{O_{Al}} = \underline{v}_{O_{Ar}} + \dot\theta_A\, \underline{k}_a \times \underline{O_{Ar}O_{Al}}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot\theta_{Al}\, r\, \underline{i}_a = \dot\theta_{Ar}\, r\, \underline{i}_a + \underbrace{\dot\theta_A\, \underline{k}_a \times a\, \underline{j}_a}_{-\dot\theta_A\, a\, \underline{i}_a}$$

Da cui, moltipl. scalarmente per $\underline{i}_a$:

$$\dot\theta_{Al}\, r = \dot\theta_{Ar}\, r - \dot\theta_a\, a \iff \boxed{\dot\theta_a = \frac{r}{a}\left[\dot\theta_{Ar} - \dot\theta_{Al}\right]}$$

queste formula, già trovate nel compito del 1.4.2011, ci dice come la vel. angolare di imbardata dipende dalle velocità angolari delle due ruote.

La velocità del punto centrale dell'assale (A) risulta utile successivamente poiché lì vi si attacca la piattaforma centrale. Il suo calcolo risulta:

$$\underline{v}_A = \underline{v}_{O_{Ar}} + \dot\theta_A \underline{k} \times \underline{O_{Ar}A} = \dot\theta_{Ar}\, r\, \underline{i}_a - \dot\theta_A \frac{a}{2}\, \underline{i}_a$$

con $\dot\theta_a = \frac{r}{a}\left(\dot\theta_{Ar} - \dot\theta_{Ae}\right)$ da cui

$$\underline{v}_A = \dot\theta_{Ar}\, r\, \underline{i}_a - \frac{r}{\cancel{a}}\left(\dot\theta_{Ar} - \dot\theta_{Ae}\right)\frac{\cancel{a}}{2}\, \underline{i}_a = \dot\theta_{Ar}\frac{r}{2}\, \underline{i}_a + \dot\theta_{Ae}\frac{r}{2}\, \underline{i}_a$$

ossia

$$\boxed{\underline{v}_A = \frac{r}{2}\left[\dot\theta_{Ar} + \dot\theta_{Ae}\right]\underline{i}_a}$$

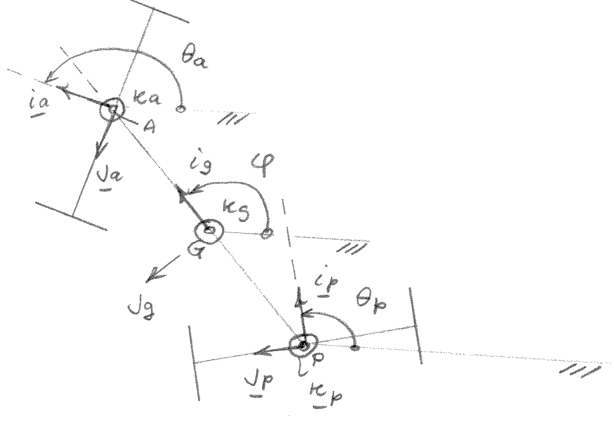
L'assale posteriore, definito un sistema di versori $\{\underline{i}_p, \underline{j}_p, \underline{k}_p\}$ con $\underline{k}_p = \underline{k}_a = \underline{k}$ solidale, vede queste relazioni (analoghe a quelle appena trovate)

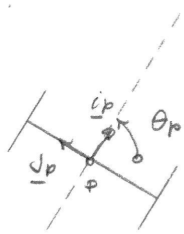
$$\boxed{\dot\theta_p = \frac{r}{a}\left[\dot\theta_{Pr} - \dot\theta_{Pe}\right]}$$

$$\boxed{\underline{v}_P = \frac{r}{2}\left[\dot\theta_{Pr} + \dot\theta_{Pe}\right]\underline{i}_p}$$

Adesso procediamo a scrivere le equazioni di vincolo fra i due assali collegati dalla piattaforma caratterizzate da velocità di imbardata $\dot\varphi\, \underline{k}$.

schema





$$\underline{v}_A = \underline{v}_P + \dot\varphi\, \underline{k}_g \times \underline{PA}$$

$$\frac{r}{2}\left(\dot\theta_{Ar} + \dot\theta_{Ae}\right)\underline{i}_a = \frac{r}{2}\left(\dot\theta_{pr} + \dot\theta_{pe}\right)\underline{i}_p + \dot\varphi\,(2b)\,\underline{j}_g$$

ma $\underline{i}_a = \begin{Bmatrix} \cos\theta_a \\ \sin\theta_a \end{Bmatrix}$ $\quad \underline{i}_p = \begin{Bmatrix} \cos\theta_p \\ \sin\theta_p \end{Bmatrix}$ $\quad \underline{j}_g = \begin{Bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{Bmatrix}$

da cui:

$$\frac{r}{2}\left(\dot\theta_{Ar} + \dot\theta_{Ae}\right)\cos\theta_a = \frac{r}{2}\left(\dot\theta_{pr} + \dot\theta_{pe}\right)\cos\theta_p + 2b\dot\varphi\,(-\sin\varphi)$$

$$\frac{r}{2}\left(\dot\theta_{Ar} + \dot\theta_{Ae}\right)\sin\theta_a = \frac{r}{2}\left(\dot\theta_{pr} + \dot\theta_{pe}\right)\sin\theta_p + 2b\dot\varphi\cos\varphi$$

Dunque, se considero di "partire" dai g.d.l. che rappresentano le rotazioni delle ruote $(\theta_{Ar}, \theta_{Al})$ $(\theta_{pr}, \theta_{pl})$ e delle loro velocità conosco tutto degli assali e scrivo le equi di vincolo fra i 2 assali coinvolgendo la φ e $\dot{\varphi}$.

$$\begin{cases} \frac{r}{2}\cos\theta_a \, \dot{\theta}_{Ar} + \frac{r}{2}\cos\theta_a \, \dot{\theta}_{Al} - \frac{r}{2}\cos\theta_p \, \dot{\theta}_{pr} - \frac{r}{2}\cos\theta_p \, \dot{\theta}_{pl} + 2b\sin\varphi \, \dot{\varphi} = 0 \\ \frac{r}{2}\sin\theta_a \, \dot{\theta}_{Ar} + \frac{r}{2}\sin\theta_a \, \dot{\theta}_{Al} - \frac{r}{2}\sin\theta_p \, \dot{\theta}_{pr} - \frac{r}{2}\sin\theta_p \, \dot{\theta}_{pl} - 2b\cos\varphi \, \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

In forma Pfaffiana quindi:

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2}\cos\theta_a & \frac{r}{2}\cos\theta_a & -\frac{r}{2}\cos\theta_p & -\frac{r}{2}\cos\theta_p & 2b\sin\varphi \\ \frac{r}{2}\sin\theta_a & \frac{r}{2}\sin\theta_a & -\frac{r}{2}\sin\theta_p & -\frac{r}{2}\sin\theta_p & -2b\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{Ar} \\ \dot{\theta}_{Al} \\ \dot{\theta}_{pr} \\ \dot{\theta}_{pl} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questa scelta implica che abbiamo selezionato come configurazione

$\underline{q} = [\theta_{Ar} \;\; \theta_{Al} \;\; \theta_{pr} \;\; \theta_{pl} \;\; \varphi]^T$

Questo ci costringe a non far mai apparire nelle equazioni θ_a e θ_p e le loro derivate e quindi di usare sempre esplicitamente $\dot{\theta}_a = \frac{r}{a}[\dot{\theta}_{Ar} - \dot{\theta}_{Al}]$ e $\dot{\theta}_p = \frac{r}{a}[\dot{\theta}_{pr} - \dot{\theta}_{pl}]$.

Alternativamente potrei usare come config.

$\underline{q} = [\theta_{Ar} \;\; \theta_{Al} \;\; \theta_{pr} \;\; \theta_{pl} \;\; \varphi \;\; \theta_a \;\; \theta_p]^T$ $*$

cosicché, oltre alle 2 equi sopra avrei anche $\dot{\theta}_a = \dot{\theta}_a(\dot{\theta}_{Ar}, \dot{\theta}_{Al})$ e $\dot{\theta}_p = \dot{\theta}_p(\dot{\theta}_{pr}, \dot{\theta}_{pl})$ ovvia avrei

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{r}{2}\cos\theta_a & \frac{r}{2}\cos\theta_a & -\frac{r}{2}\cos\theta_p & -\frac{r}{2}\cos\theta_p & 2b\sin\varphi & 0 & 0 \\ \frac{r}{2}\sin\theta_a & \frac{r}{2}\sin\theta_a & -\frac{r}{2}\sin\theta_p & -\frac{r}{2}\sin\theta_p & -2b\cos\varphi & 0 & 0 \\ \frac{r}{a} & -\frac{r}{a} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{a} & -\frac{r}{a} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A(\underline{q})} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{Ar} \\ \dot{\theta}_{Al} \\ \dot{\theta}_{pr} \\ \dot{\theta}_{pl} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se impiego questa soluzione allora questa è $A(\underline{q})$ con $\underline{q}^*$.

Adesso posso scrivere l'energia cinetica e potenziale del sistema.

considero che i corpi che hanno inerzia sono:

•) ruote (es. Ar) m_{Ar}, J_{ja} (mom. d'inerzia attorno asse rotazione)

J_{ka} (mom d'inerzia d'imbardata)

•) assale (es. A) solo massa concentrata in A m_A

•) piattaforma m_g ; J_g (mom d'inerzia d'imbardata)

Allore calcolo energia cinetica T del sistema

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m_{Ar} r^2 \dot{\theta}_{Ar}^2 + \frac{1}{2} J_{ja} \dot{\theta}_{Ar}^2 + \frac{1}{2} J_{ka} \dot{\theta}_A^2}_{\text{ruota } Ar} +$$

$$+ \ldots \text{ termini analoghi per: } Ae, Pr, Pe \; +$$

$$+ \frac{1}{2} m_A \left(\frac{r}{2}\right)^2 \left(\dot{\theta}_{Ar} + \dot{\theta}_{Ae}\right)^2 + \frac{1}{2} m_p \left(\frac{r}{2}\right)^2 \left(\dot{\theta}_{Pr} + \dot{\theta}_{Pe}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_g \|\underline{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} J_g \dot{\varphi}^2$$

con $\underline{v}_G = \underline{v}_A + \dot{\varphi}\, b\, \underline{v}_g$

L'energia potenziale del sistema è costante e può essere assunta nulla nella config iniziale.

Calcolo della componente Lagrangiana delle forze attive dovuta agli attuatori

Ci saranno 7 eq.ni differenziali del 2° ordine + 4 eq.ni di A del 1° ordine così:

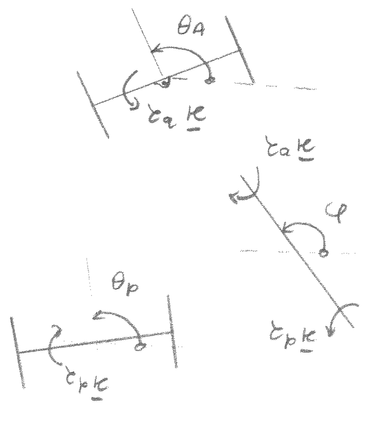
$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \right]^T + A^T \underline{\lambda} = \underline{Q}_{mc} \\ A(\underline{q})\, \dot{\underline{q}} = \underline{0} \end{cases}$$

Il contributo delle $\underline{Q}_{mc} = \left[Q_{\theta_{Ar}} \; Q_{\theta_{Ae}} \; \ldots \; Q_{\varphi} \; \ldots \; Q_{\theta_p} \right]^T$ si calcola così:

$$Q_{q_h} = \tau_a \underline{k} \cdot \frac{\partial \theta_A \underline{k}}{\partial q_h} - \tau_a \underline{k} \cdot \frac{\partial \varphi \underline{k}}{\partial q_h} + \tau_p \underline{k} \cdot \frac{\partial \varphi \underline{k}}{\partial q_h} - \tau_p \underline{k} \cdot \frac{\partial \theta_p \underline{k}}{\partial q_h}$$

con q_h che assume valori

$\theta_{Ar}, \theta_{Ae}, \ldots, \varphi, \ldots, \theta_p$

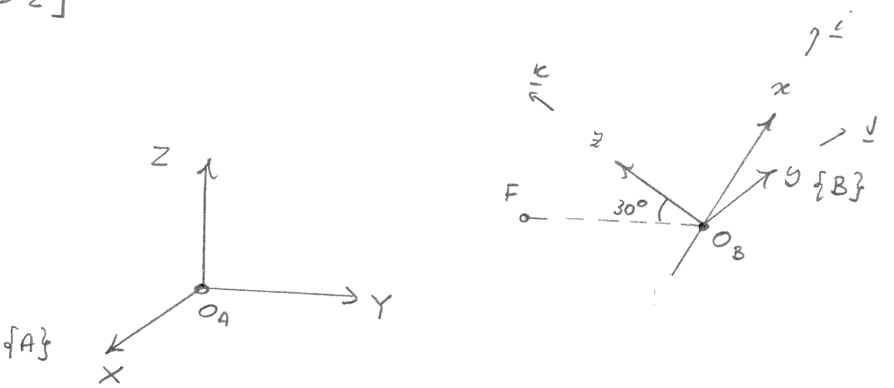


In dettaglio si avrà:

$$Q_{\theta_{Ar}} = 0 \; ; \quad Q_{\theta_{Ae}} = 0 \; ; \quad Q_{\theta_{Pr}} = 0 \; ; \quad Q_{\theta_{Pe}} = 0 \; ;$$

$$Q_\varphi = \tau_p - \tau_a \; ; \quad Q_{\theta_A} = \tau_a \; ; \quad Q_{\theta_P} = -\tau_p .$$

[ESERCIZIO 2]



$$\begin{cases} \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(30°) = 1/2 \end{cases}$$

$$[\underline{O_A O_B}]_a = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}; \qquad [\underline{O_A F}]_a = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$[\underline{j}]_a = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [\underline{k}]_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{bmatrix}; \quad [\underline{i}]_a = [\underline{j}]_a \times [\underline{k}]_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$R_{ab}(0) = \begin{Bmatrix} | & | & | \\ [\underline{i}]_a & [\underline{j}]_a & [\underline{k}]_a \\ | & | & | \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{Bmatrix}$$

$$[\underline{O_A O_B}(0)]_a = \begin{Bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$g_{ab}(0) = \begin{Bmatrix} R_{ab}(0) & [\underline{O_A O_B}(0)]_a \\ \underline{0}^T & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{p_a} = g_{ab} \, \overline{p_b} \qquad \text{ossia} \qquad \overline{p_b} = g_{ab}^{-1} \, \overline{p_a}$$

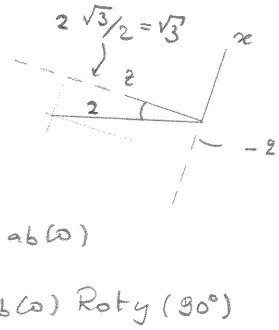
Quindi

$$[\overline{\underline{O_B} F}]_b = g_{ab}(0)^{-1} \, [\overline{\underline{O_A} F}]_a = \begin{Bmatrix} 0 & 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -3 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 & -3/2 + 3\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ossia

$$[\underline{O_B F}]_b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

anche per semplice ispezione



Allora la sequenza di rotazioni è:

0. $g_{ab}(0)$
1. $\mathrm{Rot}Z(30°) \; g_{ab}(0)$
2. $\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{MN}}(60°) \; \mathrm{Rot}Z(30°) \; g_{ab}(0)$
3. $\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{MN}}(60°) \; \mathrm{Rot}Z(30°) \; g_{ab}(0) \; \mathrm{Rot}y(90°)$

1. $\rightarrow \mathrm{Rot}Z(30°) = \begin{Bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 & 0 & 0 \\ \sin 30° & \cos 30° & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$

2. $\rightarrow \mathrm{Rot}_{\overrightarrow{MN}}(60°)$: vettore $\underline{MN} = [O_A\underline{N} - O_A\underline{M}]_a = [O_A\underline{N}]_a - [O_A\underline{M}]_a = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{\text{versore}}}$ $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\underline{MN}}{\|\underline{MN}\|} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2\sqrt{2}}{7} \\ -\dfrac{1}{7\sqrt{2}} \\ \dfrac{9}{7\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{MN}}(60°) = \begin{Bmatrix} 0.581633 & -0.766928 & -0.271155 & 0.867602 \\ 0.807744 & 0.505102 & 0.304009 & 1.39809 \\ -0.0961917 & -0.395845 & 0.913265 & 0.540844 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

3. $\rightarrow \mathrm{Rot}_y(90°) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Dunque:

$$g_{ab} = \mathrm{Rot}_{\overrightarrow{MN}}(60°)\ \mathrm{Rot}Z(30°)\ g_{ab}(0)\ \mathrm{Rot}_y(90°) = \begin{Bmatrix} -0.6914 & -0.1202 & -0.7123 & -5.4353 \\ -0.1229 & -0.9590 & 0.2800 & 4.4156 \\ -0.7118 & 0.2812 & 0.6435 & 0.9499 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Dunque le nuove coordinate di F in $\{A\}$ sono:

$$g_{ab} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.9776 \\ 5.0236 \\ 2.7765 \\ 1 \end{Bmatrix}$$