

Cinematica differenziale e statica di manipolatori seriali

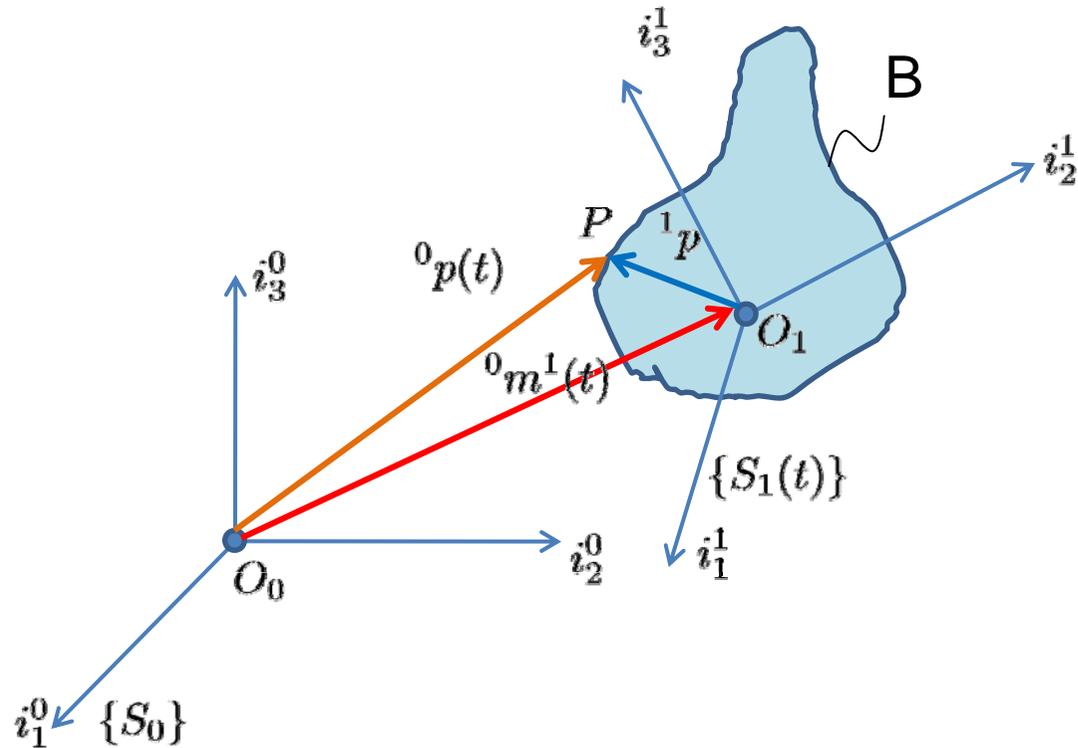
Robotica I

Marco Gabiccini



A.A. 2009/2010 LS Ing. Meccanica ed Automazione

Cinematica differenziale del corpo rigido



Rototraslazione definita da: ${}^0m^1(t)$ e ${}^0R_1(t)$.

Consideriamo legame delle coordinate di un punto $P \in \mathcal{B}$ in funzione del tempo t

$${}^0p(t) = {}^0m^1(t) + {}^0R_1(t) {}^1p \Leftrightarrow {}^1p = {}^0R_1^T(t) ({}^0p(t) - {}^0m^1(t))$$

Derivando rispetto al tempo la prima: ${}^0\dot{p}(t) = {}^0\dot{m}^1(t) + {}^0\dot{R}_1(t) {}^1p$.

Sostituendo la seconda: ${}^0\dot{p}(t) = {}^0\dot{m}^1(t) + {}^0\dot{R}_1(t) {}^0R_1^T(t) ({}^0p(t) - {}^0m^1(t))$

Da form. fond. cinematica del corpo rigido: $v_P = v_{O_1} + {}^0\omega_1 \times (P - O_1)$

Derivata di una matrice di rotazione

Per una matrice di rotazione:

$${}^0R_1 {}^0R_1^T = I$$

Ipotizzando la dipendenza dal tempo, e derivando rispetto al tempo:

$${}^0\dot{R}_1 {}^0R_1^T + {}^0R_1 {}^0\dot{R}_1^T = 0 \quad \rightarrow \quad {}^0\dot{R}_1 {}^0R_1^T = -{}^0R_1 {}^0\dot{R}_1^T = -({}^0\dot{R}_1 {}^0R_1^T)^T$$

Ma allora la matrice ${}^0\dot{R}_1 {}^0R_1^T$ è antisimmetrica. Il vettore ${}^0\omega_1$ tale che

$${}^0\dot{R}_1 {}^0R_1^T = S({}^0\omega_1) = {}^0\hat{\omega}_1$$

è detto velocità angolare. Questa formula è operativa per il calcolo di ${}^0\hat{\omega}_1$

Ovviamente questo risultato è in accordo con struttura tipica della formula fondamentale della cinematica del corpo rigido.

La derivata di una matrice di rotazione risulta (soluz. con exp. valida solo se ${}^0\hat{\omega}_1$ costante)

$${}^0\dot{R}_1 = {}^0\hat{\omega}_1 {}^0R_1, \quad \rightarrow \quad {}^0R_1(t) = e^{{}^0\hat{\omega}_1 t} {}^0R_1(0)$$

Esplicitamente, la matrice antisimmetrica della velocità angolare è espressa da:

$$S({}^0\omega_1) = {}^0\hat{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad {}^0\omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Esempio di calcolo della velocità' angolare di un moto rigido

Consideriamo un moto costituito da una rotazione attorno all'asse z descritto come:

$${}^0p(t) = {}^0R_1(t) {}^1p, \quad {}^0R_1(t) = \text{Rot}(z, \alpha t)$$

Si ricorda che esplicitamente:

$$\text{Rot}(z, \alpha t) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In base alla definizione, la matrice antisimmetrica della velocità angolare risulta:

$${}^0\hat{\omega}_1 = {}^0\dot{R}_1 {}^0R_1^T = \alpha \begin{bmatrix} -\sin(\alpha t) & -\cos(\alpha t) & 0 \\ \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) & 0 \\ -\sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perciò la velocità angolare di questo moto rigido risulta:

$${}^0\omega_1 = ({}^0\hat{\omega}_1)^\vee = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

La velocità di un punto di coordinate ${}^0p(t)$ risulta quindi:

$${}^0\dot{p}(t) = {}^0\dot{R}_1 {}^1p = {}^0\dot{R}_1 {}^0R_1^T {}^0p(t) = {}^0\hat{\omega}_1 {}^0p(t) = {}^0\omega_1 \times {}^0p(t)$$

L'integrale del vettore velocità' angolare non ha significato fisico

Esempio: consideriamo oggetto con orientamento noto rispetto alla terna base all'istante $t = 0$. Si assegnino le seguenti leggi temporali al vettore ω :

$$\text{A) } \omega = [\pi/2 \ 0 \ 0]^T \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \omega = [0 \ \pi/2 \ 0]^T \quad 1 < t \leq 2$$

$$\text{B) } \omega = [0 \ \pi/2 \ 0]^T \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \omega = [\pi/2 \ 0 \ 0]^T \quad 1 < t \leq 2$$

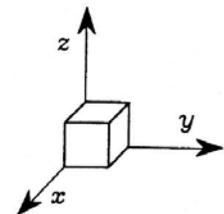
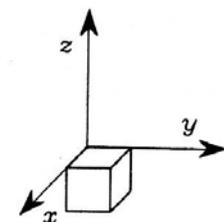
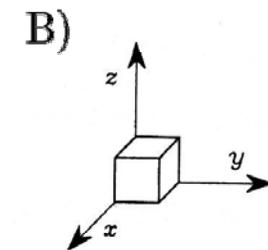
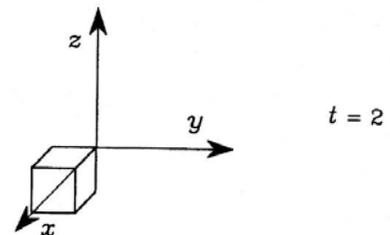
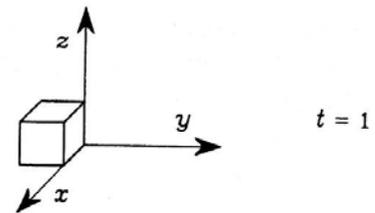
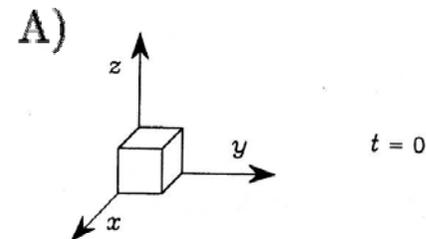
L'integrale di ω fornisce lo stesso risultato in entrambi i casi:

$$\int_0^2 \omega dt = [\pi/2 \ \pi/2 \ 0]^T$$

Ma alle due leggi orarie corrispondono orientamenti ben diversi!

L'integrale di omega non ha significato fisico.

In termini analitici la forma differenziale ωdt non è un differenziale esatto!



Cinematica differenziale di un corpo rigido

Dunque, la velocità di P (componenti in S_0) risulta:

$${}^0\dot{p}(t) = {}^0\dot{m}^1(t) + {}^0\hat{\omega}_1 ({}^0p(t) - {}^0m(t)^1)$$

Si poteva procedere anche dalla forma omogenea:

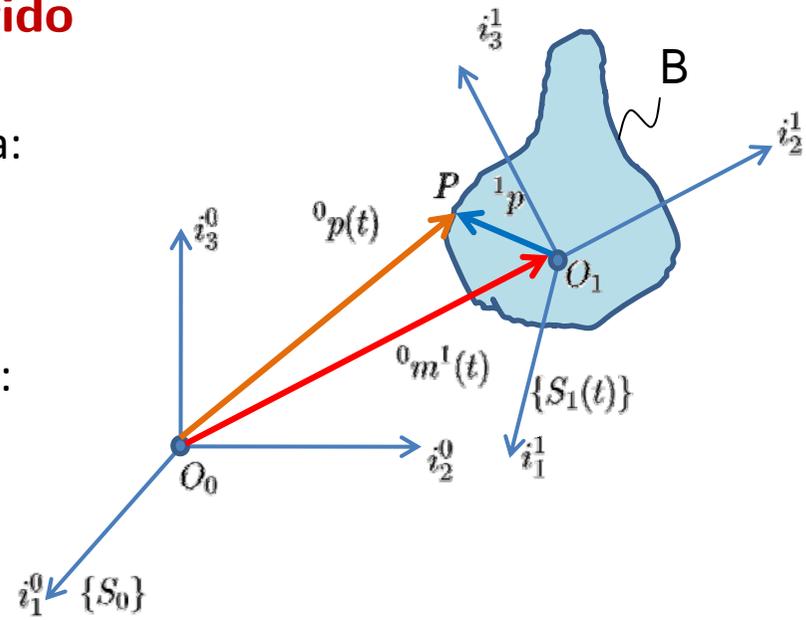
$${}^0\bar{p} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0m^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^1\bar{p} = {}^0A_1 {}^1\bar{p}$$

derivando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\bar{p}} &= {}^0\dot{A}_1 {}^1\bar{p} = {}^0\dot{A}_1 {}^0A_1^{-1} {}^0\bar{p} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{R}_1 & {}^0\dot{m}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0R_1^T & -{}^0R_1^T {}^0m^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^0\bar{p} \\ &= \begin{bmatrix} {}^0\dot{R}_1 {}^0R_1^T & -{}^0\dot{R}_1 {}^0R_1^T {}^0m^1 + {}^0\dot{m}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} {}^0\bar{p} = \begin{bmatrix} {}^0\hat{\omega}_1 & -{}^0\hat{\omega}_1 {}^0m^1 + {}^0\dot{m}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} {}^0\bar{p} = {}^0\hat{\xi}_1 {}^0\bar{p} \end{aligned}$$

da cui risulta implicitamente definita la mappa ${}^0\hat{\xi}_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che fornisce la velocità del punto P, in coordinate omogenee in S_0 prese in ingresso le sue coordinate omogenee ancora in S_0 . Le coordinate cartesiane (le prime 3) risultano ancora:

$${}^0\dot{p}(t) = {}^0\hat{\omega}_1 {}^0p - {}^0\hat{\omega}_1 {}^0m^1 + {}^0\dot{m}^1 = {}^0\dot{m}^1(t) + {}^0\hat{\omega}_1 ({}^0p(t) - {}^0m(t)^1)$$



Descrizione globale della cinematica diff. di un corpo rigido

Come visto, per descrivere completamente la cinematica di un corpo rigido è sufficiente dare la velocità di un suo punto qualsiasi e la sua velocità angolare.

Introduciamo pertanto una scrittura che raccoglie queste informazioni in una unica variabile che sarà detta **velocità generalizzata**, o **twist**.

Se prendiamo come punto di riferimento O_1 , il twist che ne risulta è dato da:

$$\xi_{O_1} = \begin{bmatrix} v_{O_1} \\ \hline {}^0\omega_1 \end{bmatrix}$$

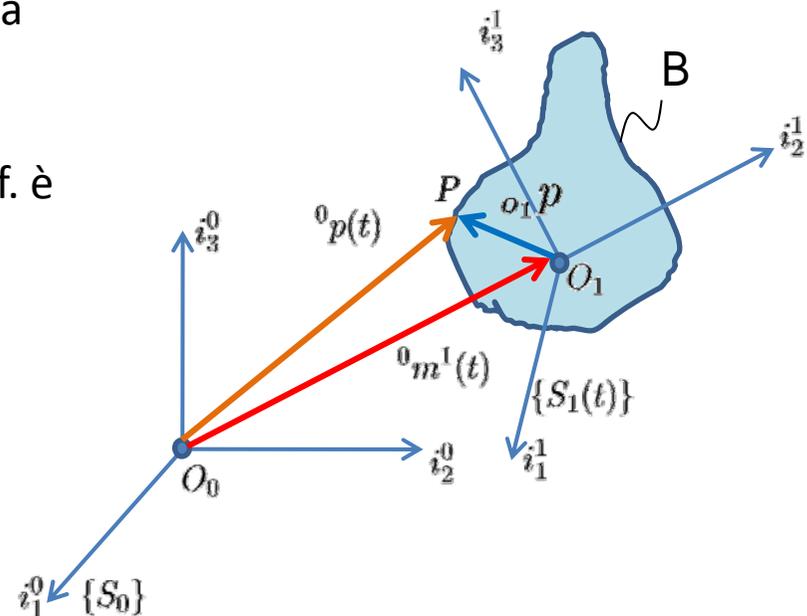
Dato che la velocità di P è legata a quella di O_1 da

$$v_P = v_{O_1} + {}^0\omega_1 \times {}_{O_1}p = v_{O_1} - {}_{O_1}\hat{p} {}^0\omega_1$$

la velocità generalizzata che usa P come p.to di rif. è

$$\xi_P = \begin{bmatrix} v_P \\ \hline {}^0\omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & -{}_{O_1}\hat{p} \\ \hline 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{O_1} \\ \hline {}^0\omega_1 \end{bmatrix} = M_{P,O_1} \xi_{O_1}$$

La relazione tra velocità generalizzate in punti diversi dello stesso corpo rigido in moto è dunque lineare tramite la M_{P,O_1}



Osservazione sulla velocità generalizzata

Si osservi che la velocità generalizzata è una grandezza vettoriale formata da componenti fisicamente disomogenee (velocità lineari ed angolari).

Questo comporta che non abbia senso fisico definire un “prodotto interno” tra velocità generalizzate, in generale **screws**.

La grandezza $\xi_a^T \xi_b$ sarebbe infatti la somma di grandezze disomogenee.

Di conseguenza non sono definiti né il concetto di angolo né di ortogonalità tra velocità generalizzate, e neppure ha senso parlare di una norma per queste grandezze.

Vedremo più avanti come si possono definire concetti analoghi a questi ma con un preciso senso fisico fra due classi di **screws** “particolari” (ossia **twists** e **wrenches**)

Asse elicoidale del moto di un corpo rigido

Il generale l'atto di moto di un corpo rigido è quindi rappresentabile con la velocità generalizzata di un suo qualsiasi punto.

Al variare del punto considerato, ci chiediamo se esiste uno o più punti dello spazio mobile solidale al corpo rigido per cui la velocità lineare v_M sia allineata alla velocità angolare ${}^0\omega_1$, e quindi si possa scrivere $v_M = h {}^0\omega_1$, con h passo.

In generale per un punto P :

$$v_P = v_{O_1} + {}^0\omega_1 \times {}_{o_1}p$$

Per il punto M , piede della perp. a ${}^0\omega_1$ per O_1 :

$$v_M = h {}^0\omega_1 = v_{O_1} + {}^0\omega_1 \times {}_{o_1}m$$

Moltiplicando vettorialmente a sinistra per ${}^0\omega_1$

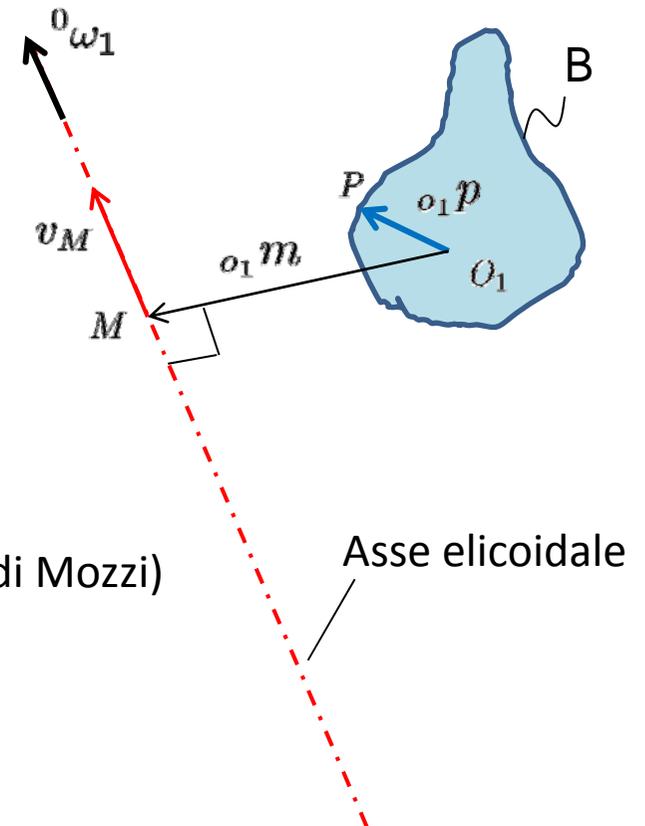
$$\begin{aligned} {}^0\omega_1 \times v_M = 0 &= {}^0\omega_1 \times v_{O_1} + {}^0\omega_1 \times ({}^0\omega_1 \times {}_{o_1}m) \\ 0 &= {}^0\omega_1 \times v_{O_1} - {}_{o_1}m \|\| {}^0\omega_1 \|\|^2 \end{aligned}$$

da cui si ricava un punto dell'asse elicoidale del moto (asse di Mozzi)

$$\boxed{{}_{o_1}m = \frac{{}^0\omega_1 \times v_{O_1}}{\|\| {}^0\omega_1 \|\|^2}}$$

Il passo del moto risulta definito da:

$$\boxed{h = \frac{({}^0\omega_1)^T v_M}{\|\| {}^0\omega_1 \|\|^2}}$$



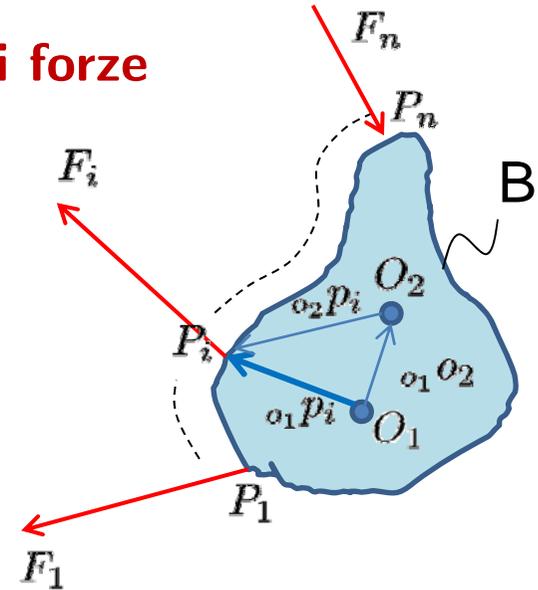
Risultante e momento risultante di un sistema di forze

Consideriamo un corpo rigido ed un sistema di forze F_i applicate nei punti P_i del corpo stesso.

La risultante ed il momento risultante rispetto al polo O_1 sono definiti da:

$$\sum_i F_i \stackrel{\text{def}}{=} F$$

$$\sum_i {}_{o_1}p_i \times F_i \stackrel{\text{def}}{=} M_{O_1}$$



Il momento risultante rispetto ad un polo diverso O_2 (arbitrario) risulta dato da:

$$M_{O_2} = \sum_i {}_{o_2}p_i \times F_i = \sum_i ({}_{o_2}o_1 + {}_{o_1}p_i) \times F_i = {}_{o_2}o_1 \times F + M_{O_1} = M_{O_1} + F \times {}_{o_1}o_2$$

ossia:

$$M_{O_2} = M_{O_1} + F \times {}_{o_1}o_2$$

Per le velocità vale:

$$v_{O_2} = v_{O_1} + \omega \times {}_{o_1}o_2$$

Notare la simmetria nei ruoli di:

$$M_{O_i}, v_{O_i}$$

$$F, \omega$$

Statica di un corpo rigido

Il corpo è detto in equilibrio se il sistema di forze applicate ai suoi punti ha le proprietà:

$$\sum_i F_i \stackrel{\text{def}}{=} F = 0$$

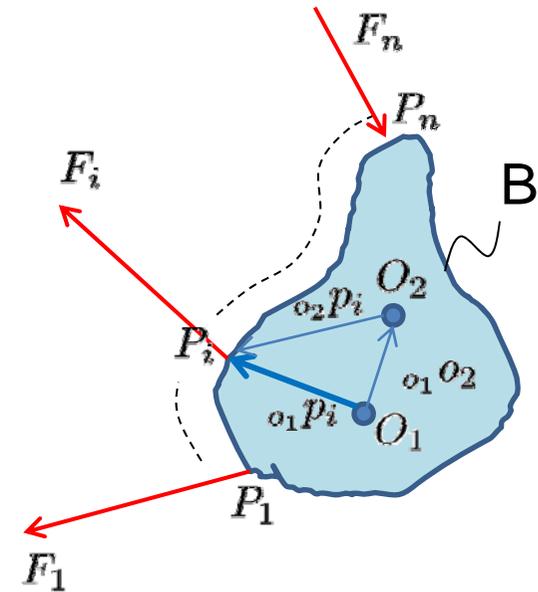
$$\sum_i o_1 p_i \times F_i \stackrel{\text{def}}{=} M_{O_1} = 0$$

Dalle proprietà precedenti del modo di variare del momento al variare del polo, se un sistema è in equilibrio rispetto ad un punto O_1 , lo è rispetto ad un qualsiasi altro punto O_2 , infatti:

$$M_{O_2} = M_{O_1} + F \times o_1 o_2 = 0$$

Due sistemi differenti di forze si dicono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto allo stesso polo.

Se due sistemi di forze sono equivalenti rispetto ad un polo, lo sono rispetto a qualsiasi altro polo.



Descrizione globale delle forze/momenti agenti su un corpo rigido

Come visto precedentemente per la cinematica differenziale, è conveniente introdurre una scrittura che raccoglie le informazioni su forze e momenti risultanti in un'unica variabile, che sarà detta **forza generalizzata** o **wrench**, indicata come

$$w_P = \begin{bmatrix} F \\ M_P \end{bmatrix}$$

Nota la forza equivalente di un sistema di forze (F_i, P_i) rispetto ad un polo P , dato il modo di variare del momento rispetto al polo, es. O_1 , si ha

$$M_{O_1} = M_P + F \times {}_P O_1 = {}_{O_1} \hat{P} F + M_P$$

Si può quindi scrivere che la forza generalizzata varia, al variare del polo, secondo la:

$$w_{O_1} = \begin{bmatrix} F \\ M_{O_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ {}_{O_1} \hat{P} & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ M_P \end{bmatrix} = W_{O_1, P} w_P$$

La relazione tra forze generalizzate in punti diversi dello stesso corpo rigido è dunque lineare mediante la matrice $W_{O_1, P}$

Asse centrale di un sistema di forze

Analogamente a quanto visto per le velocità generalizzate, dato un sistema di forze su un corpo rigido equivalente ad una risultante F applicata in un punto O_1 ed un momento risultante rispetto al polo O_1 pari a M_{O_1} , è sempre possibile individuare un sistema equivalente costituito da una forza F applicata in un punto, diciamo M , tale che momento e forza siano paralleli. Posto $M_M = \bar{h}^0 F$ si impone:

$$M_M = \bar{h}^0 F = M_{O_1} + F \times {}_{o_1}m$$

Premoltiplicando per $F \times (\cdot)$ si ottiene

$$F \times M_M = 0 = F \times M_{O_1} + F \times {}^0(F \times {}_{o_1}m)$$

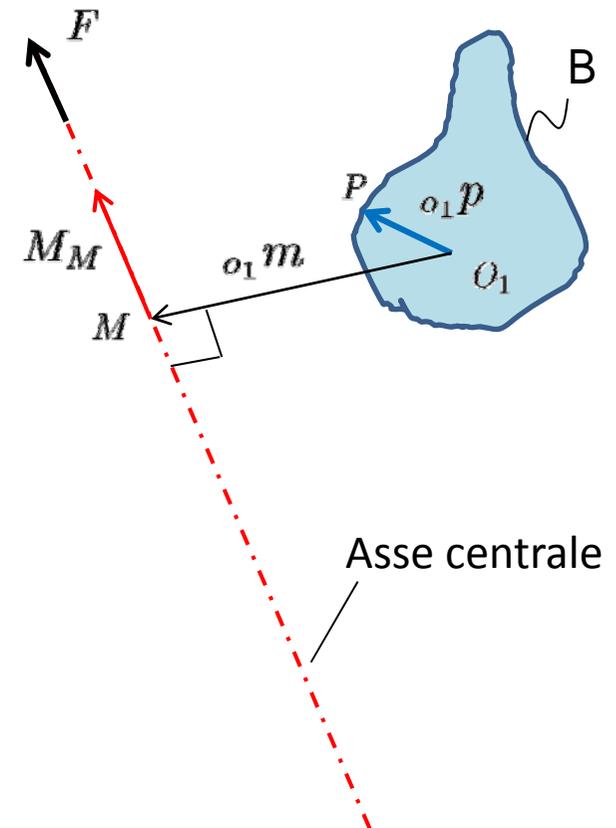
$$0 = F \times M_{O_1} - {}_{o_1}m \|F\|^2$$

Quindi, il piede della perpendicolare a F per O_1 risulta:

$${}_{o_1}m = \frac{F \times M_{O_1}}{\|F\|^2}$$

Il passo \bar{h} risulta poi:

$$\bar{h} = \frac{(F)^T M_M}{\|F\|^2}$$



Definizione del prodotto interno fra twists e wrenches

Anche le forze generalizzate (wrenches), così come le velocità generalizzate (twists), sono formate da componenti fisicamente disomogenee (forze e momenti) e non sono definiti i prodotti interni fra forze generalizzate.

E' però ben definito il prodotto interno fra forze e velocità generalizzate, ossia fra **twists** e **wrenches**, purchè calcolati rispetto al medesimo polo.

Per un polo M , ad esempio, il prodotto interno

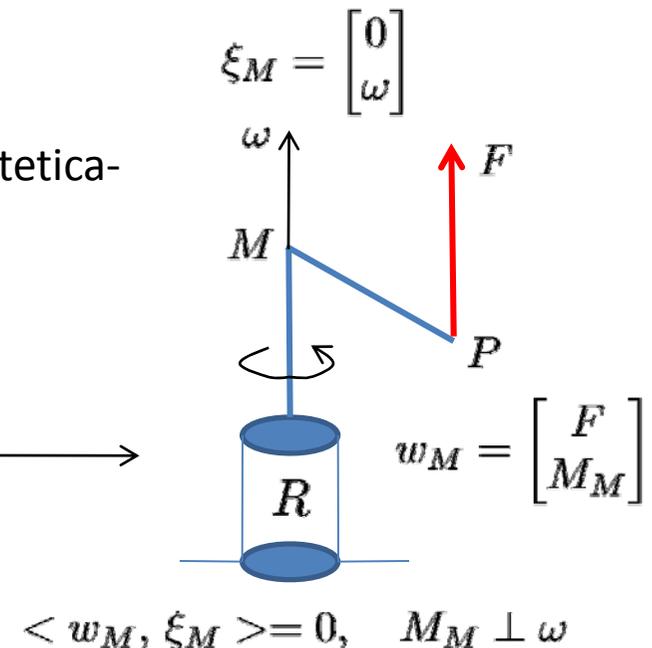
$$\langle w_M, \xi_M \rangle = w_M^T \xi_M = F^T v_M + M_M^T \omega$$

rappresenta la potenza meccanica che il sistema di forze sinteticamente descritto dalla forza generalizzata w_M , effettua in corrispondenza di un atto di moto elicoidale sinteticamente descritto dalla velocità generalizzata ξ_M .

Quando tale potenza è nulla, ossia

$$\langle w_M, \xi_M \rangle = 0$$

la forza w_M e la velocità ξ_M si dicono complementari. \longrightarrow



Invarianza della potenza al variare del polo considerato

- Per le velocità generalizzate:

$$\left. \begin{aligned} \xi_P &= \begin{bmatrix} v_P \\ {}^0\omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & -o_1\hat{p} \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{O_1} \\ {}^0\omega_1 \end{bmatrix} = M_{P,O_1} \xi_{O_1}; \\ \xi_{O_1} &= \begin{bmatrix} v_{O_1} \\ {}^0\omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & o_1\hat{p} \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_P \\ {}^0\omega_1 \end{bmatrix} = M_{O_1,P} \xi_P; \end{aligned} \right\} M_{P,O_1} = M_{O_1,P}^{-1}$$

- Per le forze generalizzate:

$$\left. \begin{aligned} w_{O_1} &= \begin{bmatrix} F \\ M_{O_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ o_1\hat{p} & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ M_P \end{bmatrix} = W_{O_1,P} w_P; \\ w_P &= \begin{bmatrix} F \\ M_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ -o_1\hat{p} & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ M_{O_1} \end{bmatrix} = W_{P,O_1} w_{O_1}; \end{aligned} \right\} W_{P,O_1} = W_{O_1,P}^{-1}$$

Si osserva che:

$$M_{P,O_1} = \begin{bmatrix} I_3 & -o_1\hat{p} \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ o_1\hat{p} & I_3 \end{bmatrix}^T = W_{O_1,P}^T; \quad M_{O_1,P} = \begin{bmatrix} I_3 & o_1\hat{p} \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ -o_1\hat{p} & I_3 \end{bmatrix}^T = W_{P,O_1}^T;$$

Ne segue che:

$$\langle w_{O_1}, \xi_{O_1} \rangle = w_{O_1}^T \xi_{O_1} = w_P^T W_{O_1,P}^T M_{O_1,P} \xi_P = w_P^T (M_{P,O_1} M_{O_1,P}) \xi_P = w_P^T \xi_P = \langle w_P, \xi_P \rangle$$

ossia, la potenza espressa da forze generalizzate equivalenti su velocità generalizzate congruenti (espressioni di stesso atto di moto) è la stessa, indipendentemente dal polo considerato.

Osservazione

Il risultato trovato discende da un principio più generale, il **Principio dei Lavori Virtuali**, spesso indicato come **PLV**, che stabilisce che se due sistemi di forze sono staticamente equivalenti, il lavoro virtuale (o potenza nel caso da noi visto) compiuto su due campi di spostamenti congruenti è uguale.

Dunque, il fatto che

$$M_{P,O_1} = W_{O_1,P}^T \rightarrow W_{O_1,P}^T M_{O_1,P} = I_6$$

Poteva essere ottenuto anche come tesi applicando il PLV e richiedendo che

$$\langle w_{O_1}, \xi_{O_1} \rangle = \langle w_P, \xi_P \rangle$$



$$\langle w_{O_1}, \xi_{O_1} \rangle = w_{O_1}^T \xi_{O_1} = w_P^T W_{O_1,P}^T M_{O_1,P} \xi_P = w_P^T \xi_P = \langle w_P, \xi_P \rangle$$



$$M_{P,O_1} = W_{O_1,P}^T$$

Cinematica differenziale di catene aperte

Per un manipolatore ad n gradi di libertà sia nota la mappa cinematica diretta

$${}^0T_n(q) = \left[\begin{array}{c|c} R(q) & p(q) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \quad q = [q_1, \dots, q_n]^T$$

Al variare di q variano sia la posizione $p(q)$ dell'origine della terna utensile, che l'orientazione, espressa da $R(q)$.

Obiettivo della cinematica differenziale è determinare la relazione tra la velocità ai giunti, ossia \dot{q} , e la velocità dell'end-effector che, essendo un corpo rigido, abbiamo visto essere descritta completamente una volta nota la velocità lineare di un suo punto e la velocità angolare.

Se consideriamo come punto di riferimento l'origine della terna utensile, cerchiamo delle relazioni del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= J_P(q) \dot{q} & J_P(q) &\in \mathbb{R}^{3 \times n} & \text{Jacobiano di posizione, contributo sulla velocità lineare } \dot{p} \\ \omega &= J_O(q) \dot{q} & J_O(q) &\in \mathbb{R}^{3 \times n} & \text{Jacobiano di orientazione, contrib. sulla vel. angolare } \omega \end{aligned}$$

In forma compatta:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J(q) \dot{q} \quad J(q) = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n} \quad \text{Jacobiano geometrico}$$

Jacobiano analitico

Data la mappa cinematica diretta di un manipolatore ad n gradi di libertà

$${}^0T_n(q) = \left[\begin{array}{c|c} R(q) & p(q) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \quad q = [q_1, \dots, q_n]^T$$

Al variare di q variano sia la posizione $p(q)$ dell'origine della terna utensile, che l'orientazione, espressa da $R(q)$.

• **Jacobiano analitico:** si estrae dalla ${}^0T_n(q)$ la posizione $p(q)$ e dalla orientazione $R(q)$ una rappresentazione minima della orientazione, es. angoli di Eulero ZYZ, indicati come vettore $\Phi(q) = [\phi \ \theta \ \psi]^T$, in modo da poter formare un vettore che abbiamo altrove indicato con $x(q)$ tale che

$$x(q) = \left[\begin{array}{c} p(q) \\ \Phi(q) \end{array} \right] = f(q) \in \mathbb{R}^m, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

In questo modo il calcolo della velocità si ottiene direttamente per derivazione

$$\dot{x}(q) = \left[\begin{array}{c} \dot{p}(q) \\ \dot{\Phi}(q) \end{array} \right] = \frac{\partial f(q)}{\partial q} \dot{q} \triangleq J_A(q) \dot{q} = \left[\begin{array}{c} J_P(q) \\ J_{O,A}(q) \end{array} \right] \dot{q}, \quad J_A(q) = \begin{bmatrix} f_{1,q_1} & \cdots & f_{1,q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,q_1} & \cdots & f_{m,q_n} \end{bmatrix} \quad J_A(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Problematiche legate alle singularità di rappresentazione della orientazione (vedi oltre)

Jacobiano geometrico – caratterizzazione cinematica

- **Jacobiano geometrico/cinematico**: si tratta di calcolare in base alla definizione:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J(q) \dot{q} \quad J(q) = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n} \quad \text{Jacobiano geometrico}$$

la dipendenza fra la **velocità lineare dell'origine** della terna utensile e la **velocità ai giunti** e la dipendenza fra la **velocità angolare** della terna utensile e la **velocità ai giunti**.

Calcolo Porzione di Posizione del Jacobiano geometrico

Notiamo che per il calcolo della porzione di Jacobiano di posizione $J_P(q) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$, non essendo la sua definizione legata alla scelta di nessuna particolare rappresentazione, possiamo procedere direttamente per derivazione:

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial p(q)}{\partial q} \dot{q} = \left[\frac{\partial p}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial p}{\partial q_i} \cdots \frac{\partial p}{\partial q_n} \right] \dot{q} = \left[J_{P_1} \cdots J_{P_i} \cdots J_{P_n} \right] \dot{q} = J_P(q) \dot{q}$$

Dunque la i-esima colonna di J_P è giusto $J_{P_i} = \frac{\partial p(q)}{\partial q_i}$

Inoltre, dalla struttura lineare della espressione precedente si vede che $J_{P_i} \dot{q}_i$ sarebbe direttamente la velocità lineare dell'origine della terna end-effector, qualora fosse $\dot{q}_i \neq 0$ e gli altri $\dot{q}_j = 0$.

In altre parole, una velocità lineare pari alla colonna i-esima del Jacobiano è ottenuta tenendo bloccati tutti i giunti tranne l'i-esimo e attuando l'i-esimo con velocità unitaria.

Jacobiano geometrico – caratterizzazione cinematica

Calcolo Porzione di Orientazione del Jacobiano geometrico

Partendo dalla relazione: $\hat{\omega} = \dot{R}R^T$, $\omega = (\dot{R}R^T)^\vee$

dalla cinematica diretta: $R = R(q)$

quindi: $\dot{R} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial q_i} \dot{q}_i$

sostituendo si ha: $\hat{\omega} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) R^T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial q_i} R^T \dot{q}_i \triangleq \sum_{i=1}^n \hat{J}_{O_i} \dot{q}_i$

dove si è definita la forma matriciale della porzione di orientazione relativa al giunto i:

$$\hat{J}_{O_i}(q) \triangleq \frac{\partial R(q)}{\partial q_i} R(q)^T$$

La sua forma vettoriale può essere ottenuta applicando l'operatore "vee":

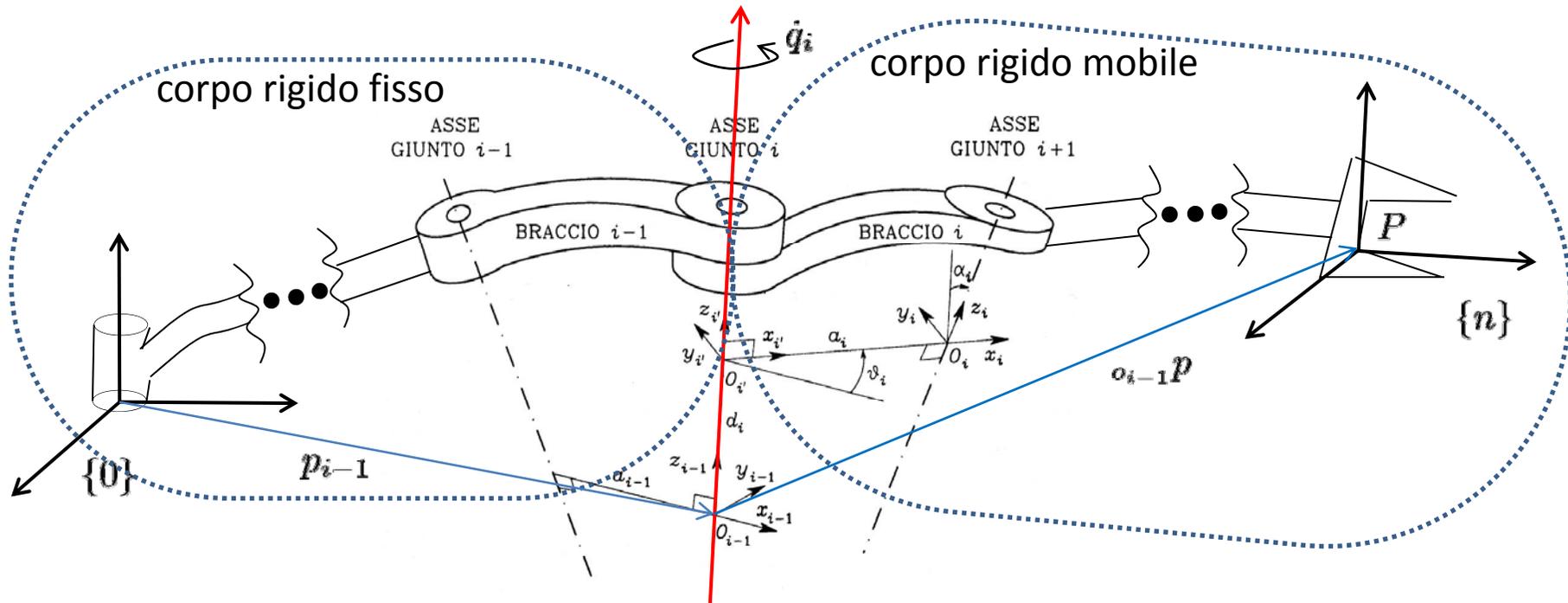
$$J_{O_i} = (\hat{J}_{O_i}(q))^\vee = \left(\frac{\partial R(q)}{\partial q_i} R(q)^T \right)^\vee$$

Dunque la forma vettoriale ω risulta:

$$\omega = (\hat{\omega})^\vee = \sum_{i=1}^n J_{O_i} \dot{q}_i = [J_{O_1} \cdots J_{O_n}] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \triangleq J_O \dot{q}$$

Caratterizzazione “geometrica” del Jacobiano geometrico

Contributo al Jacobiano del moto del **solo giunto i-esimo**; notazione di D.-H.



Il twist consentito dal moto del giunto i -esimo, scritto rispetto a polo O_{i-1} , risulta:

$$\xi_{O_{i-1}} = \begin{bmatrix} v_{O_{i-1}} \\ {}^{i-1}\omega_i \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{giunto } i \text{ prismatico} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

Caratterizzazione “geometrica” del Jacobiano geometrico

Il contributo al Jacobiano però richiede di selezionare come punto di riferimento l’origine della terna dell’end-effector, ossia il punto P, dunque da:

$$\xi_{O_{i-1}} = \begin{bmatrix} v_{O_{i-1}} \\ \vdots \\ {}^{i-1}\omega_i \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{giunto } i \text{ prismatico} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

occorre riportare il twist al punto P mediante le regole viste, ottenendo:

$$\xi_P = \begin{bmatrix} v_P \\ \vdots \\ {}^{i-1}\omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & -o_{i-1}\hat{p} \\ \hline 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \xi_{O_{i-1}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{giunto } i \text{ prismatico} \\ \begin{bmatrix} -o_{i-1}\hat{p}z_{i-1} \\ \vdots \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

Il contributo del giunto i-esimo al Jacobiano geometrico risulta quindi

$$J = [J_1 \cdots J_i \cdots J_n], \quad J_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{giunto } i \text{ prismatico} \\ \begin{bmatrix} \hat{z}_{i-1}(p - p_{i-1}) \\ \vdots \\ z_{i-1} \end{bmatrix}, & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

Costruzione del Jacobiano geometrico – riepilogo operativo

Il calcolo del Jacobiano geometrico risulta semplice e sistematico sulla base delle relazioni cinematiche dirette appena viste ed impiegando la convenzione di Denavit-Hartenberg

$$J = [J_1 \cdots J_i \cdots J_n] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} J_{P_1} & \cdots & J_{P_i} & \cdots & J_{P_n} \\ \hline J_{O_1} & \cdots & J_{O_i} & \cdots & J_{O_n} \end{array} \right],$$

Dove la colonna i -esima viene calcolata come:

$$J_i = \left[\begin{array}{c} J_{P_i} \\ \hline J_{O_i} \end{array} \right] \begin{cases} \left[\begin{array}{c} z_{i-1} \\ \hline 0 \end{array} \right], & \text{giunto } i \text{ prismatico} \\ \left[\begin{array}{c} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ \hline z_{i-1} \end{array} \right], & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

Inoltre, ancora per la convenzione di Denavit-Hartenberg, ricordandosi che

$${}^0A_n(q) = {}^0A_1(q_1) \cdots {}^{i-2}A_{i-1}(q_{i-1}) {}^{i-1}A_i(q_i) \cdots {}^{n-1}A_n(q_n)$$

i vettori z_{i-1} , p , p_{i-1} possono essere estratti direttamente dalle matrici seguenti:

- $z_{i-1}(q_1, \dots, q_{i-1}) = [{}^0R_{i-1}(q_1, \dots, q_{i-1})](:, 3);$
- $p(q) = [{}^0A_n(q)](1:3, 4);$
- $p_{i-1}(q_1, \dots, q_{i-1}) = [{}^0A_{i-1}(q_1, \dots, q_{i-1})](1:3, 4)$

Jacobiano di strutture tipiche di manipolazione

Manipolatore planare a 3 bracci.

Gradi di libertà: $n = 3$

Dimensione spazio operativo (in generale): $m = 6$

Dimensioni del Jacobiano: $J \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$

Si ricorda che

$$J = [J_1 \cdots J_i \cdots J_n] = \begin{bmatrix} J_{P_1} & \cdots & J_{P_i} & \cdots & J_{P_n} \\ J_{O_1} & \cdots & J_{O_i} & \cdots & J_{O_n} \end{bmatrix},$$

con:

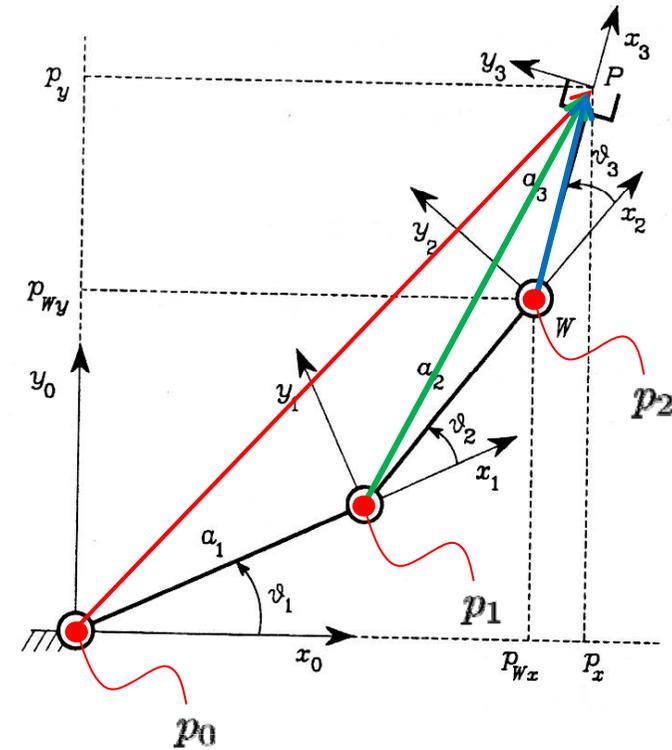
$$J_i = \begin{bmatrix} J_{P_i} \\ J_{O_i} \end{bmatrix} \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{giunto } i \text{ prismatico} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}, & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

Dunque:

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}; \quad p = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove:

$$p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad p_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad p_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad z_0 = z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$



Jacobiano del manipolatore planare a 3 bracci (forma esplicita)

Manipolatore planare a 3 bracci.

Gradi di libertà: $n = 3$

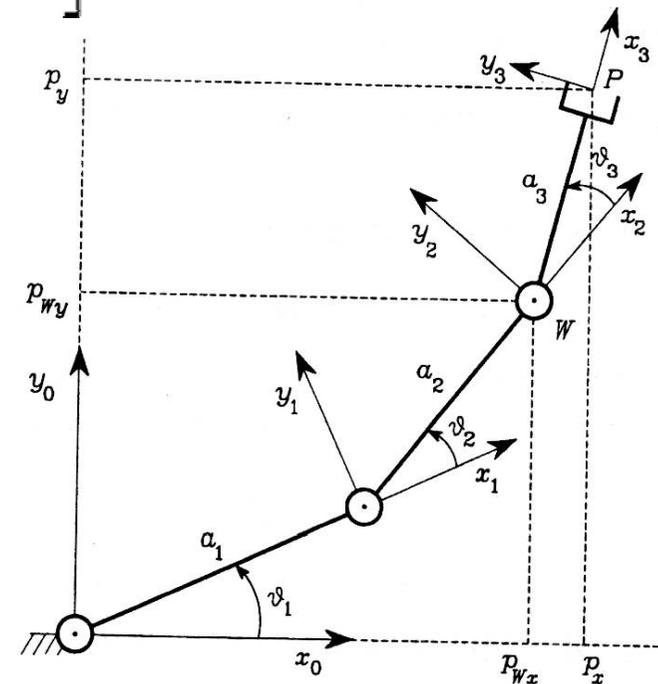
Dimensione spazio operativo (in generale): $m = 6$

Dimensioni del Jacobiano: $J \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Tale matrice, dipendente dalla configurazione, fornisce:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$



Riduzione del Jacobiano del manipolatore planare a 3 bracci

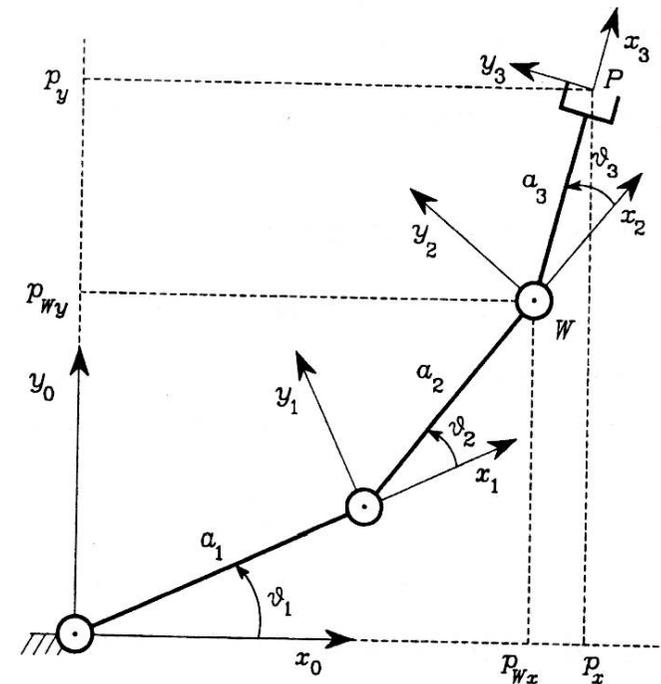
Dato che solo le tre righe non nulle sono di interesse (rango=3); esse caratterizzano le componenti di velocità lineare nella terna {0} lungo x, y e la velocità angolare attorno all'asse z, si può estrarre dalla matrice completa:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

solo il blocco $J_R(q) = J(q)([1 \ 2 \ 6], :) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

cosicchè otteniamo direttamente:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J_R(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$



Jacobiano del manipolatore antropomorfo – solo struttura portante

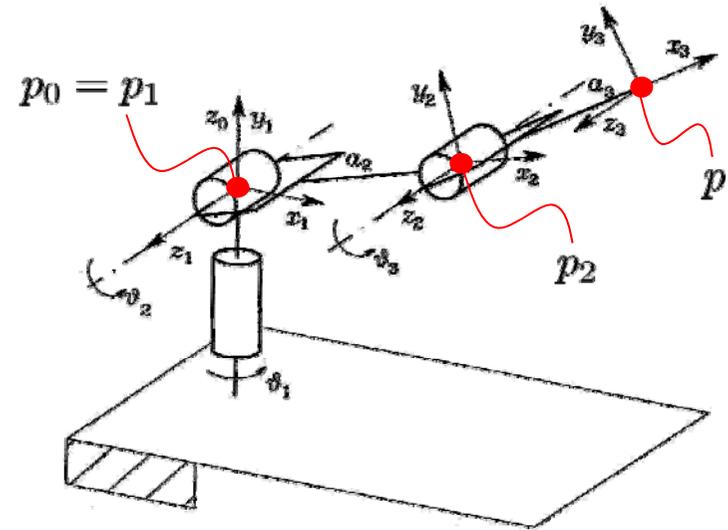
Gradi di libertà: $n = 3$

Dimensione spazio operativo (in generale): $m = 6$

Dimensioni del Jacobiano: $J \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$

Dunque:

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ \hline z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix};$$



dove i vettori posizione delle varie origini dei frames sono:

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad p_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix}; \quad p = \begin{bmatrix} c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

ed i versori degli assi di rotazione dei vari giunti sono:

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jacobiano antropom. solo struttura portante – calcolo esplicito

Sviluppando i calcoli si ottiene:

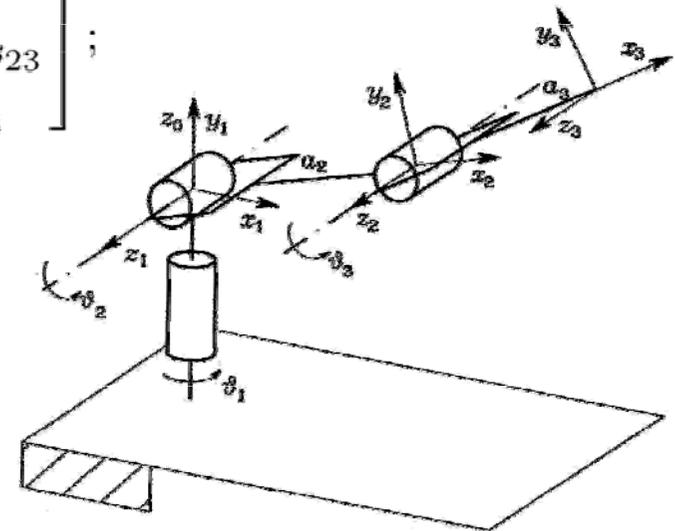
$$J(q) = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ \hline 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Se interessa solo la mappa che lega la velocità lineare del punto P dell'e.-e. alla velocità ai giunti, basta estrarre il blocco superiore, ossia: $J_P(q) = J(q)(1:3, :) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$J_P(q) = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ \hline 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix};$$

Notare come la struttura considerata non consente di ottenere una velocità angolare arbitraria, ma deve sempre essere (da $J(q)(4:5, :) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$)

$$\omega_x c_1 = -\omega_y s_1$$

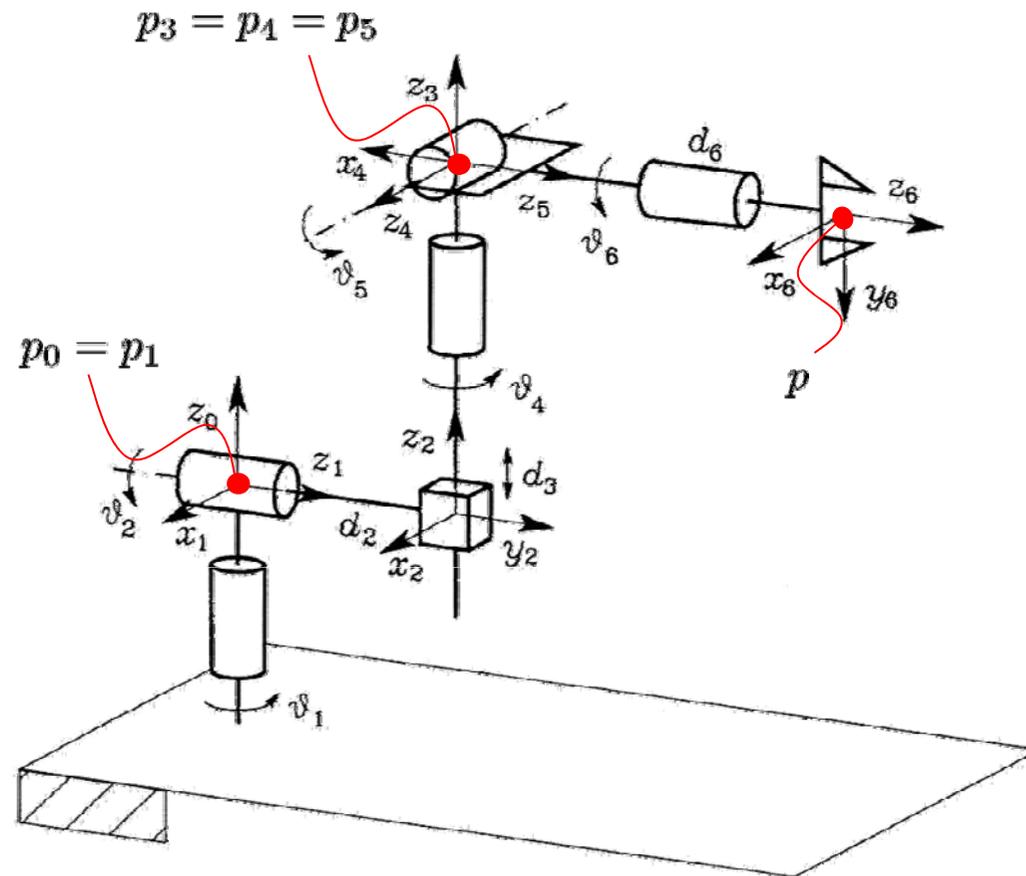


Jacobiano del manipolatore di Stanford

Gradi di libertà: $n = 6$

Dimensione spazio operativo (in generale): $m = 6$

Dimensioni del Jacobiano: $J \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$



$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 & z_3 \times (p - p_3) & z_4 \times (p - p_4) & z_5 \times (p - p_5) \\ z_0 & z_1 & 0 & z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix};$$

Jacobiano del manipolatore di Stanford

Il calcolo dei vettori posizione dei vari bracci fornisce:

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad p_3 = p_4 = p_5 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}$$

mentre il calcolo degli assi dei vari giunti fornisce:

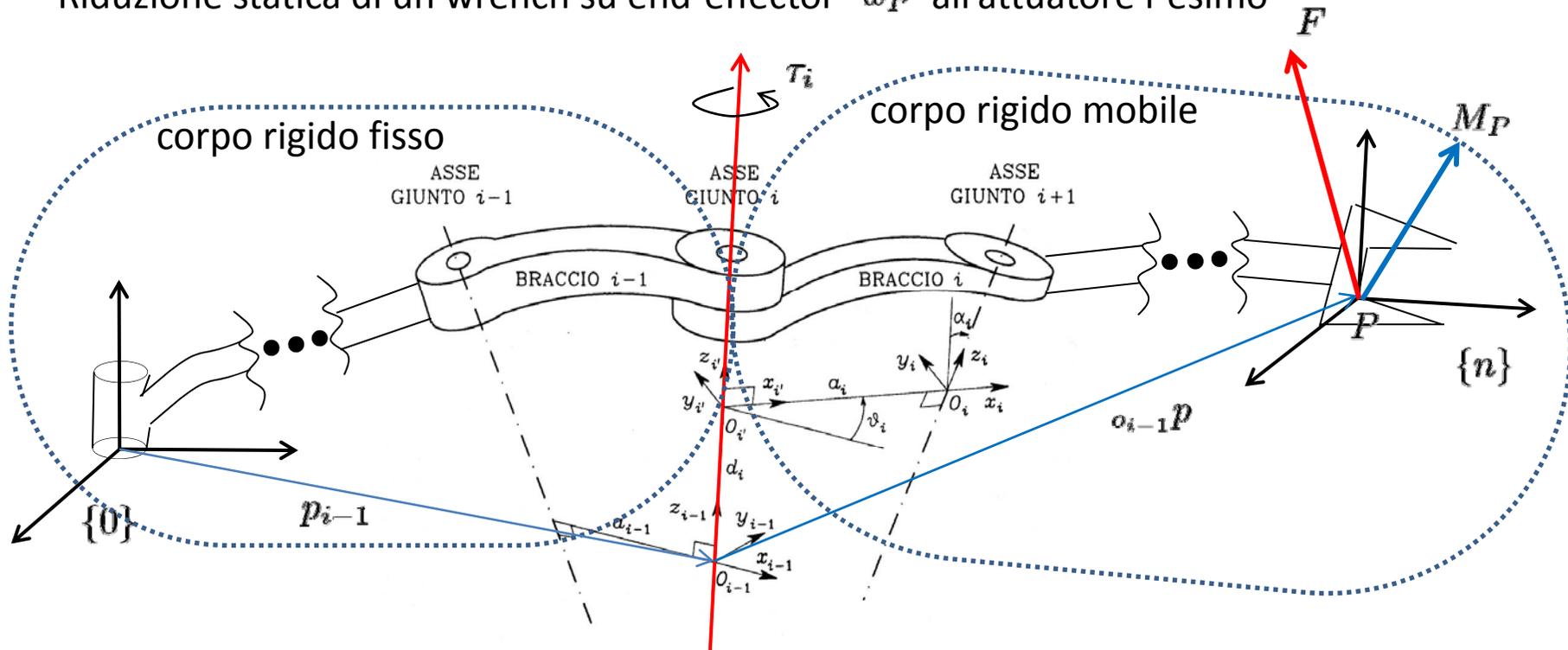
$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad z_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad z_2 = z_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$z_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix}; \quad z_5 = \begin{bmatrix} c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 s_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 s_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

le espressioni esplicite possono essere ricavate per esercizio...

Caratterizzazione “statica” del Jacobiano geometrico

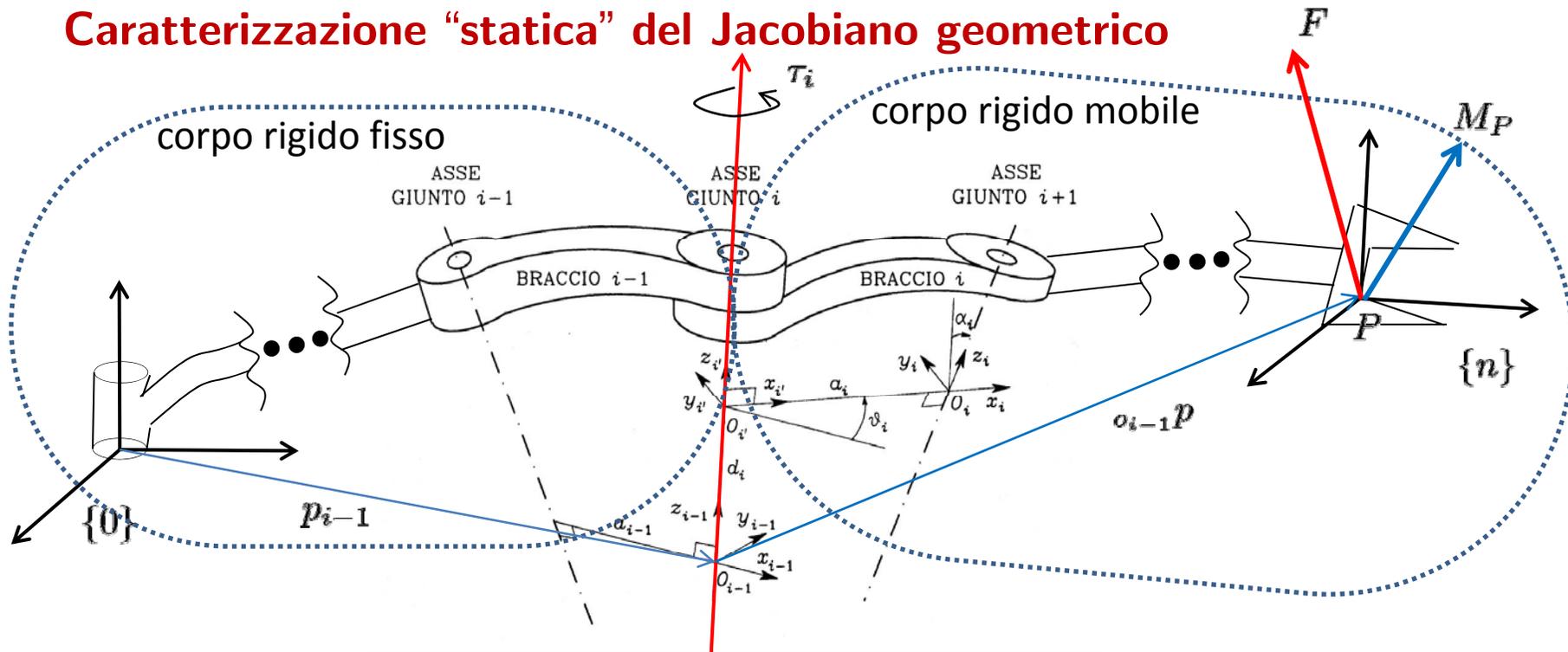
Riduzione statica di un wrench su end-effector w_P all’attuatore i-esimo



Il wrench che viene esercitato dall’end-effector sul mondo esterno w_P (polo P), riportato al polo O_{i-1} del giunto i-esimo risulta

$$w_{O_{i-1}} = \begin{bmatrix} F \\ M_{O_{i-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ \hat{p}_{i-1} & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ M_P \end{bmatrix} = W_{O_{i-1}, P} w_P$$

Caratterizzazione "statica" del Jacobiano geometrico



Il contributo del giunto i -esimo allo sviluppo del wrench $w_{O_{i-1}}$ sarà però: soltanto la componente di forza F allineata con z_{i-1} se il giunto è prismatico (attuatore lineare); soltanto la componente di momento $M_{O_{i-1}}$ allineata con z_{i-1} se il giunto è rotoidale (attuatore rotazionale): dunque la forza/coppia τ_i sarà:

$$\tau_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1}^T & 0^T \end{bmatrix} w_{O_{i-1}}, & \text{giunto } i \text{ prismatico} \\ \begin{bmatrix} 0^T & z_{i-1}^T \end{bmatrix} w_{O_{i-1}}, & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

Dualita' cinetostatica

In condizione di equilibrio statico si può quindi scrivere una relazione lineare fra la forza generalizzata applicata dall'end-effector sul mondo esterno e le azioni che gli attuatori ai singoli giunti debbono esercitare per generarla, ossia:

$$\tau = A w_P \rightarrow \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_i \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} w_P$$

dove la riga i-esima della matrice A vale:

$$A_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1}^T & \vdots & 0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & \vdots & 0_3 \\ o_{i-1} \hat{p} & \vdots & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1}^T & \vdots & 0^T \end{bmatrix}, & \text{giunto } i \text{ prismatico} \\ \begin{bmatrix} 0^T & \vdots & z_{i-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & \vdots & 0_3 \\ o_{i-1} \hat{p} & \vdots & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1}^T & o_{i-1} \hat{p} & \vdots & z_{i-1}^T \end{bmatrix}, & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

E' immediato osservare che la matrice così ottenuta vale $A = J^T$, ossia proprio la trasposta del Jacobiano geometrico! Perciò:

$$\tau = J^T w_P$$

ricorda che per le velocità

$$v = J \dot{q}$$

Dualita' cinetostatica mediante PLV

La relazione che lega il wrench esercitato dall'end-effector sul mondo esterno con le coppie/forze esercitate dagli attuatori ai giunti può essere ricavata in modo alternativo mediante applicazione del Principio dei Lavori Virtuali.

Dato che consideriamo i manipolatori come sistemi meccanici con vincoli olonomi scleronomi (vincoli per le configurazioni ed indep. dal tempo), gli spostamenti virtuali coincidono con quelli elementari, dunque:

- lavoro virtuale esercitato dal wrench e.-e. su campo di spostamenti virtuali dell'e.-e.:

$$dW_w = w_P^T \xi_P dt = [F^T \quad M_P^T] \begin{bmatrix} dp \\ \omega dt \end{bmatrix} = w_P^T J(q) dq$$

- lavoro virtuale esercitato dalle forze/coppie ai giunti sulle elongaz./rotaz. virtuali:

$$dW_\tau = \tau^T dq$$

- imponendo l'uguaglianza dei lavori virtuali $dW_w = dW_\tau \quad \forall dq$ si ha:

$$w_P^T J(q) dq = \tau^T dq \quad \rightarrow \quad w_P^T J(q) = \tau^T \quad \rightarrow \quad \tau = J^T(q) w_P$$

Breve riepologo

Si sono date le definizioni di:

1. **Jacobiano analitico** ——— $\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_{O,\Lambda}(q) \end{bmatrix} \dot{q}$

2. **Jacobiano geometrico** ————— $\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix} \dot{q}$

1. Per quanto riguarda il **Jacobiano analitico** ne è stata data definizione (nella sua parte di posizione è identico a quello geometrico, variando al più nella metodologia in cui può essere calcolato), ma rimane da indagare come è fatta esplicitamente la sua porzione di orientazione, dato che dipende esplicitamente dalla rappresentazione minima impiegata. Inoltre va stabilito il legame fra tale Jacobiano e quello geometrico, almeno nella porzione di orientazione.

2. Il **Jacobiano geometrico** è stato invece indagato approfonditamente e sono stati forniti tre modi per calcolarlo, ossia mediante:

- caratterizzazione cinematica
- caratterizzazione geometrica
- caratterizzazione statica

3. Si è dimostrata (in 2 modi diversi) la dualità cinetostatica (da approfondire).

Relazione fra Jacobiano di orientazione analitico e geometrico

Per determinare la relazione fra il Jacobiano di orientazione analitico $J_{O,A}(q)$ e geometrico $J_O(q)$, ci rifacciamo alla conoscenza della matrice di rotazione nella parametrizzazione minima scelta, es. angoli di Eulero ZYZ, $\Phi(q) = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3]^T = [\phi \ \theta \ \psi]^T$

Allora, nota la matrice di rotazione generica in f.ne di Φ , ossia $R(\Phi)$ si procede così:

Partendo dalla relazione: $\hat{\omega} = \dot{R}R^T$, $\omega = (\dot{R}R^T)^\vee$

dalla cinematica diretta in f.ne della rappr. minima scelta: $R = R(\Phi)$

quindi: $\dot{R} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial \Phi_i} \dot{\Phi}_i$

sostituendo si ha: $\hat{\omega} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial \Phi_i} \dot{\Phi}_i \right) R^T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial \Phi_i} R^T \dot{\Phi}_i \triangleq \sum_{i=1}^n \hat{T}_{O,A_i} \dot{\Phi}_i$

dove si è definita la forma matriciale relativa all'angolo Φ_i

$$\hat{T}_{O,A_i}(\Phi) \triangleq \frac{\partial R(\Phi)}{\partial \Phi_i} R(\Phi)^T \quad T_{O,A_i} = (\hat{T}_{O,A_i}(\Phi))^\vee = \left(\frac{\partial R(\Phi)}{\partial \Phi_i} R(\Phi)^T \right)^\vee$$

e quindi la forma vettoriale ω in f.ne delle derivate degli angoli risulta:

$$\omega = (\hat{\omega})^\vee = \sum_{i=1}^3 T_{O,A_i} \dot{\Phi}_i = [T_{O,A_1} \quad T_{O,A_2} \quad T_{O,A_3}] \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \end{bmatrix} \triangleq T_{O,A}(\Phi) \dot{\Phi}$$

Relazione fra Jacobiano analitico e geometrico (completo)

In virtù delle relazioni appena trovate, ossia:

$$\omega = T_{O,A}(\Phi)\dot{\Phi}$$

La relazione fra la velocità geometrica v e quella analitica \dot{x} risulta:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & T_{O,A}(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & T_{O,A}(\Phi) \end{bmatrix} \dot{x} \triangleq T_A(\Phi) \dot{x}$$

Quindi la relazione che lega i due Jacobiani risulta essere:

$$v = J(q) \dot{q} = T_A(\Phi) J_A(\Phi) \dot{q} \quad \rightarrow \quad J(q) = T_A(\Phi) J_A(\Phi)$$

Esempio: calcolo del Jacobiano di orientazione per Eulero ZYZ

Nella rappresentazione minima di Eulero ZYZ, la matrice di rotazione risulta:

$$R_{ZYZ}(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi) & -\cos(\psi) \sin(\phi) - \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \cos(\psi) \sin(\phi) + \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) - \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) & \sin(\theta) \sin(\phi) \\ -\cos(\psi) \sin(\theta) & \sin(\theta) \sin(\psi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Calcolando le varie colonne del Jacobiano secondo la:

$$T_{O,A_i} = (\widehat{T}_{O,A_i}(\Phi))^{\vee} = \left(\frac{\partial R(\Phi)}{\partial \Phi_i} R(\Phi)^T \right)^{\vee}$$

dove poi:

$$\omega = (\widehat{\omega})^{\vee} = \sum_{i=1}^3 T_{O,A_i} \dot{\Phi}_i = [T_{O,A_1} \quad T_{O,A_2} \quad T_{O,A_3}] \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \triangleq T_{O,A}(\Phi) \dot{\Phi}$$

si ha:

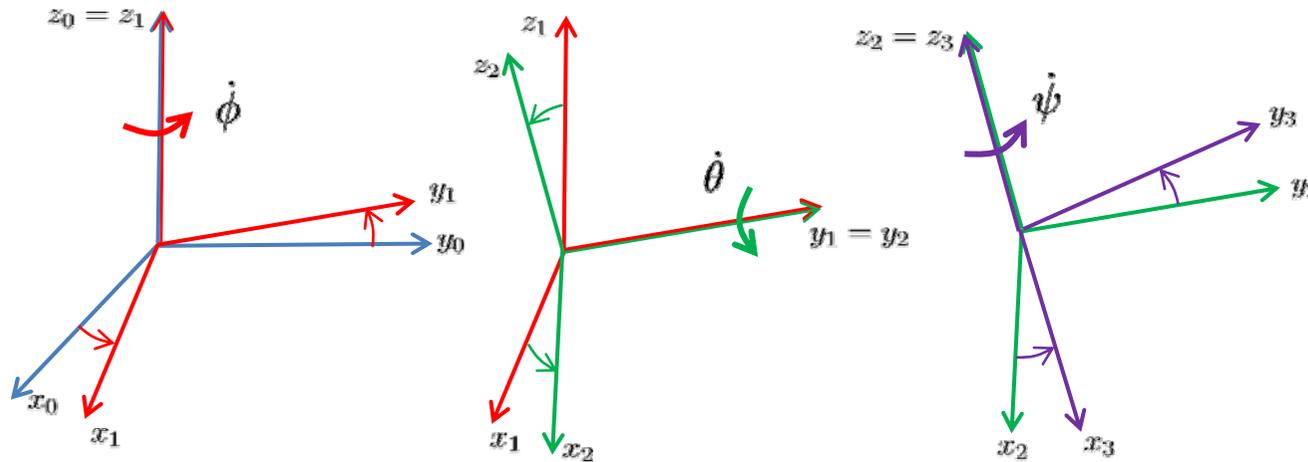
$$T_{O,A_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T_{O,A_2} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad T_{O,A_3} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix};$$

dunque:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \sin(\theta) \\ 1 & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Jacobiano di orientazione per Eulero ZYZ – metodo cinematico

La velocità angolare scritta rispetto alla base ZYZ (non ortogonale!) risulta:



$$\begin{aligned}
 {}^0\omega &= \dot{\phi} {}^0k^0 + \dot{\theta} {}^0j^1 + \dot{\psi} {}^0k^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\phi} + \text{Rot}(z, \phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} + \text{Rot}(z, \phi) \text{Rot}(y, \theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\psi} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\phi} + \begin{bmatrix} -s_\phi \\ c_\phi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} + \begin{bmatrix} c_\phi s_\theta \\ s_\phi s_\theta \\ c_\theta \end{bmatrix} \dot{\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\phi & c_\phi s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi s_\theta \\ 1 & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Differenziali di rotazioni

La rotazione nella parametrizzazione RPY dei tre angoli infinitesimi $d\phi, d\theta, d\psi$ risulta:

$$R_{zyx}(d\phi, d\theta, d\psi) = Rot(z, d\phi) Rot(y, d\theta) Rot(x, d\psi)$$

Sviluppando ciascuna rotazione al 1° ordine con Taylor-MacLaurin nel corrispondente angolo si ha:

$$Rot(z, d\phi) \simeq Rot(z, 0) + \left. \frac{dRot(z, \phi)}{d\phi} \right|_{\phi=0} d\phi = I + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\phi = I + \hat{k} d\phi$$

Analogamente:

$$Rot(y, d\theta) \simeq I + \hat{j} d\theta; \quad Rot(x, d\psi) \simeq I + \hat{i} d\psi$$

Trascurando infinitesimi di ordine > 1 (dai prodotti), si ha:

$$R_{zyx}(d\phi, d\theta, d\psi) = I + \hat{k} d\phi + \hat{j} d\theta + \hat{i} d\psi = I + \begin{bmatrix} 0 & -d\phi & d\theta \\ d\phi & 0 & -d\psi \\ -d\theta & d\psi & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui si evince il significato della matrice antisimmetrica come:

$$R_{zyx}(d\phi, d\theta, d\psi) - I = \begin{bmatrix} d\psi \\ d\theta \\ d\phi \end{bmatrix}^\wedge$$

e la importante proprietà che le rotazioni infinitesime commutano!

Jacobiani in terne diverse

Noto il Jacobiano geometrico che mette in relazione velocità di traslazione di un punto di riferimento dell'e.-e. e la sua velocità angolare, con la velocità ai giunti, il tutto espresso in una certa terna (finora abbiamo sempre considerato la terna {0}), è utile sapere come varia la sua espressione al variare del sistema di riferimento e del polo di riferimento.

Caso 1: si mantiene fisso il punto di riferimento (polo) di cui si esprime la velocità lineare, es. P del corpo rigido, ma si desiderano le componenti in frame diverso.

$${}^0\xi_P = \begin{bmatrix} {}^0v_P \\ \hline {}^0\omega \end{bmatrix} = {}^0J(q) \dot{q}; \quad {}^1\xi_P = \begin{bmatrix} {}^1v_P \\ \hline {}^1\omega \end{bmatrix} = {}^1J(q) \dot{q}$$

Per la trasformazione di vettori (non conta traslaz.!) vale:

$${}^0v_P = {}^0R_1 {}^1v_P$$

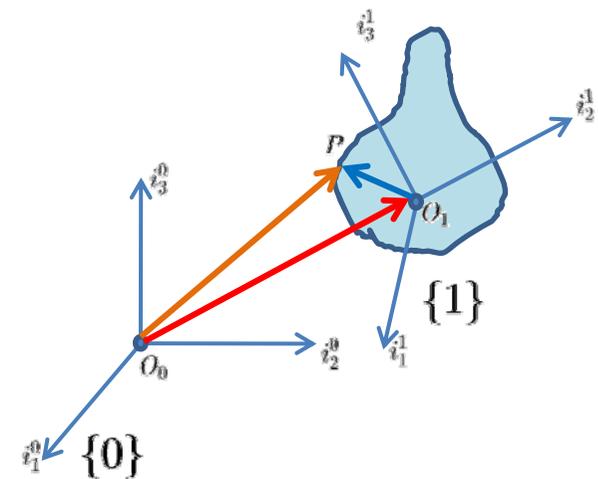
$${}^0\omega = {}^0R_1 {}^1\omega$$

Dunque, in forma compatta:

$${}^0\xi_P = \begin{bmatrix} {}^0v_P \\ \hline {}^0\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & 0_3 \\ \hline 0_3 & {}^0R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1v_P \\ \hline {}^1\omega \end{bmatrix} = M({}^0R_1, 0) {}^1\xi_P$$

ne consegue:

$${}^0J = M({}^0R_1, 0) {}^1J \quad \rightarrow \quad {}^0J = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & 0_3 \\ \hline 0_3 & {}^0R_1 \end{bmatrix} {}^1J$$



Jacobiani in terne diverse

Caso 2: si cambia contemporaneamente il polo di riferimento di cui si esprime la velocità lineare e la terna in cui si esprimono le componenti dei vettori.

2.1) Ancora nella stessa terna $\{A\}$, cambio polo di riferimento da A a B:

$${}^A\xi_A = \begin{bmatrix} {}^A v_A \\ {}^A \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & {}_a\hat{p}_B \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A v_B \\ {}^A \omega \end{bmatrix} = M(0, {}_a p_B) {}^A\xi_B$$

2.2) Esprimo le componenti di ξ_B da $\{A\}$ a $\{B\}$ come prima visto:

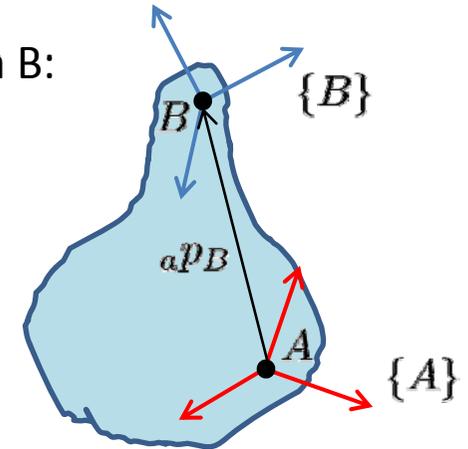
$${}^A\xi_B = \begin{bmatrix} {}^A R_B & 0_3 \\ 0_3 & {}^A R_B \end{bmatrix} {}^B\xi_B = M({}^A R_B, 0) {}^B\xi_B$$

2.3) Combino le espressioni ottenendo:

$${}^A\xi_A = \begin{bmatrix} I_3 & {}_a\hat{p}_B \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A R_B & 0_3 \\ 0_3 & {}^A R_B \end{bmatrix} {}^B\xi_B \rightarrow {}^A\xi_A = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}_a\hat{p}_B {}^A R_B \\ 0_3 & {}^A R_B \end{bmatrix} {}^B\xi_B$$

Dunque:

$$M(0, {}_a p_B) M({}^A R_B, 0) \triangleq M({}^A R_B, {}_a p_B) = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}_a\hat{p}_B {}^A R_B \\ 0_3 & {}^A R_B \end{bmatrix}$$



Jacobiani in terne diverse

Caso 2: continua...

Se quindi si definisce ${}^A\xi_A = {}^A J_A \dot{q}$: il Jacobiano ${}^A J_A$ è in terna $\{A\}$ e prende come polo il punto A ;

e si definisce ${}^B\xi_B = {}^B J_B \dot{q}$: il Jacobiano ${}^B J_B$ che è in terna $\{B\}$ e prende come polo in punto B

allora essendo la velocità ai giunti identica risulta:

$${}^A\xi_A = {}^A J_A \dot{q} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & | & {}_a\hat{p}_B & {}^A R_B \\ \hline 0_3 & | & {}^A R_B \end{bmatrix} {}^B J_B \dot{q} = {}^B\xi_B$$

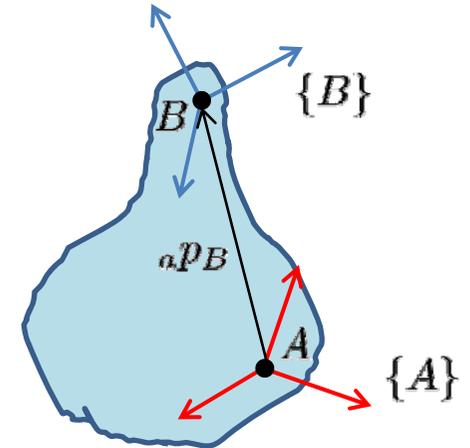
da cui:

$${}^A J_A = \begin{bmatrix} {}^A R_B & | & {}_a\hat{p}_B & {}^A R_B \\ \hline 0_3 & | & {}^A R_B \end{bmatrix} {}^B J_B$$

in modo sintetico:

$${}^A J_A = M({}^A R_B, {}_a p_B) {}^B J_B$$

Dove si è definito: $M({}^A R_B, {}_a p_B) \triangleq M(0, {}_a p_B) M({}^A R_B, 0) = \begin{bmatrix} {}^A R_B & | & {}_a\hat{p}_B & {}^A R_B \\ \hline 0_3 & | & {}^A R_B \end{bmatrix}$



Jacobiani in terne diverse – proprietà dell'operatore di trasformazione

E' interessante notare che se da:

$${}^A J_A = M({}^A R_B, {}_a p_B) {}^B J_B$$

si vuol calcolare:

$${}^B J_B = [M({}^A R_B, {}_a p_B)]^{-1} {}^A J_A$$

si può calcolare l'inversa a blocchi:

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^A R_B & {}_a \hat{p}_B {}^A R_B \\ \hline 0_3 & {}^A R_B \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & 0_3 \\ \hline 0_3 & I_3 \end{array} \right]$$

ottenendo:

$$\left[\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^A R_B^T & -{}^A R_B^T {}_a \hat{p}_B \\ \hline 0_3 & {}^A R_B^T \end{array} \right]$$

Tra l'altro è interessante notare che risulta:

$$[M({}^A R_B, {}_a p_B)]^{-1} = M({}^A R_B^T, -{}^A R_B^T {}_a p_B)$$

Tutti i blocchi sono banali a parte blocco (1,2) per cui occorre ricordarsi la proprietà:

$$(Rv)^\wedge = R \hat{v} R^T, \quad R \in SO(3)$$

Analisi della cinematica differenziale - continua

Considerazioni analoghe si applicano alle forze/coppie (forza generalizzata) applicate sull'end-effector, w . Naturalmente, laddove per una certa componente di v si scelga una velocità lineare, la corrispondente componente di w dovrà essere una forza; se in v si ha una componente di velocità angolare, in w si dovrà avere un momento.

- Per manipolatore in 3D, $w_P = \begin{bmatrix} F \\ M_P \end{bmatrix}$: F forza applicata all'end-effector e M_P momento applicato all'end-effector. Tale vettore è il "wrench".

Le stesse relazioni di corrispondenza valgono fra componenti corrispondenti in \dot{q} e τ

Come abbiamo già avuto modo di dire, la definizione congruente di v, w, \dot{q}, τ fa sì che siano ben definiti i prodotti interni (potenze meccaniche Nm/s)

$$\langle w, v \rangle = w^T v$$

$$\langle \tau, \dot{q} \rangle = \tau^T \dot{q}$$

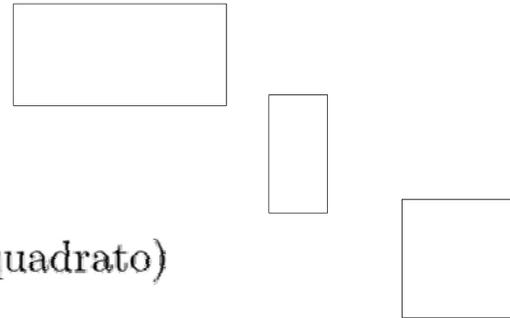
Ridondanza e difettività

Consideriamo un manipolatore con $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ossia:

$$\begin{array}{c}
 \text{dim. task space} \\
 \left\{ \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ giunti}} \\ \begin{bmatrix} J_{11}(q) & \dots & J_{1n}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{m1}(q) & \dots & J_{mn}(q) \end{bmatrix} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Se:

- $n > m$ il manipolatore è detto: **ridondante**
- $n < m$ il manipolatore è detto: **difettivo**
- $n = m$ il manipolatore è detto: **minimale** (quadrato)



I valori di q per i quali $\text{rank } J(q) < \min(m, n)$ si dicono **singularità** del manipolatore.

Una singularità è: semplice se $\text{rank } J(q) = \min(m, n) - 1$

: doppia se $\text{rank } J(q) = \min(m, n) - 2$

Se fosse $\text{rank } J(q) < \min(m, n), \forall q$, si avrebbe una **singularità banale**.

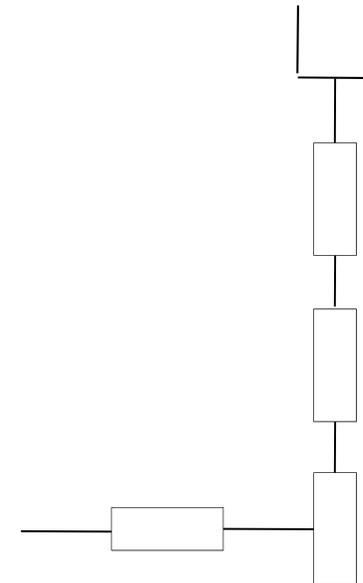
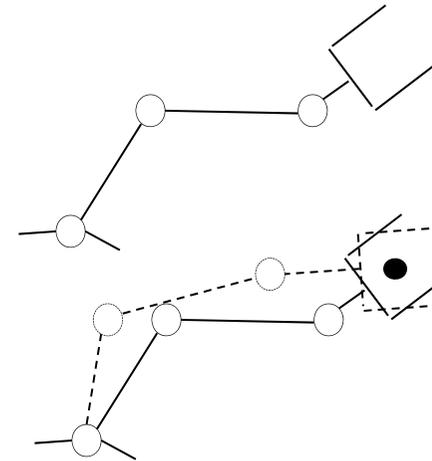
Ridondanza e difettività – esempi

Manipolatore planare RRR } $m = 3, n = 3;$ Q
 Task posizione+orientazione

Manipolatore planare RRR } $m = 2, n = 3;$ R
 Task posizione

Manipolatore planare RR } $m = 3, n = 2;$ D
 Task posizione+orientazione

Manipolatore planare PPP } $m = 3, n = 3;$ sing. banale
 Task posizione+orientazione



Dualità cineto-statica

Guardiamo le relazioni lineari della cineto-statica:

$$v = J(q)\dot{q}$$

$$\tau = J(q)^T w$$

si parla di **dualità** poiché l'applicazione lineare che mappa le velocità ai giunti nella velocità dell'end-effector è la **duale (trasposta** per una applicazione lineare) di quella che mappa il wrench sull'end-effector nelle coppie ai giunti.

I **4 sottospazi fondamentali** della matrice $J(q)$, con in generale $\text{rank } J = r, r \leq \min(m, n)$ hanno in Robotica una interpretazione fisica immediata ($\mathcal{R} = \text{range}; \mathcal{N} = \text{nullspace}$):

- $\mathcal{R}(J(q))$: sottospazio che contiene tutte e sole le possibili velocità dell'end-effector (al variare delle velocità ai giunti); è in \mathbb{R}^m ha dimensione r ;
- $\mathcal{N}(J(q))$: sottospazio delle velocità ai giunti che lasciano nulla la velocità dell'end-effector (ridondanti); è in \mathbb{R}^n ha dimensione $n - r$;
- $\mathcal{R}(J^T(q))$: sottospazio delle forze/coppie ai giunti che possono essere generate applicando un wrench esterno; è in \mathbb{R}^n ha dimensione r ;
- $\mathcal{N}(J^T(q))$: sottospazio dei wrench esterni che sono bilanciati da coppie/forze ai giunti nulle - cioè che si scaricano interamente sulla struttura; è in \mathbb{R}^m ha dimensione $m - r$;

Dualita' cineto-statica – teorema fondamentale dell'algebra

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che

$$\dim \mathcal{R}(J) + \dim \mathcal{N}(J^T) = m$$

$$\dim \mathcal{N}(J) + \dim \mathcal{R}(J^T) = n$$

ovvero in modo più esplicito, se $\text{rank } J = r$, $r \leq \min(m, n)$, si ha:

$$\dim \mathcal{R}(J) = r; \quad \text{in } \mathbb{R}^m$$

$$\dim \mathcal{R}(J^T) = r; \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

$$\dim \mathcal{N}(J) = n - r; \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

$$\dim \mathcal{N}(J^T) = m - r; \quad \text{in } \mathbb{R}^m$$

$$v = J(q)\dot{q}$$

$$\tau = J(q)^T w$$

Si può leggere in Robotica così:

-la differenza fra la dimensione dello spazio operativo (m) e dello spazio delle velocità dell'e.-e. possibili in una configurazione (r), è pari alla dimensione del sottospazio dei wrench esterni strutturalmente assorbiti;

- la differenza fra il numero di giunti (n) e la dimensione dello spazio delle coppie ai giunti "attuabili" da un wrench sull'e.-e., è pari alla dimensione del sottospazio delle velocità ridondanti.

Teorema fondamentale dell'algebra – lettura in chiave Robotica

Il **teorema fondamentale dell'algebra** ha una espressione più forte nei casi in cui sugli spazi di dominio e codominio della applicazione lineare sia definito un prodotto interno e, quindi, un concetto di ortogonalità (complementarietà). In tali casi:

$$\begin{cases} \mathcal{R}(J)^\perp &= \mathcal{N}(J^T) \\ \mathcal{N}(J)^\perp &= \mathcal{R}(J^T) \end{cases}$$

che significa: il $\mathcal{N}(J^T)$ è composto da tutti e soli e vettori (m-dimensionali) che sono perpendicolari ai vettori in $\mathcal{R}(J)$ (anch'essi ovviamente m-dimensionali).

Anche se si è visto che sui singoli spazi v, τ, w, \dot{q} non sono definiti prodotti scalari ed ortogonalità, abbiamo altresì visto che sono ben definiti i prodotti $\tau^T \dot{q}$ e $w^T v$

La relazione sopra riportata tra complementi ortogonali può essere letta in Robotica come segue:

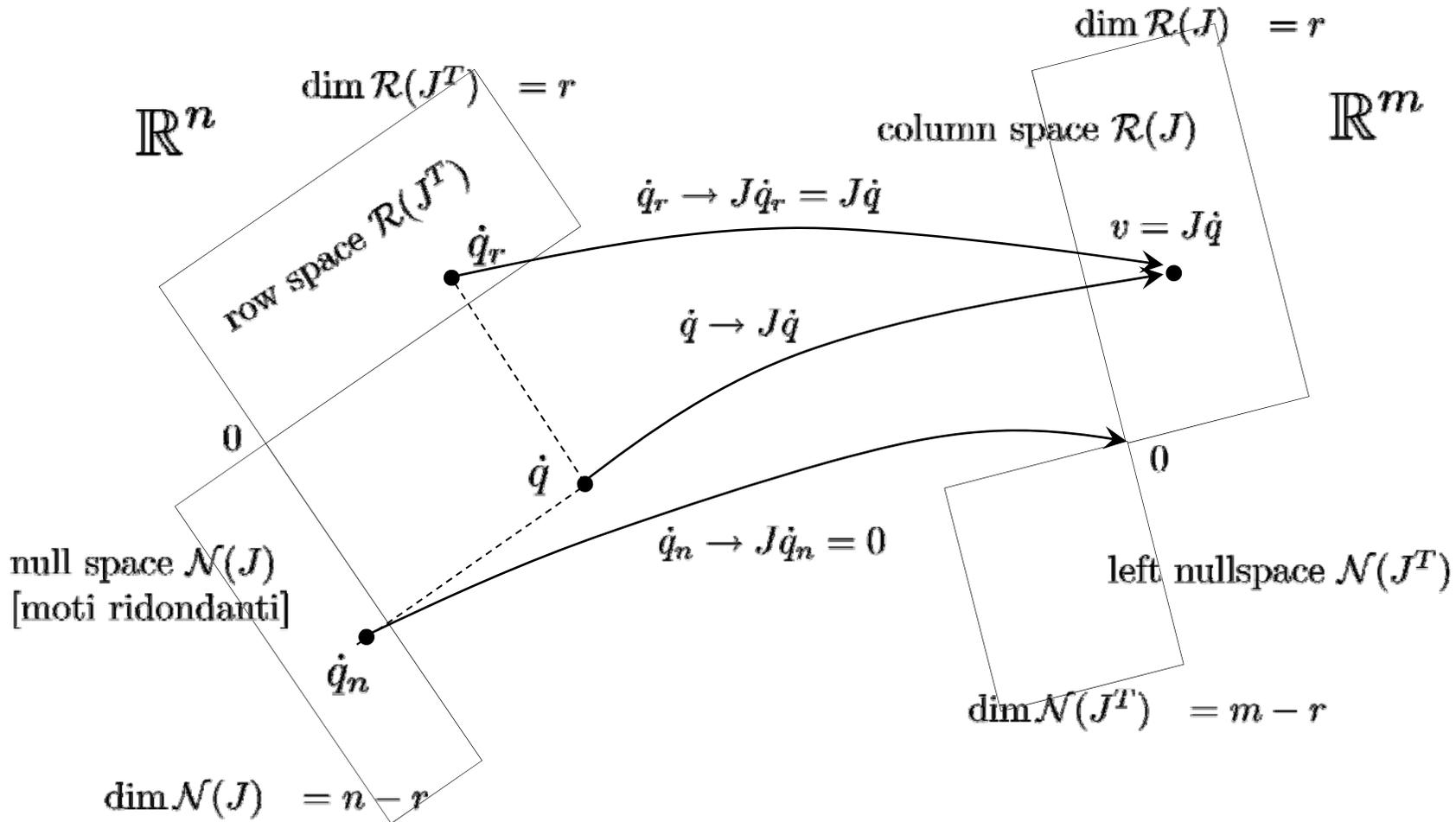
- I wrench strutturali sono complementari alle velocità possibili dell'end-effector;
- Le velocità (ai giunti) ridondanti sono complementari alle coppie ai giunti eccitabili da wrench sull'end-effector.

Azione del Jacobiano sulle velocità ai giunti

Ricordandoci che $v = J(q)\dot{q}$ e che sussistono le seguenti relazioni fra i sottospazi di J

$$\begin{cases} \mathcal{R}(J)^\perp = \mathcal{N}(J^T) \\ \mathcal{N}(J)^\perp = \mathcal{R}(J^T) \end{cases}$$

È interessante visualizzare la situazione col seguente schema:

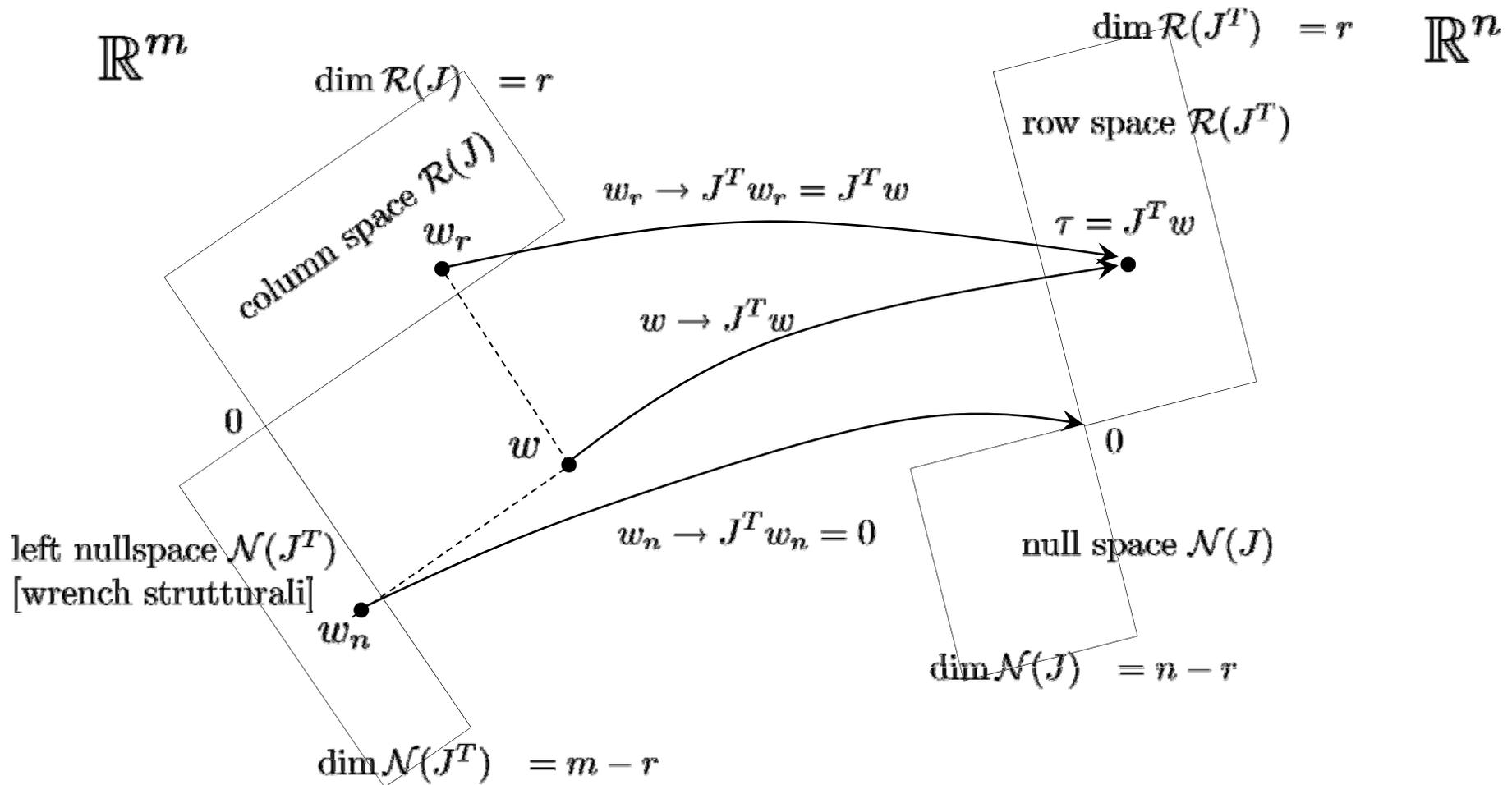


Azione del Jacobiano trasposto sui wrench all'end-effector

Ricordandoci che $\tau = J(q)^T w$ e che sussistono le seguenti relazioni fra i sottospazi di J

$$\begin{cases} \mathcal{R}(J)^\perp = \mathcal{N}(J^T) \\ \mathcal{N}(J)^\perp = \mathcal{R}(J^T) \end{cases}$$

È interessante visualizzare la situazione col seguente schema:



Esempio numerico – Sottospazi fondamentali di un Jacobiano

Supponiamo che in una certa configurazione il Jacobiano abbia la seguente forma

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad m = 2, \quad n = 3; \quad r = \text{rank } J = 1 \quad J^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il Jacobiano J si riferisce ad un manipolatore ridondante $n > m$ in una configurazione singolare, dal momento che $r < m$, ossia il Jacobiano non ha rango pieno righe.

La dimensione $\dim \mathcal{R}(J) = r = 1$, quindi in \mathbb{R}^2 (velocità possibili dell'e.-e)

$$\mathcal{R}(J) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

La dim. $\dim \mathcal{N}(J^T) = m - r = 1$, quindi in \mathbb{R}^2 (direz. non ragg./wrench strutturali)

$$\mathcal{N}(J^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

La dimensione $\dim \mathcal{R}(J^T) = r = 1$, quindi in \mathbb{R}^3 (coppie ai giunti eccitabili da e.-e.)

$$\mathcal{R}(J^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

La dimensione $\dim \mathcal{N}(J) = n - r = 2$, quindi in \mathbb{R}^3 $\mathcal{N}(J) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
(velocità ai giunti che lasciano fermo e.-e. (ridondanti))

Singularità cinematiche

Abbiamo visto che il Jacobiano nell'equazione della cinematica differenziale di un manipolatore definisce una trasformazione lineare dipendente dalla configurazione q

$$v = J(q)\dot{q}$$

Le configurazioni per cui il Jacobiano diminuisce di rango sono dette **singularità cinematiche**. La caratterizzazione delle singularità è di notevole interesse perché:

- a) le singularità rappresentano configurazioni in corrispondenza delle quali si ha perdita di mobilità della struttura, ossia sono impediti certe direzioni per la velocità dell'e.-e.;
- b) quando la struttura è in una configurazione singolare, possono esistere infinite soluzioni al problema cinematico inverso anche se manip. non era ridondante;
- c) nell'intorno di una singularità, velocità ridotte dell'e.-e. nello spazio operativo possono indurre velocità molto elevate nello spazio dei giunti.

Possono trovarsi:

1. *Ai confini dello spazio di lavoro raggiungibile*: manipolatore è tutto steso o ripiegato su sé stesso (non sono vero problema, si fa in modo che lavori all'interno);
2. *All'interno dello spazio di lavoro raggiungibile*: causati da allineamento di uno o più assi in moto (sono problema serio: possono essere raggiunti anche da traiettorie pianificate all'interno dello spazio operativo)

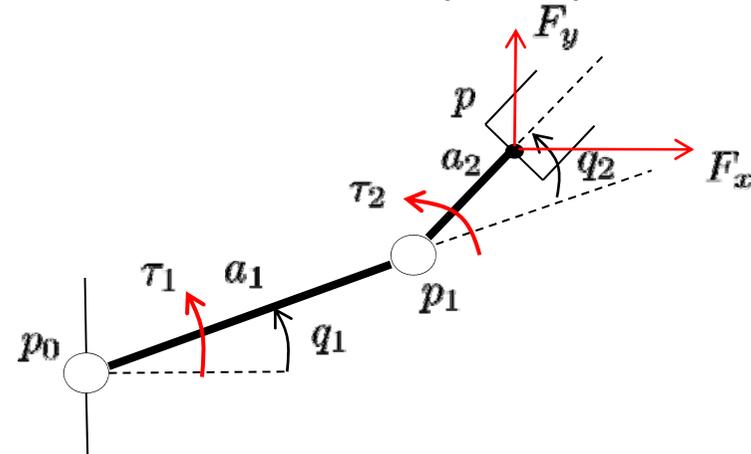
Ricerca di singolarita' per RR planare

Consideriamo RR planare e guardiamo solo componenti di velocità in x e y, dunque:

$$J_P(q) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Proviamo anche a ricavare manualmente il Jacobiano (alla lavagna) anche mediante la caratterizzazione statica...

$$\tau = J_P^T(q)w$$



Consideriamo quindi un wrench costituito dalla sola forza (senza coppia su e.-e.)

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = J_P^T(q) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

Per analizzare il rango della matrice $J_P(q)$ se ne considera il determinante che è dato da:

$$\det(J_P(q)) = a_1 a_2 s_2$$

che, nell'ipotesi di $a_1, a_2 \neq 0$, si annulla per $q_2 = 0$; $q_2 = \pi$, singolarità ai confini dello spazio di lavoro. In questa configurazione la velocità \dot{p} non può avere direzione parallela al braccio.

Condizioni di singularita' per RR planare

Nel caso $q_2 = 0$ il braccio è steso ed il Jacobiano singolare risulta

$$J_P(q) = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2)s_1 & -a_2s_1 \\ (a_1 + a_2)c_1 & a_2c_1 \end{bmatrix}$$

da se semplici calcoli si determina che

$$\mathcal{N}(J) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{a_1+a_2}{a_2} \end{bmatrix} \right\}$$

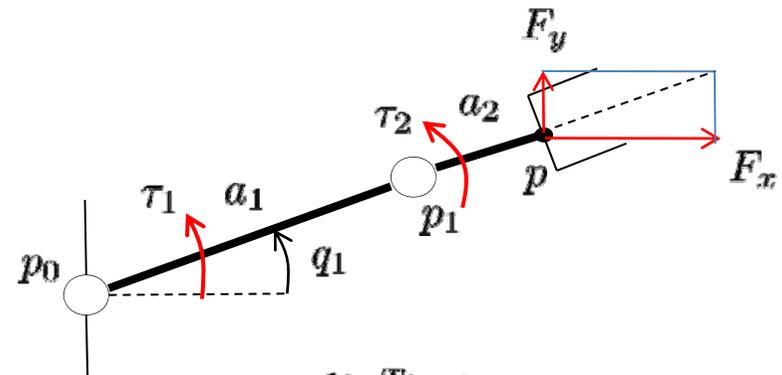
In tale condizione tra l'altro, dato che $m=2, r=1$, esiste anche un $\mathcal{N}(J^T) \neq 0$, ossia dei wrench strutturali (che si scaricano direttamente sulla struttura). In tale caso si verifica che

$$\mathcal{N}(J^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \right\}$$

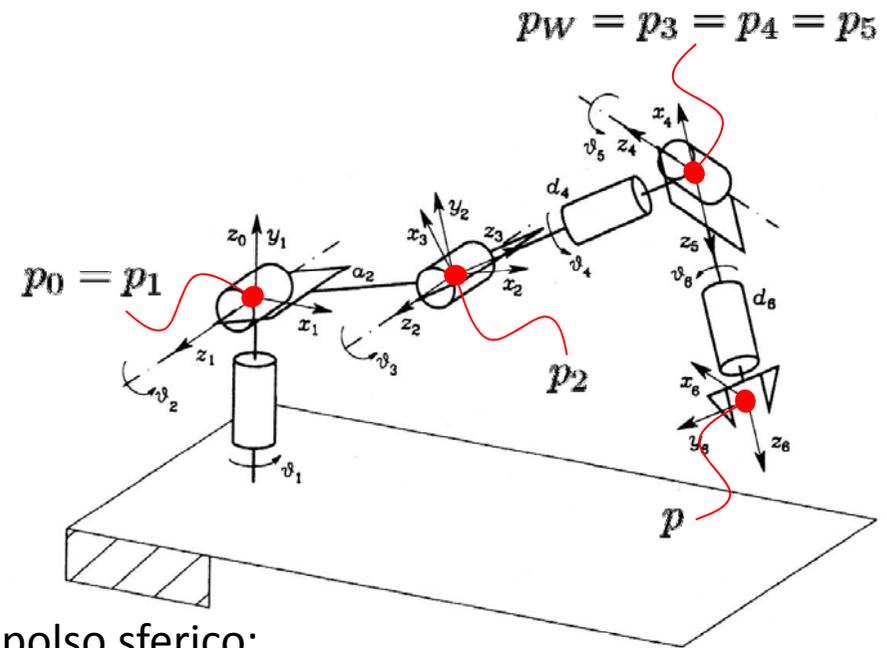
Nel caso invece che $q_2 = \pi$ il manipolatore è ripiegato su sé stesso e si ha

$$J_P(q) = \begin{bmatrix} (-a_1 + a_2)s_1 & a_2s_1 \\ -(-a_1 + a_2)c_1 & -a_2c_1 \end{bmatrix}$$

per cui $\mathcal{N}(J) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a_1-a_2}{a_2} \end{bmatrix} \right\}$ ed ancora $\mathcal{N}(J^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \right\}$



Disaccoppiamento di singolarita'



Jacobiano del manipolatore antropomorfo con polso sferico:

$$J(q) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \hat{z}_0(p - p_0) & \hat{z}_1(p - p_1) & \hat{z}_2(p - p_2) & \hat{z}_3(p - p_W) & \hat{z}_4(p - p_W) & \hat{z}_5(p - p_W) \\ \hline z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{array} \right]$$

Partizionandolo a blocchi risulta, $J(q) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $J_{ij}(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$J(q) = \left[\begin{array}{c|c} J_{11}(q) & J_{12}(q) \\ \hline J_{21}(q) & J_{22}(q) \end{array} \right]$$

Se la terna utensile viene posta con origine $p = p_W$ si ha $J_{12} = 0_3$ ed il Jacobiano risulta essere **triangolare inferiore a blocchi**

$$J(q) = \left[\begin{array}{c|c} J_{11}(q) & 0_3 \\ \hline J_{21}(q) & J_{22}(q) \end{array} \right]$$

Disaccoppiamento di singolarità'

Quindi la ricerca delle singolarità annullando il determinante di $J(q)$ si semplifica poiché il suo determinante è dato dal prodotto dei determinanti dei due blocchi sulla diagonale

$$\det(J(q)) = \det(J_{11}(q_1, q_2, q_3)) \det(J_{22}(q_4, q_5, q_6)) = 0$$

In sostanza si è ottenuto il **disaccoppiamento delle singolarità** poiché la condizione

$$\det(J_{11}(q_1, q_2, q_3)) = 0$$

permette di determinare le **singolarità di struttura portante**, mentre la

$$\det(J_{22}(q_4, q_5, q_6)) = 0$$

permette di determinare le **singolarità di polso**.

E' importante notare che l'aver messo l'origine della terna utensile con $p = p_w$ non influenza dove si trovano le singolarità, che sono una caratteristica della struttura meccanica, ma costituisce semplicemente uno stratagemma per calcolarle in modo algebricamente più semplice.

Analizziamo adesso i due tipi di singolarità introdotti.

Singularita' di polso

Analizzando semplicemente il blocco $J_{22}(q)$ che ha espressione

$$J_{22} = [z_3 \quad z_4 \quad z_5]$$

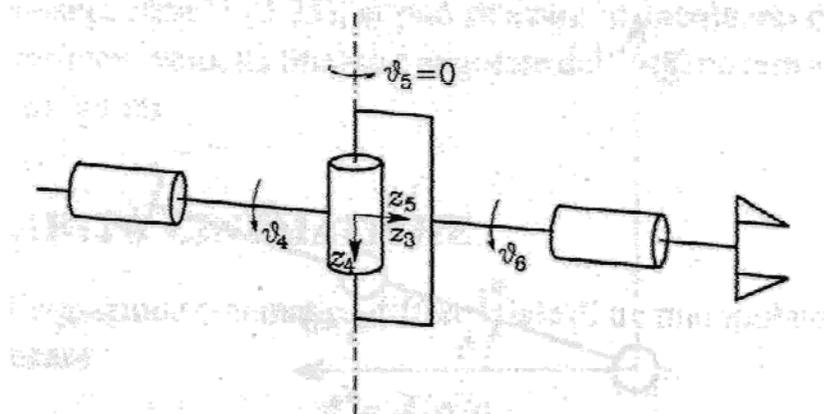
risulta, banalmente, che $\det(J_{22}) = 0$ quando i tre vettori risultano complanari, poiché come visto in passato il calcolo del prodotto misto

$$z_3 \times z_4 \cdot z_5 = \det([z_3 \quad z_4 \quad z_5])$$

Dunque per Denavit-Hartenberg si ha complanarità per i tre vettori solo quando:

$$\theta_5 = 0, \quad \theta_5 = \pi$$

Indipendentemente dalla postura esterna del polso. Nel primo caso, ad es., si ha:



L'altro caso corrisponde alla condizione di polso ripiegato su sé stesso che nella pratica può non essere realizzabile a causa dell'esistenza di fine-corsa ai giunti.

Singularita' di struttura portante

Sono caratteristiche del particolare manipolatore considerato. Per il manipolatore antropomorfo dell'esempio, il blocco $J_{11}(q) = J_P(q)$ precedentemente mostrato che ha espressione:

$$J_P(q) = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix};$$

Il suo determinante vale:

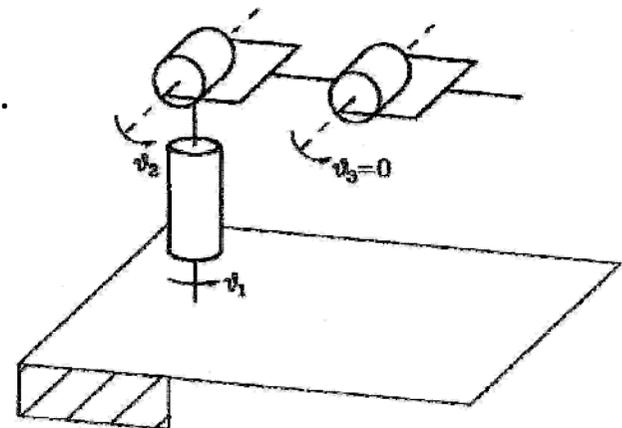
$$\det(J_P) = -a_2a_3s_3(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

Nell'ipotesi di $a_2, a_3 \neq 0$, il determinante (che non dipende da θ_1) si annulla per

$$\theta_3 = 0, \quad \theta_3 = \pi$$

e si verifica quando il gomito è tutto steso o tutto ripiegato su sé stesso. Si parla in questo caso di **singularità di gomito**.

Questa singularità è del tutto analoga a quella trovata per il manipolatore planare a due bracci.



Singularita' di struttura portante

Un'altra condizione per cui si annulla il determinante di $J_P(q)$ corrisponde al caso già visto nella cinematica inversa e si verifica quando il centro del polso si trova sull'asse di rotazione del primo giunto, ossia su z_0 , per cui si ha

$$p_x = p_y = 0$$

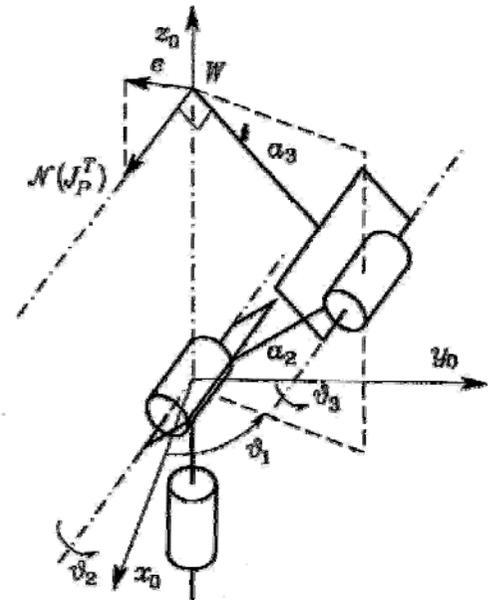
e viene detta **singularità di spalla**.

E' interessante notare che in questa condizione di singularità

$$m = 3; r = 2$$

Dunque, si ha l'apparizione di un left-null space $\mathcal{N}(J^T)$ di dimensione $m - r = 3 - 2 = 1$ che rappresenta :

- il sottospazio di \mathbb{R}^m non raggiungibile per l'e.-e. , ossia in cui non può avere velocità l'e.-e.;
- il sottospazio di \mathbb{R}^m che indica le direzioni in cui un wrench esterno (in questo caso solo una forza) si scarica direttamente attraverso la struttura senza che siano "eccitate" coppie ai giunti.



Inversione della cinematica differenziale

L'equazione della cinematica differenziale stabilisce un legame lineare tra velocità ai giunti e velocità dell'e.-e., sebbene dipendente dalla configurazione q .

Infatti:

$$v = J(q)\dot{q}$$

Se quindi si specifica per l'organo terminale una traiettoria di moto, specificando $v(t)$ e le condizioni iniziali su posizione ed orientamento, si può "invertire" l'equazione determinando una possibile traiettoria ai giunti $(q(t), \dot{q}(t))$ che riproduca la traiettoria data.

Nell'ipotesi $m = n = r$, *Jacobiano quadrato di rango pieno*:

$$\dot{q} = J^{-1}(q)v$$

Nota la postura iniziale del manipolatore $q(0)$ (ad. es. avendo risolto cin. inversa), le posizioni possono essere calcolate integrando le velocità nel tempo

$$q(t) = \int_0^t \dot{q}(\zeta) d\zeta + q(0)$$

Numericamente, es. con Eulero in avanti (forward Euler), si fissa $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ da cui:

$$q_{k+1} = q_k + \dot{q}_k \Delta t, \quad \text{dove ad ogni passo: } \dot{q}_k = J(q_k)^{-1}v_k$$

Algoritmi per l'inversione cinematica

Consideriamo, per fissare le idee, un manipolatore quadrato di rango pieno, per cui si ha $m = n = r$. Consideriamo di voler seguire una traiettoria nello spazio operativo espressa dal vettore $x_d(t)$, la cui derivata è $\dot{x}_d(t)$.

Dalla cinematica differenziale, impiegando il Jacobiano analitico:

$$\dot{x} = J_A(q)\dot{q} \quad \rightarrow \quad \dot{q} = J_A(q)^{-1}\dot{x}$$

Per cui invertendo la cinematica differenziale per seguire la $\dot{x}_d(t)$ si ha:

$$\dot{q}_d = J_A(q)^{-1}\dot{x}_d$$

Se si definisce l'errore di inseguimento come la differenza (nello spazio operativo):

$$e = x_d - x$$

la sua derivata, con le velocità ai giunti $\dot{q} = \dot{q}_d$, risulta

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} = \dot{x}_d - J_A(q)\dot{q} = \dot{x}_d - J_A(q)J_A(q)^{-1}\dot{x}_d = \dot{x}_d - \dot{x}_d = 0$$

A causa di una inversione non perfetta della cinematica inversa e/o degli errori commessi nella integrazione numerica si avrà quasi certamente una dinamica dell'errore divergente.

Occorre pertanto impiegare un algoritmo di inversione che tenga conto dell'errore nello spazio operativo.

Inversione cinematica con (pseudo-)inversa del Jacobiano

Ricordiamo la definizione dell'errore di inseguimento come:

$$e = x_d - x$$

La cui derivata rispetto al tempo risulta

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} = \dot{x}_d - J_A(q)\dot{q}$$

Nell'ipotesi (precedente) che il Jacobiano sia quadrato ed invertibile, la scelta

$$\dot{q} = J_A(q)^{-1}(\dot{x}_d + Ke), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \text{p.d.}$$

Porta ad una dinamica dell'errore retta dall'equazione differenziale lineare

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} = \dot{x}_d - J_A(q)\dot{q} = \dot{x}_d - J_A(q)J_A^{-1}(q)(\dot{x}_d + Ke) = -Ke$$

ossia

$$\dot{e} = -Ke \quad \rightarrow \quad e(t) = \exp(-Kt)e(0)$$

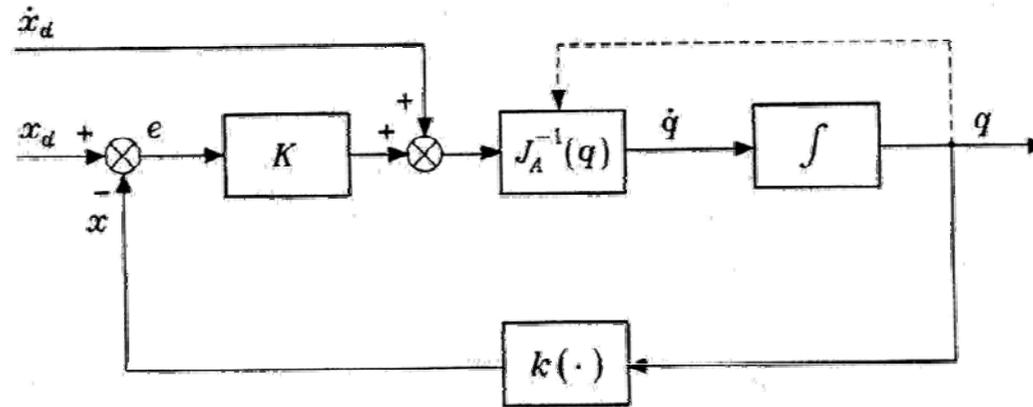
la cui velocità di convergenza dipende dagli autovalori della matrice K . Supponendo per ipotesi $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$ con $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$ si ha che la dinamica della componente i -esima dell'errore risulta essere

$$e_i(t) = \exp(-k_i t)e_i(0)$$

La dinamica più veloce è associata all'autovalore più grande k_1

Inversione cinematica con (pseudo-)inversa del Jacobiano

Schema dell'algoritmo per l'inversione cinematica $\dot{q} = J_A(q)^{-1}(\dot{x}_d + Ke)$



Attenzione al fatto che una dinamica dell'errore che può essere resa convergente a zero nel continuo con velocità arbitraria, in fase di implementazione nel TD risulta convergente solo se gli autovalori stanno all'interno del cerchio unitario.

Infatti, ad es. con Eulero in avanti e granularità Δt , la dinamica dell'errore risulta

$$\dot{e} = -Ke \rightarrow \dot{e} \simeq \frac{e_{k+1} - e_k}{\Delta t} \rightarrow e_{k+1} = (I - K\Delta t)e_k$$

Autovalori sono $\lambda_i = 1 - k_i\Delta t$. Perché il sistema TD risulti ancora A.S. occorre che

$$|\lambda| = |1 - k\Delta t| < 1 \rightarrow k < \frac{2}{\Delta t}$$

Dunque la dinamica più veloce è legata al tempo di campionamento.

Per manip. ridondante: $\dot{q} = J_A^+(\dot{x}_d + Ke) + (I - J_A^+J_A)\dot{q}_0$

Inversione cinematica con trasposta del Jacobiano

Obiettivo è determinare un algoritmo per l'inversione cinematica più semplice del precedente dal punto di vista computazionale (non si vuol calcolare l'inversa) che assicuri la convergenza a zero dell'errore $e = x_d - x$.

Si impiega metodo diretto di Lyapunov per determinare legame $\dot{q}(e)$.

Si introduce la candidata di Lyapunov

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T K e, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ simm. e p.d.}$$

Per tale funzione $V(e) > 0 \quad \forall e \neq 0, \quad V(0) = 0$.

Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{V} = e^T K \dot{e} = e^T K \dot{x}_d - e^T K \dot{x} = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q) \dot{q}$$

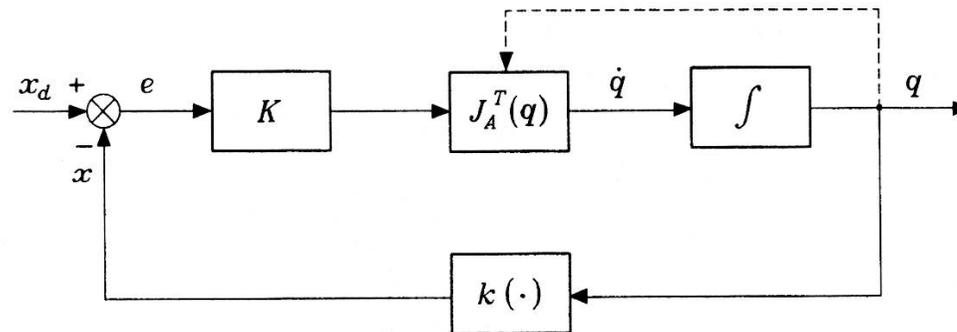
La scelta di una velocità ai giunti come

$$\dot{q} = J_A^T(q) K e$$

comporta che

$$\dot{V} = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q) J_A^T(q) K e$$

Analisi inversione cinematica con trasposta del Jacobiano



Abbiamo trovato che con $\dot{q} = J_A^T(q)Ke$ la \dot{V} risulta:

$$\dot{V} = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q) J_A^T(q) K e$$

Caso 1) Il riferimento è costante, $x_d = \text{cost} \rightarrow \dot{x}_d = 0$ (moto punto-punto)

$$\dot{V} = -e^T K J_A(q) J_A^T(q) K e$$

Nell'ipotesi che $J_A(q)$ sia di rango pieno, $\dot{V} < 0$ con la condizione $V > 0$ implica per Lyapunov che le traiettorie del sistema convergono uniformemente ad $e = 0$, quindi il sistema risulta A.S.

Nel caso però il $\mathcal{N}(J_A^T) \neq 0$ la $\dot{V} \leq 0$ con, in particolare, $\dot{V} = 0$ quando $Ke \in \mathcal{N}(J_A^T)$ nel qual caso $\dot{V} = 0$ con $e \neq 0$. In tale caso l'algoritmo si trova in una situazione di stallo e si blocca. Questa eventualità si verifica solo se la posizione assegnata all'organo terminale non è effettivamente raggiungibile a partire dalla posizione corrente.

Analisi inversione cinematica con trasposta del Jacobiano

Caso 2) Il riferimento non è costante, ossia $\dot{x}_d \neq 0$. Il primo termine non viene cancellato e nulla si può dire sul suo segno

$$\dot{V} = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q) J_A^T(q) K e$$

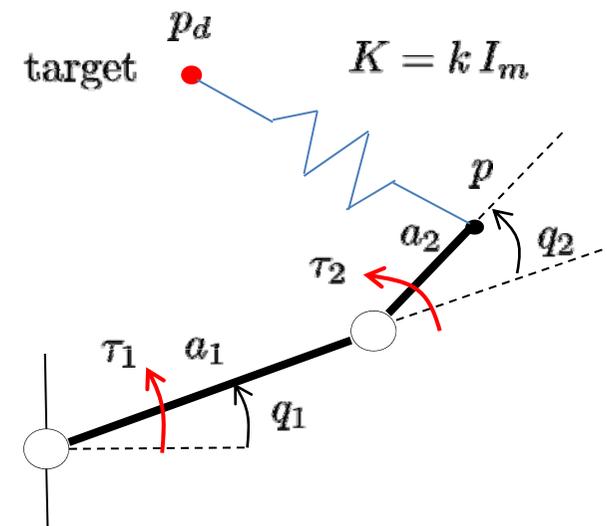
Ciò comporta che:

- non è possibile ottenere l'asintotica stabilità lungo la traiettoria;
- l'errore di inseguimento $e(t)$ è comunque limitato superiormente in norma e risulta tanto più piccolo quanto più grande è la norma della matrice dei guadagni K ;
- esiste comunque un limite superiore sulla norma di K in relazione al periodo di campionamento nella implementazione in TD.

Interpretazione fisica:

- es. RR solo posiz.: “dinamica fittizia” governata da

$$\dot{q} = \tau = J^T K (p_d - p)$$



Considerazioni sull'errore di orientazione

Errore di posizione:

$$e_P = p_d - p$$

Errore di orientazione con **Jacobiano analitico**.

Impiegando una (medesima) rappresentazione minima dell'orientazione si può definire l'errore fra l'orientazione desiderata e quella attuale, come differenza fra gli angoli corrispondenti (es. Eulero ZYZ)

$$e_O = \Phi_d - \Phi$$

- è agevole per assegnare l'orientamento desiderato $\Phi_d(t)$;
- richiede comunque il passaggio attraverso la matrice $R = [n \ s \ a]$ per l'estrazione degli angoli Φ in funzione delle variabili di giunto q (necessari per calcolo di $J_{A,O}$)
- comodo per manipolatori con polso sferico

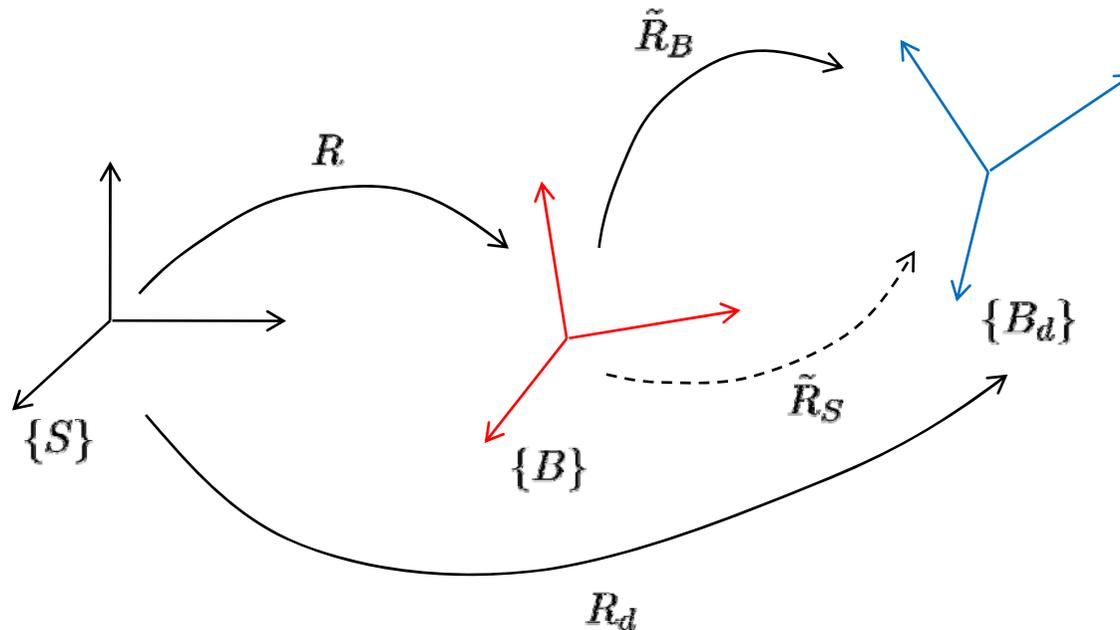
Impiegando il Jacobiano analitico l'algoritmo con inversa del Jacobiano risulta quindi

$$\dot{q} = J_A^{-1}(q) \begin{bmatrix} \dot{p}_d + K_P e_P \\ \dot{\Phi}_d + K_O e_O \end{bmatrix} = J_A^{-1}(q) \left(\begin{bmatrix} \dot{p}_d \\ \dot{\Phi}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_P & 0_3 \\ 0_3 & K_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_P \\ e_O \end{bmatrix} \right)$$

con K_O, K_P p.d., da cui risulta A.S. nell'inseguimento del riferimento sia di posizione che di orientazione.

Considerazioni sull'errore di orientazione – asse/angolo

Errore di orientazione rappresentato dalla matrice \tilde{R}



Frame fisso: $\{S\}$

Frame attuale: $\{B\}$

$$R = [n \ s \ a]$$

Frame desiderato: $\{B_d\}$

$$R_d = [n_d \ s_d \ a_d]$$

L'errore di orientazione può essere espresso in terna:

- locale (in $\{B\}$), per cui $R\tilde{R}_B = R_d \rightarrow \tilde{R}_B = R^T R_d$
- fissa (in $\{S\}$), per cui $\tilde{R}_S R = R_d \rightarrow \tilde{R}_S = R_d R^T$

Consideriamo il secondo caso, ossia **l'errore di orientazione espresso in terna fissa**

Considerazioni sull'errore di orientazione – asse/angolo

Della matrice \tilde{R}_S che rappresenta l'errore di orientazione in terna fissa $\{S\}$ estraiamo i parametri asse/angolo, ossia θ, r dove:

$$\cos \theta = \frac{\text{tr}(\tilde{R}_S) - 1}{2}; \quad r = \frac{(\tilde{R}_S - \tilde{R}_S^T)^\vee}{2 \sin \theta}$$

e definiamo come errore di orientazione il vettore $e_O \triangleq r \sin \theta$. È facile vedere che è una scelta ragionevole, poichè se $\tilde{R}_S = I \rightarrow e_O = 0$.

È utile ricordare che:

$$\tilde{R}_S = R_d R^T = \begin{bmatrix} n_d & s_d & a_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^T \\ s^T \\ a^T \end{bmatrix} = n_d n^T + s_d s^T + a_d a^T$$

e che per l'operatore

$$\text{vect}(\tilde{R}_S) = \frac{(\tilde{R}_S - \tilde{R}_S^T)^\vee}{2} \triangleq e_O$$

vale la seguente proprietà: $a, b \in \mathbb{R}^3 \quad \text{vect}(ab^T) = \frac{1}{2} b \times a = \frac{1}{2} \hat{b} a$.

Una forma equivalente per il calcolo dell'errore di orientazione è quindi

$$\begin{aligned} e_O &= r \sin \theta = \frac{(\tilde{R}_S - \tilde{R}_S^T)^\vee}{2} = \text{vect}(\tilde{R}_S) = \text{vect}(n_d n^T + s_d s^T + a_d a^T) \\ &= \frac{1}{2} (n \times n_d + s \times s_d + a \times a_d) = \frac{1}{2} (\hat{n} n_d + \hat{s} s_d + \hat{a} a_d) \end{aligned}$$

Derivata dell'errore di orientazione – asse/angolo

Per calcolare la derivata dell'errore di orientazione conviene usare la forma

$$e_O = \frac{1}{2}(\hat{n}n_d + \hat{s}s_d + \hat{a}a_d)$$

Ricordandosi che $\dot{R} = \hat{\omega}R \rightarrow [\dot{n} \ \dot{s} \ \dot{a}] = \hat{\omega} [n \ s \ a]$, quindi $\dot{n} = \hat{\omega}n$; $\dot{s} = \hat{\omega}s$; $\dot{a} = \hat{\omega}a$

Derivando e_O rispetto al tempo si ha quindi:

$$\begin{aligned}\dot{e}_O &= \frac{1}{2}(\dot{n} \times n_d + \dot{s} \times s_d + \dot{a} \times a_d + n \times \dot{n}_d + s \times \dot{s}_d + a \times \dot{a}_d) \\ &= \frac{1}{2}((\hat{\omega}n) \times n_d + (\hat{\omega}s) \times s_d + (\hat{\omega}a) \times a_d) + \frac{1}{2}(n \times (\hat{\omega}_d n_d) + s \times (\hat{\omega}_d s_d) + a \times (\hat{\omega}_d a_d)) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{n}_d \hat{n} \omega + \hat{s}_d \hat{s} \omega + \hat{a}_d \hat{a} \omega) - \frac{1}{2}(\hat{n} \hat{n}_d \omega_d + \hat{s} \hat{s}_d \omega_d + \hat{a} \hat{a}_d \omega_d) \\ &= L^T \omega_d - L \omega\end{aligned}$$

dove si è definito:

$$L \triangleq -\frac{1}{2}(\hat{n}_d \hat{n} + \hat{s}_d \hat{s} + \hat{a}_d \hat{a})$$

e si è sfruttata la nota proprietà delle matrici anti-simmetriche: $(\hat{n} \hat{n}_d)^T = \hat{n}_d \hat{n}$

Utilizziamo questa definizione per la dinamica dell'errore di orientazione.

Dinamica con inversa del Jacobiano geometrico – asse/angolo

La dinamica dell'errore globale, cioè di posizione + orientazione, risulta quindi:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_P \\ \dot{e}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_d - J_P(q)\dot{q} \\ L^T \omega_d - L J_O(q)\dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_d \\ L^T \omega_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_P(q) & 0_3 \\ 0_3 & L J_O(q) \end{bmatrix} \dot{q}$$

Una legge di velocità ai giunti con inversa del Jacobiano per manipolatore non ridondante non in singolarità che renda asintoticamente stabile a zero l'errore è:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} J_P^{-1}(q) & 0_3 \\ 0_3 & J_O^{-1}(q) L^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \dot{p}_d \\ L^T \omega_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_P & 0_3 \\ 0_3 & K_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_P \\ e_O \end{bmatrix} \right)$$

In tal modo infatti, le dinamiche degli errori di posizione ed orientazione risultano disaccoppiate e governate dalle seguenti equazioni differenziali lineari

$$\dot{e}_P = -K_P e_P$$

$$\dot{e}_O = -K_O e_O$$

Osserva che la velocità angolare desiderata in $\{S\}$ è calcolata sistematicamente impiegando la formula già vista:

$$\hat{\omega}_d = \dot{R}_d R_d^T$$

Manipolatori ridondanti

Nel caso in cui un manipolatore è ridondante si ha $n > m$ ed il Jacobiano è rett. basso

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & \cdots & \cdots & J_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ J_{m1} & \cdots & \cdots & J_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Se consideriamo che abbia rango pieno righe, allora $\dim(\mathcal{N}(J)) = n - m$, ed esiste un sottospazio di moti ridondanti (ai giunti) di dimensione $n - m$ che lasciano invariata la velocità dell'end-effector v .

Allora assegnata v , si può risolvere il problema come pb. di ottimo vincolato.

Si definisce un funzionale di costo quadratico nelle \dot{q}

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T W \dot{q}, \quad W \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ simm. e positiva definita}$$

e si cerca la soluzione "ottima" \dot{q}^* richiedendo:

$$\dot{q}^* = \operatorname{argmin} g(\dot{q}), \text{ s.t. } v = J\dot{q}$$

I pesi in W posso essere scelti, ad. esempio, inversamente proporzionali alle escursioni ammissibili dei rispettivi giunti.

Manipolatori ridondanti – soluzione cin. diff. inversa

Si introduce il Lagrangiano ed il vettore dei moltiplicatori di Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$

$$L(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{q}^T W \dot{q} + \lambda^T (v - J\dot{q})$$

e si cercano i minimi non vincolati di questo funzionale, nella var. (\dot{q}, λ) da cui:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T = 0 \in \mathbb{R}^n; \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)^T = 0 \in \mathbb{R}^m \quad (m+n \text{ eq. in } m+n \text{ inc.})$$

Dalla prima:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T = \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T (W + W^T) - \lambda^T J \right)^T = W \dot{q} - J^T \lambda = 0 \rightarrow \dot{q} = W^{-1} J^T \lambda$$

Dalla seconda (come sempre) si ha il vincolo:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)^T = v - J \dot{q} = 0 \rightarrow v = J \dot{q}$$

Combinando le condizioni si ha:

$$v = JW^{-1} J^T \lambda$$

Nell'ipotesi che J sia di rango pieno m , la matrice $JW^{-1} J^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è invertibile:

$$\lambda = (JW^{-1} J^T)^{-1} v$$

Manipolatori ridondanti – soluzione cin. diff. inversa

Dunque, risostituendo nella prima equazione:

$$\dot{q} = W^{-1} J^T (JW^{-1} J^T)^{-1} v$$

Verifica vincolo della cinematica differenziale, infatti: $J\dot{q} = (JW^{-1} J^T)(JW^{-1} J^T)^{-1} v = v$

E quindi si definisce inversa destra di J pesata in W la matrice:

$$J_W^R = W^{-1} J^T (JW^{-1} J^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m} : J J_W^R = I_m$$

Nel caso in cui $W = I_n$ si ha che $J_W^R = J^+$, ossia è la pseudo-inversa

$$J^+ = J^T (J J^T)^{-1}$$

Perciò la soluzione che minimizza localmente la norma 2 della velocità ai giunti è:

$$\dot{q} = J^+ v$$

Dato che la soluzione non vincolata al problema $v = J\dot{q}$ in \dot{q} è data in generale da:

$$\dot{q} = J^+ v + P \dot{q}_0, \quad P : \mathcal{R}(P) \equiv \mathcal{N}(J), \quad P \text{ proiettore nel nullo di } J$$

infatti: $J\dot{q} = J J^+ v + J P \dot{q}_0 = v$

Perciò per la presenza di gradi di mobilità ridondanti permette di specificare una traiettoria \dot{q}_0 nello spazio dei giunti da cercare di seguire (vincolo debole) a cui è associata la massimizzazione di qualche indice di prestazione. Vediamo come.

Manipolatori ridondanti – specifica di traiettoria nello spazio-giunti

Assegnata v , si definisce un funzionale di costo quadratico negli scarti fra velocità \dot{q} che consente di ottenere v all'end-effector (obiettivo primario) ed una certa \dot{q}_0 desiderata che specifica un obiettivo secondario:

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_0)^T W (\dot{q} - \dot{q}_0)$$

col solito vincolo che $v = J\dot{q}$ e W simmetrica e positiva definita.

Procedendo come prima si cerca la soluzione “ottima” come:

$$\dot{q}^* = \operatorname{argmin} g(\dot{q}), \text{ s.t. } v = J\dot{q}$$

Manipolatori ridondanti – specifica di traiettoria nello spazio-giunti

Si introduce il Lagrangiano ed il vettore dei moltiplicatori di Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$

$$L(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_0)^T W (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^T (v - J\dot{q})$$

e si cercano i minimi non vincolati di questo funzionale, nella var. (\dot{q}, λ) da cui:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^T = 0 \in \mathbb{R}^n; \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)^T = 0 \in \mathbb{R}^m \quad (m+n \text{ eq. in } m+n \text{ inc.})$$

Dalla prima:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^T = \left((\dot{q} - \dot{q}_0)^T W - \lambda^T J\right)^T = W(\dot{q} - \dot{q}_0) - J^T \lambda = 0 \rightarrow \dot{q} = \dot{q}_0 + W^{-1} J^T \lambda$$

Dalla seconda (come sempre) si ha il vincolo:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)^T = v - J\dot{q} = 0 \rightarrow v = J\dot{q}$$

Combinando le condizioni si ha:

$$v = J\dot{q}_0 + JW^{-1} J^T \lambda$$

Nell'ipotesi che J sia di rango pieno m , la matrice $JW^{-1} J^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è invertibile:

$$\lambda = (JW^{-1} J^T)^{-1} (v - J\dot{q}_0)$$

Manipolatori ridondanti – specifica di traiettoria nello spazio-giunti

Sostituendo nella espressione per \dot{q}

$$\dot{q} = \dot{q}_0 + W^{-1} J^T (JW J^T)^{-1} (v - J\dot{q}_0)$$

ma la matrice $W^{-1} J^T (JW J^T)^{-1} = J_W^R$, perciò

$$\dot{q} = \dot{q}_0 + J_W^R (v - J\dot{q}_0)$$

ovvero in una forma più espressiva

$$\dot{q} = J_W^R v + (I_n - J_W^R J) \dot{q}_0$$

dove la matrice $P \triangleq (I_n - J_W^R J)$ è il proiettore nel $\mathcal{N}(J)$, infatti

$$JP = J(I_n - J_W^R J) = J - (JJ_W^R)J = 0_{n \times n}$$

Se poi si considera come matrice di peso l'identità e quindi si minimizza semplicemente la norma-2 dello scarto, allora la soluzione risulta

$$\dot{q} = J^+ v + (I_n - J^+ J) \dot{q}_0$$

Composizione soluz.: $J^+ v$ soluzione di norma minima per \dot{q} ;

$(I_n - J^+ J) \dot{q}_0$ moti interni che riconfigurano manip. lasciando inalterata posiz. ed orientaz. dell'e.-e.
(soluzione omogenea)

Analisi della soluzione Jacobian-based+proiezione nel nullo

La soluzione della cinematica ridondante può essere espressa in modo generale:

$$\dot{q} = \underbrace{J^+ v}_{\text{soluzione a norma minima (unica)}} + \underbrace{(I_n - J^+ J) \dot{q}_0}_{\text{soluzioni dell'eq.ne omogenea associata } J\dot{q} = 0 \text{ (automovimenti)}}$$

soluzione a norma minima (unica)

soluzioni dell'eq.ne omogenea associata $J\dot{q} = 0$ (automovimenti)

$$P \triangleq (I_n - J^+ J) \text{ "proiettore" nel } \mathcal{N}(J) \\ \text{tale che } \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(J)$$

Proprietà del proiettore $P \triangleq (I_n - J^+ J)$

- simmetrica: $P^T = (I_n - J^+ J)^T = I_n - (J^+ J)^T = I_n - J^+ J = P$ {4.} MP – inverse
- idempotente: $(I_n - J^+ J)^2 = (I_n - J^+ J)$
- $(I_n - J^+ J)^+ = I_n - J^+ J$

In generale quindi:

$$\dot{q} = J^+ v + (I_n - J^+ J) \dot{q}_0$$

Come scegliere \dot{q}_0 ?

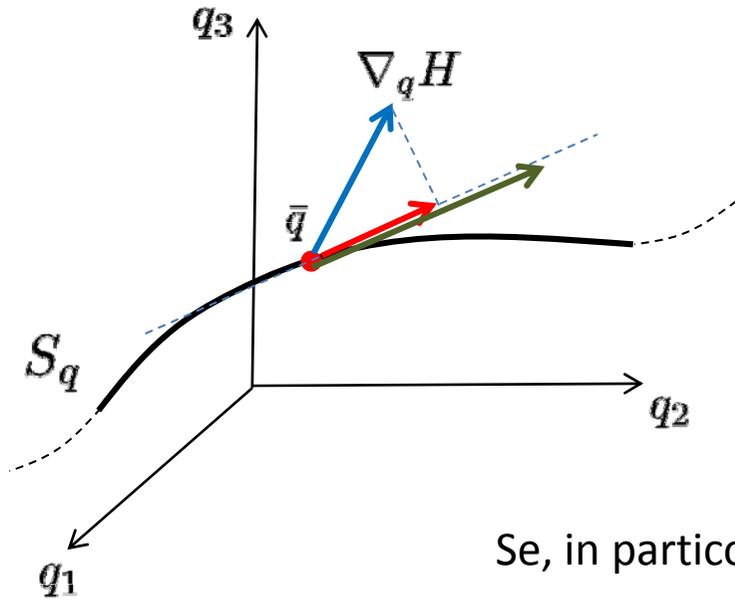
Spazio nullo + gradiente proiettato

$$\dot{q} = J^+ v + (I_n - J^+ J) \dot{q}_0$$

La scelta di \dot{q}_0 viene fatta in modo da massimizzare (localmente) una f.ne obiettivo:

$$\dot{q}_0 = \nabla_q H(q), \quad H(q) \text{ f.ne obiettivo derivabile}$$

Si implementa un algoritmo di ottimizzazione vincolata



$$S_q = \{q \in \mathbb{R}^n : f(q) = p\}$$

Ad es., per un cammino fissato $p(t)$, in un suo punto $\bar{p} = f(\bar{q})$ la velocità è stabilita dalla:

$$\dot{q} = \underbrace{J^+ v}_{\text{green arrow}} + \underbrace{(I_n - J^+ J)}_{\text{red arrow}} \nabla_q H(q)$$

Se, in particolare $p(t) = \bar{p}$ fisso, $v = 0$ e:

$$\dot{q} = \underbrace{(I_n - J^+ J)}_{\text{red arrow}} \nabla_q H(q)$$

Come utilizzare convenientemente i g.d.l. ridondanti?

Il vettore \dot{q}_0 viene tipicamente scelto della seguente forma

$$\dot{q}_0 = k_0 \left(\frac{\partial w(q)}{\partial q} \right)^T, \quad k_0 > 0$$

con $w(q) \in \mathbb{R}$ funzione obiettivo (da massimizzare) nelle variabili di giunto.

Il vettore \dot{q}_0 cerca di far muovere il manipolatore in una direzione che massimizza *localmente* la funzione obiettivo, dal momento che ci si sposta nella direzione del gradiente, ossia nella direzione di massima salita.

Possibili scelte per la funzione obiettivo sono:

$w(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T q)}$, si cerca di stare lontano dalle singularità ed aumentare la manipolabilità;

$w(q) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2$, si cerca di portare ciascuna variabile di giunto verso il centro della corsa;

$w(q) = \min_{\substack{p \in \text{robot} \\ o \in \text{obstacle}}} \|p(q) - o\|$, si cerca di evitare la collisione del manipolatore con un ostacolo

Inversione nell'intorno di una singolarità cinematica

Le soluzioni precedenti sono state trovate nell'ipotesi che il Jacobiano avesse rango pieno righe, ossia $r = m$ (ricorda invertibilità di $JW^{-1}J^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$).

Dunque è possibile determinare una soluzione in \dot{q} solo se $v \in \mathcal{R}(J)$, in tal caso la traiettoria è fisicamente realizzabile dal manipolatore anche se esso è in configurazione singolare.

Se invece $v \notin \mathcal{R}(J)$ allora il percorso assegnato non è eseguibile dal manipolatore nella postura assegnata.

A questo punto la soluzione può essere trovata cercando di risolvere la cinematica differenziale inversa "meglio che si può", cercando di limitare la velocità ai giunti che tenderebbe ad "esplodere" vicino alla singolarità.

Si cerca pertanto di minimizzare il funzionale di costo in \dot{q} (cin. diff. inv.=vincolo debole)

$$g(\dot{q}) = g'(\dot{q}) + g''(\dot{q}) = \frac{1}{2}(v - J\dot{q})^T(v - J\dot{q}) + \frac{1}{2}\rho^2\dot{q}^T\dot{q}$$

La soluzione risulta essere:

$$\left(\frac{\partial g(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T = \left(\frac{\partial g'(\dot{q})}{\partial (v - J\dot{q})} \frac{\partial (v - J\dot{q})}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial g''(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T = \left(-(v - J\dot{q})^T J + \rho^2 \dot{q}^T \right)^T = 0$$

Ossia, introducendo la inversa ai minimi quadrati smorzata J_ρ^+

$$\dot{q} = J_\rho^+ v, \quad \text{con} \quad J_\rho^+ = J^T (JJ^T + \rho^2 I_m)^{-1} \quad (\text{inversa destra smorzata})$$

$$\text{oppure} \quad J_\rho^+ = (J^T J + \rho^2 I_n)^{-1} J^T \quad (\text{inversa sinistra smorzata})$$

Inversione in condizioni di singolarità' con SVD

Nel caso in cui si voglia invertire la cinematica differenziale in condizioni di singolarità, si può impiegare la decomposizione ai valori singolari (SVD) della matrice Jacobiana.

La soluzione determinata corrisponde alla soluzione di norma minima (in \dot{q}) a residuo minimo (in $v - J\dot{q}$)

$$v = J\dot{q} = U\Sigma V^T \dot{q} \quad \rightarrow \quad \dot{q} = J^+ v = V\Sigma^+ U^T v$$

con

$$J \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad \text{rank}(J) = r \leq \min\{m, n\};$$

$$U \in \mathbb{R}^{m \times m} : UU^T = I_m; \quad U = [U_1 \cdots U_m], \quad U_i \text{ autovett. di } JJ^T$$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n} : VV^T = I_n; \quad V = [V_1 \cdots V_n], \quad V_i \text{ autovett. di } J^T J$$

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n} : \Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) & 0_{r \times (n-r)} \\ \hline 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right], \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

Inoltre si definisce la Σ^+

$$\Sigma^+ \in \mathbb{R}^{n \times m} : \Sigma^+ = \left[\begin{array}{c|c} \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r) & 0_{(r) \times (m-r)} \\ \hline 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (m-r)} \end{array} \right]$$

tale che

$$\Sigma\Sigma^+ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r \times (m-r)} \\ \hline 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (m-r)} \end{array} \right]; \quad \Sigma^+\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ \hline 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (n-r)} \end{array} \right];$$

Gestione della ridondanza mediante “Spazio di Lavoro Aumentato”

Se prima si desiderava “solo”:

$$f(q) = p, \quad f \in \mathbb{R}^m, \quad q \in \mathbb{R}^n$$

che conduce alla relazione differenziale in cui bisogna gestire la ridondanza

$$v = J\dot{q}, \quad J \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m < n$$

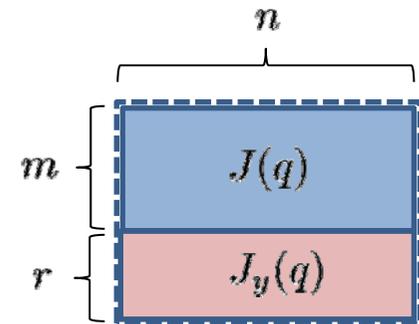
Adesso si aggiunge un ulteriore vincolo funzionale

$$f_y(q) = y, \quad y \in \mathbb{R}^r, \quad r \leq n - m$$

corrispondente a qualche aspetto desiderabile della soluzione.

Si definisce quindi il task aumentato nel seguente modo:

$$p_A \triangleq \begin{bmatrix} p \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(q) \\ f_y(q) \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \dot{p}_A = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(q) \\ J_y(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q) \dot{q}$$



Osserva che $J_A(q) \in \mathbb{R}^{(m+r) \times n}$

Si cerca una soluzione ancora nella forma

$$\dot{q} = J_A^+ \dot{p}_A$$

Nel caso particolare in cui $r = n - m$ (si completa lo spazio di lavoro, Jacobiano esteso)

$$\dot{q} = J_A^{-1} \dot{p}_A$$

“Spazio di Lavoro Aumentato” – vantaggi/svantaggi

VANTAGGI

- maggiore controllo sulla soluzione inversa;
- con Jacobiano esteso ($r = n - m$) in assenza di singularità algoritmiche, si può prendere $\dot{q} = J_A^{-1} \dot{p}_A$;
- lo schema è ripetibile;
- se $f_y(q) = 0$ corrisponde a condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità per un certo criterio $H(q)$, lo schema assicura il mantenimento dell’ottimalità durante il moto dell’E.-E.;

SVANTAGGI

- si introduco singularità algoritmiche quando, nonostante

$$\text{rank}(J) = m, \quad \text{rank}(J_y) = r$$

si ha

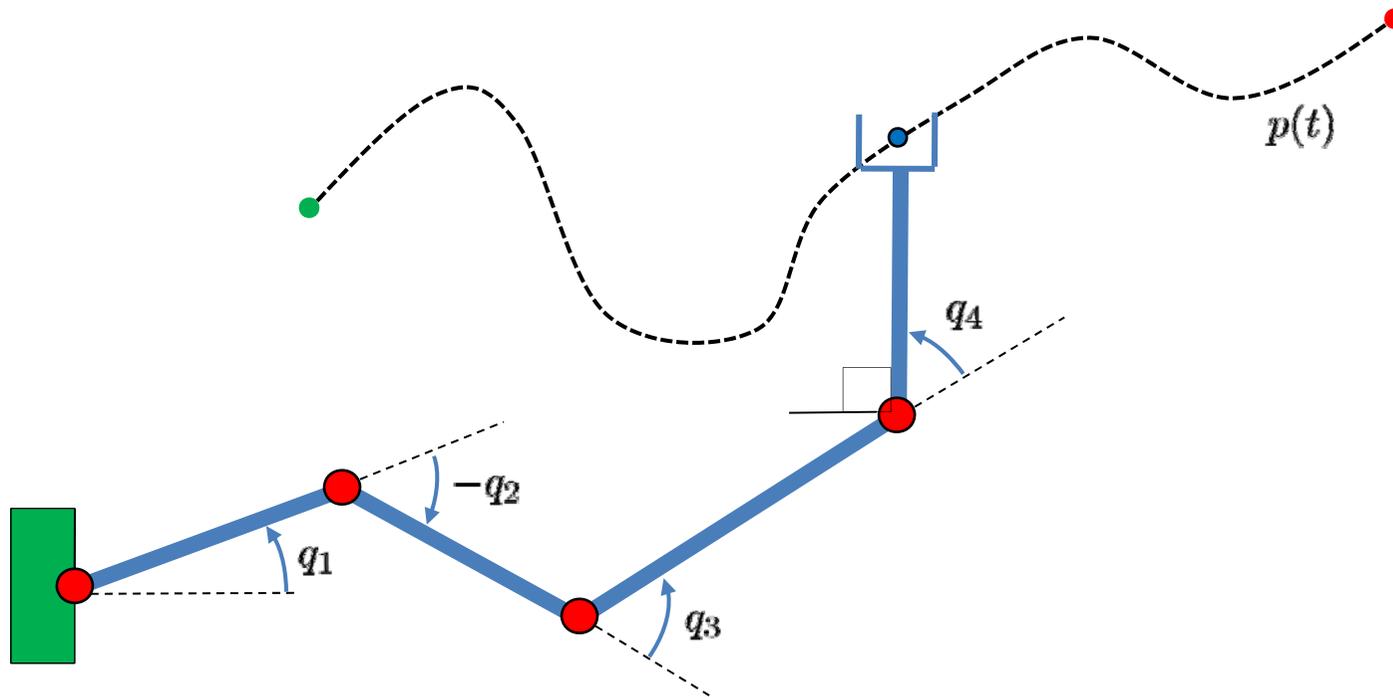
$$\text{rank}(J_A) < m + r$$

Per evitare ciò dovrebbe essere sempre (righe di J e righe di J_y linearmente indep.)

$$\mathcal{R}(J^T) \cap \mathcal{R}(J_y^T) = \emptyset$$

Ciò è difficile da ottenere globalmente!

“Spazio di Lavoro Aumentato” – esempio



Dimensioni dello spazio di lavoro, numero di giunti $m = 2, \quad n = 4$

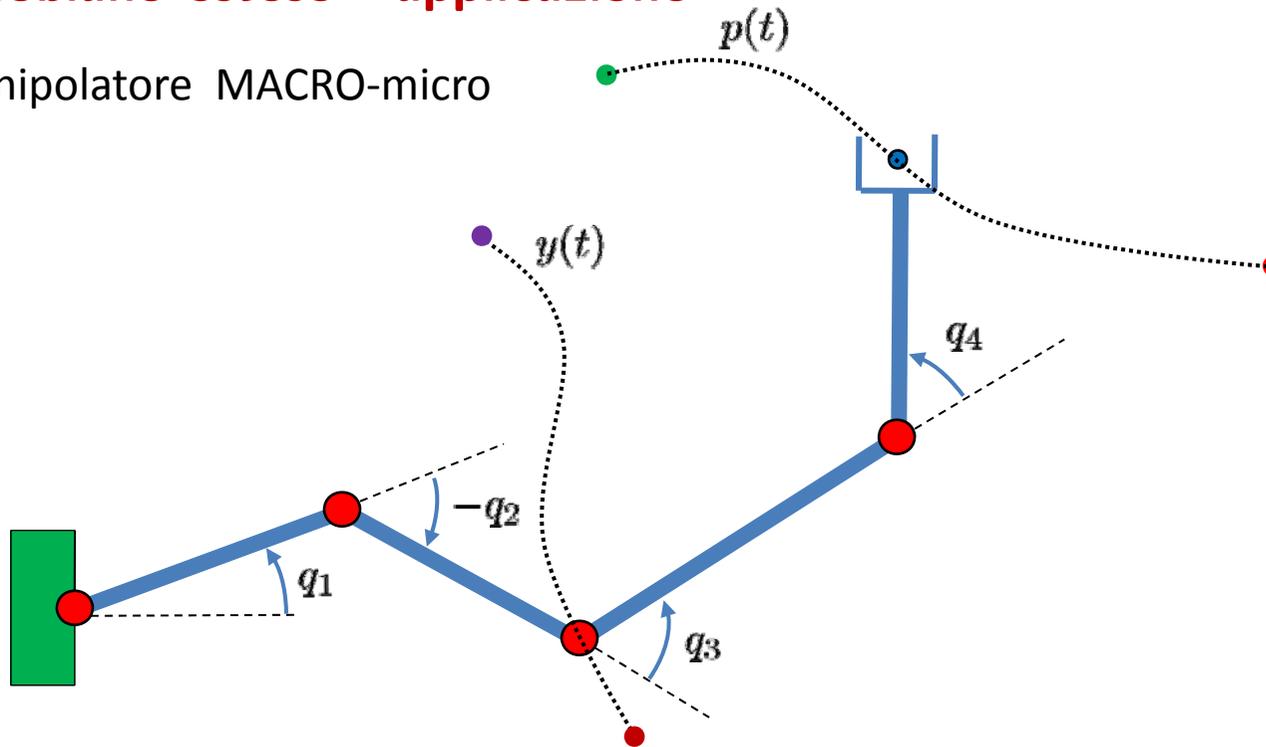
Coordinate di giunto relative (usuali), $q_i, \quad i = 1, \dots, 4$

Nel seguire la traiettoria, l'ultimo braccio deve rimanere verticale:

$$f_y(q) = \sum_i^4 q_i = \pi/2, \quad (r = 1), \quad \rightarrow \quad J_y(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = 0$$

Jacobiano esteso - applicazione

Manipolatore MACRO-micro



Dimensioni dello spazio di lavoro, numero di giunti $m = 2, \quad n = 4$

$$\dot{p} = J(q_1, \dots, q_4)\dot{q}$$

$$\dot{y} = J_y(q_1, q_2)\dot{q}$$

Impilandoli, il Jacobiano esteso assume la seguente struttura a blocchi

$$\dot{p}_A = J_A(q)\dot{q}, \quad J_A(q) = \begin{bmatrix} J \\ J_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

Strategia a priorit  di compito (1)

Se il **compito originale** $v = J(q)\dot{q}$ ha una **priorit  maggiore** del **compito aggiuntivo** $\dot{y} = J_y(q)\dot{q}$

- si fa prima in modo che venga eseguito il compito prioritario

$$\dot{q} = J^+v + (I - J^+J)\dot{q}_0$$

- e poi si sceglie \dot{q}_0 in modo da soddisfare anche il compito secondario

$$\dot{y} = J_y(q)\dot{q} = J_yJ^+v + J_y(I - J^+J)\dot{q}_0 = J_yJ^+v + \tilde{J}_y\dot{q}_0$$

dove si   definito $\tilde{J}_y \triangleq J_y(I - J^+J)$

Si determina cos  \dot{q}_0

$$\dot{q}_0 = \underbrace{\tilde{J}_y^+(\dot{y} - J_yJ^+v)}_{\text{soluzione a norma min. che verifica entrambi i compiti}} + \underbrace{(I - \tilde{J}_y^+\tilde{J}_y)\dot{q}_1}_{\text{soluzioni dell'eq.ne omogenea associata } \tilde{J}_y\dot{q}_0 = 0 \text{ (automovimenti che non alterano ambo i compiti)}}$$

\dot{q}_1 a disposizione per ulteriori compiti a pi  bassa priorit 

soluzione a norma min. che verifica entrambi i compiti

soluzioni dell'eq.ne omogenea associata $\tilde{J}_y\dot{q}_0 = 0$ (automovimenti che non alterano ambo i compiti)

Strategia a priorit  di compito (2)

- sostituendo l'espressione di \dot{q}_0 in

$$\dot{q} = J^+v + (I - J^+J)\dot{q}_0$$

dove si era trovato:

$$\dot{q}_0 = \tilde{J}_y^+(\dot{y} - J_yJ^+v) + (I - \tilde{J}_y^+\tilde{J}_y)\dot{q}_1$$

si ha:

$$\dot{q} = J^+v + (I - J^+J)\tilde{J}_y^+(\dot{y} - J_yJ^+v) + (I - J^+J)(I - \tilde{J}_y^+\tilde{J}_y)\dot{q}_1$$

ricordandosi che $\tilde{J}_y \triangleq J_y(I - J^+J)$, il termine

$$(I - J^+J)[J_y(I - J^+J)]^+ = [J_y(I - J^+J)]^+ = \tilde{J}_y^+$$

Questo deriva da $C[BC]^+ = [BC]^+$ se C   idempotente.

In definitiva:

$$\dot{q} = J^+v + \tilde{J}_y^+(\dot{y} - J_yJ^+v) + (I - J^+J)(I - \tilde{J}_y^+\tilde{J}_y)\dot{q}_1$$

\dot{q}_1 a disposizione per ulteriori
compiti a pi  bassa priorit 

Il grande vantaggio della strategia   che il compito principale non   pi  affetto dalle singularit  algebriche!

Manipolabilita'

Un braccio in configurazione singolare, o pressoché singolare, si comporta in modo assai diverso a seconda delle direzioni in cui il moto viene specificato.

Facciamo esempio in cui $m = n = r$ ma siamo vicini alla singolarità, perciò $\sigma_n \simeq 0$

$$v = J\dot{q} = U\Sigma V^T \dot{q} \rightarrow U^T v = \Sigma V^T \dot{q}$$

scrivendo la cinematica differenziale in basi di autovettori sia in partenza che in arrivo

$$\bar{v} \triangleq U^T v; \quad \dot{\bar{q}} \triangleq V^T \dot{q}$$

si ottiene

$$\bar{v} = \Sigma \dot{\bar{q}} \rightarrow \dot{\bar{q}} = \Sigma^+ \bar{v}$$

che tradotto componente per componente risulta $\dot{\bar{q}}_i = \frac{1}{\sigma_i} \bar{v}_i$.

Quindi se uno vuole muovere l'e.-e. nella direzione dell' n-esimo elemento della base canonica $\bar{v} = e_n = (0, \dots, 0, 1)$ deve applicare una velocità $\dot{\bar{q}} = \Sigma^+ e_n = (0, \dots, 0, 1/\sigma_n)$ ossia **molto elevata**, dato che $\sigma_n \simeq 0$. Inoltre, nelle coordinate originarie, le direzioni delle velocità nello spazio dei giunti e nello spazio operativo si corrispondono come gli autovettori V_n con U_n

$$\bar{v} = e_n \triangleq U^T v \rightarrow v = U e_n = U_n;$$

$$\dot{\bar{q}} = \frac{1}{\sigma_n} e_n \triangleq V^T \dot{q} \rightarrow \dot{q} = V \frac{1}{\sigma_n} e_n = \frac{1}{\sigma_n} V_n$$

Manipolabilita'

Se invece uno vuole muovere l'e.-e. nella direzione del primo elemento della base canonica $\bar{v} = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ è sufficiente che applichi una velocità relativamente bassa $\bar{v} = \Sigma^+ e_n = (1/\sigma_1, 0, \dots, 0)$, poiché in generale $\sigma_1 \gg 1$.

Inoltre, nelle coordinate originarie, le direzioni delle velocità nello spazio dei giunti e nello spazio operativo si corrispondono come gli autovettori V_1 ed U_1

$$\begin{aligned}\bar{v} = e_1 &\stackrel{\Delta}{=} U^T v \quad \rightarrow \quad v = U e_1 = U_1; \\ \dot{\bar{q}} = \frac{1}{\sigma_1} e_1 &\stackrel{\Delta}{=} V^T \dot{q} \quad \rightarrow \quad \dot{q} = V \frac{1}{\sigma_1} e_1 = \frac{1}{\sigma_1} V_1\end{aligned}$$

Questo dimostra che quando siamo nei pressi di una singolarità si delinea un comportamento fortemente “anisotropo” del manipolatore, in quanto certe direzioni nello spazio operativo risultano essere molto “costose” mentre altre sono “abbastanza economiche” in termini di velocità ai giunti da applicare per realizzarle.

Formalizziamo più precisamente questo concetto seguendo due strade equivalenti.

Manipolabilita'

Cerchiamo di vedere come varia $\|v\|^2 = v^T v$, dove $v = J\dot{q}$ al variare di \dot{q} sulla sfera unitaria S_2 in \mathbb{R}^n , dove $S_2 = \{\dot{q} : \|\dot{q}\| = 1\}$.

Si cercano perciò i punti di massimo e di minimo con $\dot{q} \in S_2$ della funzione

$$v^T v = f(\dot{q}) = \dot{q}^T J^T J \dot{q}$$

Equivalentemente si possono cercare i p.ti di max e min del Lagrangiano

$$L(\dot{q}, \lambda) = f(\dot{q}) - 2\lambda(\dot{q}^T \dot{q} - 1) = \dot{q}^T J^T J \dot{q} - 2\lambda(\dot{q}^T \dot{q} - 1)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. In questo modo:

$$\left(\frac{\partial L(\dot{q}, \lambda)}{\partial \dot{q}} \right)^T = (2\dot{q}(J^T J) - 2\lambda\dot{q}^T)^T = 0 \quad \rightarrow \quad (J^T J)\dot{q} = \lambda\dot{q}$$

$$\left(\frac{\partial L(\dot{q}, \lambda)}{\partial \lambda} \right)^T = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{q}^T \dot{q} = 1$$

Problema agli autovalori di $J^T J$. Gli autovalori sono $\lambda_i = \sigma_i^2$ ed autovettori sono $\{\dot{q}\}_i = V_i$. Perciò

$$f(\dot{q}) = \dot{q}^T J^T J \dot{q} = \dot{q}^T \sigma_i^2 \dot{q} = \sigma_i^2, \quad \|\dot{q}\| = 1$$

$$f_{\max} = f(V_1) = \sigma_1^2; \quad f_{\min} = f(V_n) = \sigma_n^2$$

Manipolabilita'

Vogliamo vedere direttamente come la matrice Jacobiana J deforma la sfera unitaria in \mathbb{R}^n delle velocità ai giunti $S_2 = \{\dot{q} : \|\dot{q}\| = 1\}$, ossia $J(S_2)$.

$$J = U\Sigma V^T; \quad J^+ = V\Sigma^+U^T$$

con J^+ pseudoinversa di Moore-Penrose. Allora la soluzione nelle velocità ai giunti:

$$v = J\dot{q} \quad \rightarrow \quad \dot{q} = J^+v$$

Imponendo di stare sulla sfera unitaria per le velocità ai giunti

$$\begin{aligned} 1 &= \dot{q}^T \dot{q} = v^T (J^+)^T J^+ v = v^T (V\Sigma^+U^T)^T V\Sigma U^T v = v^T U\Sigma^{+T} V^T V\Sigma^+U^T v \\ &= v^T U\Sigma^{+T} \Sigma^+U^T v \triangleq w^T (\Sigma^{+T} \Sigma^+) w \end{aligned}$$

Ricordandosi che

$$\Sigma^+ \in \mathbb{R}^{n \times m} : \Sigma^+ = \left[\begin{array}{c|c} \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r) & \mathbf{0}_{(r) \times (m-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \mathbf{0}_{(n-r) \times (m-r)} \end{array} \right]$$

$$\Sigma^{+T} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \Sigma^{+T} = \left[\begin{array}{c|c} \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r) & \mathbf{0}_{(r) \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right]$$

$$(\Sigma^{+T} \Sigma^+) = \left[\begin{array}{c|c} \text{diag}(1/\sigma_1^2, \dots, 1/\sigma_r^2) & \mathbf{0}_{(r) \times (m-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (m-r)} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Ellissoide (eventualm. degenerare) di manipolabilita' in velocita'

Nella base di autovettori per v , ossia nelle coordinate $w \triangleq U^T v$ l'immagine della sfera unitaria risulta essere

$$1 = w^T (\Sigma^{+T} \Sigma^+) w$$

ossia più esplicitamente $1 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{w_r^2}{\sigma_r^2}$

che definisce un'ellissoide (eventualmente degenerare come in questo caso) con semiassi non degeneri di lunghezza pari ai valori singolari non nulli $\sigma_i, i = 1, \dots, r$. Le $m - r$ coordinate mancanti sono relative ai semiassi degeneri (valori singolari nulli).

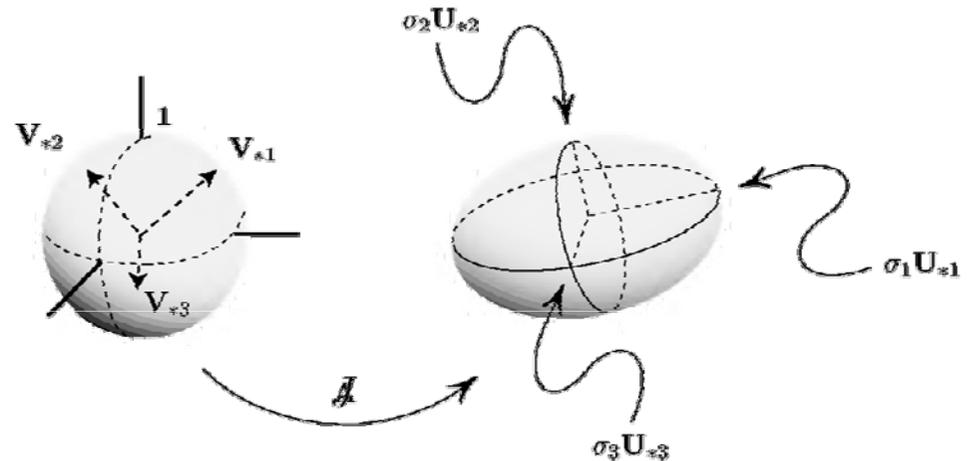
Il punto sull'asse maggiore è dato da $w = (\sigma_1, 0, \dots, 0) = \sigma_1 e_1$

che, in termini di coordinate originarie in v risulta dato dal primo autovettore amplificato σ_1 volte

$$\sigma_1 e_1 = U^T v \rightarrow v = \sigma_1 U e_1 = \sigma_1 U_1$$

In termini di \dot{q} la direzione corrisp. è data dall'autovettore

$$\dot{q} = V_1$$



Ellissoide (eventualm. degenera) di manipolabilita' in forza

Si procede con un ragionamento analogo al precedente, ma stavolta si cerca l'immagine della sfera unitaria in termini di coppie ai giunti $S_2 = \{\tau : \|\tau\| = 1\}$, ossia $J(S_2)$.

Da $\tau = J^T w$ si impone perciò

$$\tau^T \tau = 1 \quad \rightarrow \quad w^T J J^T w = 1$$

Mediante la SVD $J J^T = U(\Sigma \Sigma^T)U^T$ da cui, passando nella base di autovettori U_i

$$1 = w^T U(\Sigma \Sigma^T)U^T w \quad \rightarrow \quad 1 = z^T (\Sigma \Sigma^T) z$$

con $z \triangleq U^T w$. Allora dato che

$$(\Sigma \Sigma^T) = \left[\begin{array}{c|c} \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2) & 0_{(r) \times (m-r)} \\ \hline 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (m-r)} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

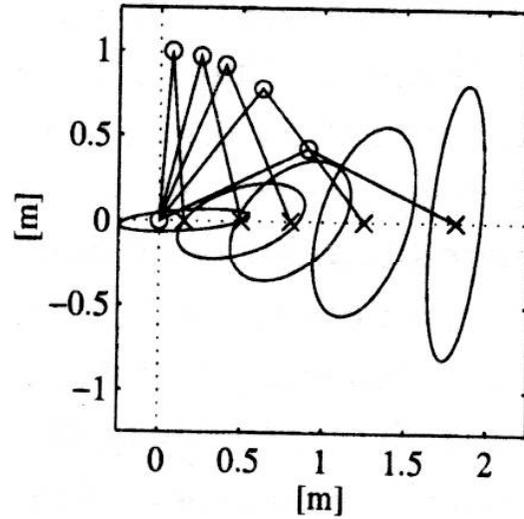
esplicitamente si ha l'equazione di un ellissoide

$$1 = \frac{z_1^2}{\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2} + \dots + \frac{z_r^2}{\left(\frac{1}{\sigma_r}\right)^2}$$

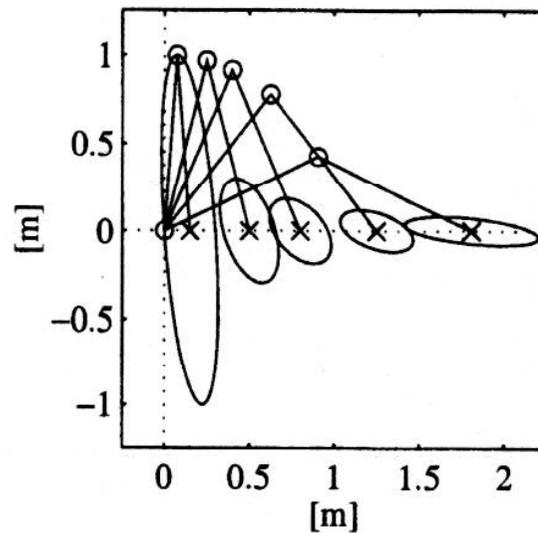
Osserva che i semiassi corrispondenti alle stesse direzioni (precedenti) U_i hanno adesso lunghezze pari ai reciproci dei valori di quelli dell'ellissoide di manipolabilita' in velocita'. Vediamo quindi qualche esempio.

Ellissi di manipolabilita' in velocita' ed in forza per RR planare

Ellissi di manipolabilità **in velocità** per RR planare al variare della configurazione

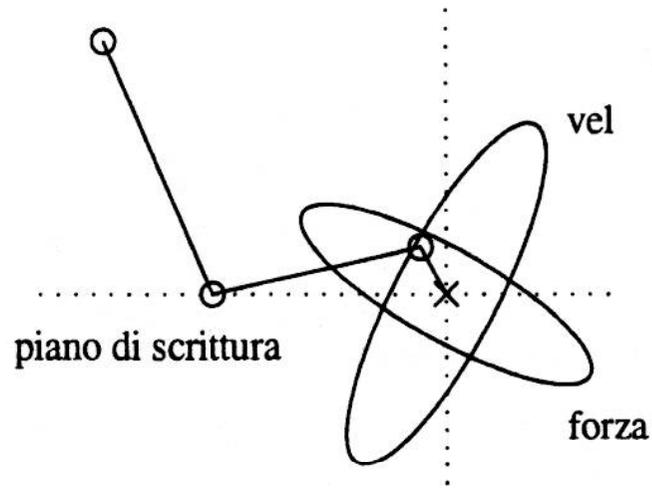


Ellissi di manipolabilità **in forza** per RR planare al variare della configurazione



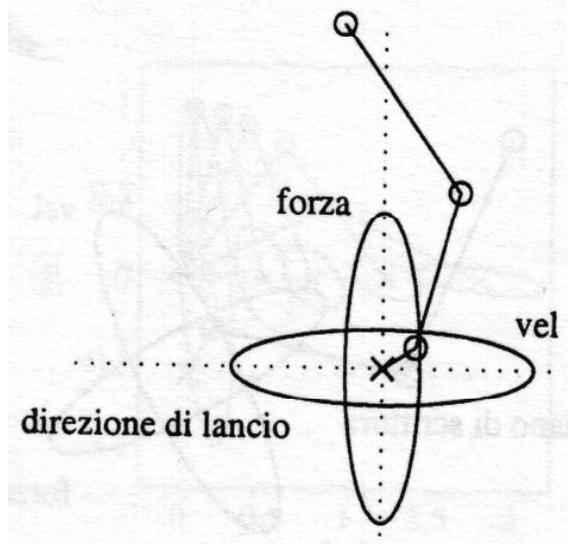
Ellissi di manipolabilita' per due compiti del braccio umano

Ellissi di manipolabilità in velocità/forza per **compito di scrittura**



- necessità di controllare finemente una forza verticale (la pressione della penna sul foglio);
- e controllare finemente la velocità orizzontale (per scrivere in bella grafia);
- il braccio tende a disporsi in modo che le ellissi di manipolabilità soddisfino le specifiche del compito

Ellissi di manipolabilità in velocità/forza per **compito di lancio palla da bowling**



- necessità di resistere alla elevata forza peso e centrifuga nel lancio della palla da bowling;
- capacità di imprimere alla palla una elevata velocità orizzontale;
- il braccio tende a disporsi in modo che le ellissi di manipolabilità siano coi semiassi proprio nelle direzioni in cui si richiede max velocità/max forza

Indici di manipolabilita'

1) Inverso del numero di condizionamento del Jacobiano

$$\boxed{\frac{1}{k_2(J)} = \frac{\sigma_{\min}(J)}{\sigma_{\max}(J)}} \quad k_2(J) = \|J\|_2 \|J^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}(J)}{\sigma_{\min}(J)}$$

Il risultato è motivato dalle seguenti uguaglianze

$$\|J\|_2 = \max_{\dot{q} \neq 0} \frac{\|J\dot{q}\|_2}{\|\dot{q}\|_2} = \max_{\|\dot{q}\|=1} \|J\dot{q}\|_2 = \sigma_{\max}(J)$$

$$\|J^{-1}\|_2 = \max_{\dot{q} \neq 0} \frac{\|J^{-1}\dot{q}\|_2}{\|\dot{q}\|_2} = \max_{\|\dot{q}\|=1} \|J^{-1}\dot{q}\|_2 = \frac{1}{\sigma_{\min}(J)}$$

Caratteristiche:

- Vale anche per manipolatori non quadrati
- Misura la distanza da una singolarità
- Misura l'eccentricità dell'ellissoide ed è indipendente dal suo volume
- E' complesso da calcolarsi e praticamente impossibile in forma simbolica se non in casi molto semplici

Indici di manipolabilita'

2) Determinante di JJ^T

$$\det(JJ^T)$$

Caratteristiche:

- Vale anche per manipolatori non quadrati
- Semplice da calcolare (almeno con un sistema di calcolo simbolico)
- Il suo valore non fornisce tuttavia una buona stima della “vicinanza alla singolarità”

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \epsilon \ll 1 \quad JJ^T = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\epsilon^2} & \frac{1}{\epsilon} \\ \frac{1}{\epsilon} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(JJ^T) = 1, \quad \sigma_{\max} \simeq 1/\epsilon; \quad \sigma_{\min} \simeq \epsilon; \quad k_2(J) \simeq 1/\epsilon^2$$

- E' proporzionale al volume dell'ellissoide, quindi al variare delle unità di misura cambia! Anche solo il $\det(J)$ es .per un manipolatore quadrato RR vale

$$\det(J(q)) = a_1 a_2 s_2$$

cambia se le lunghezze sono in [m] o in [mm]!