

Cinematica diretta ed inversa di manipolatori seriali

Robotica I

Marco Gabiccini



A.A. 2009/2010 LS Ing. Meccanica ed Automazione

Struttura meccanica

Struttura meccanica costituita da insieme di:

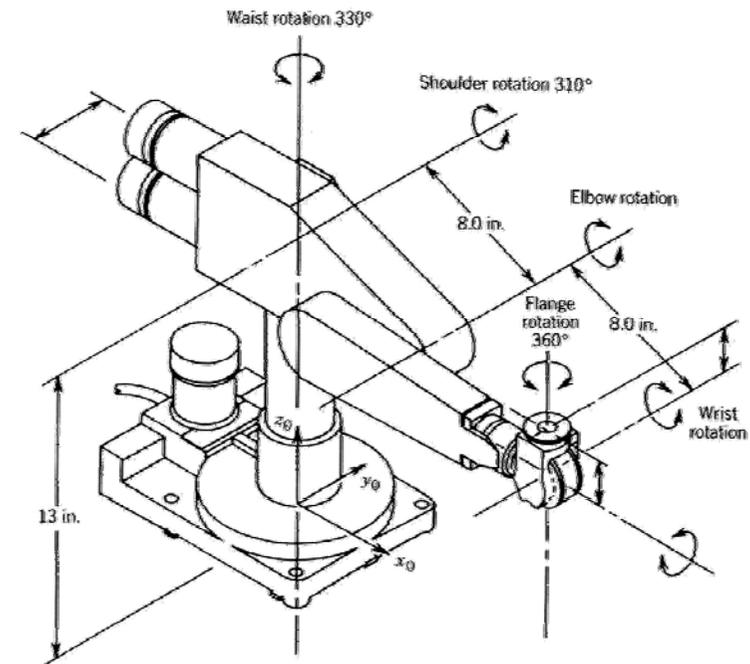
- corpi (supposti rigidi), detti **membri** o **links**
- articolazioni, dette **giunti** o **joints**

I robot sono azionati mediante **attuatori**, posti tipicamente in corrispondenza di alcuni dei giunti, e ne determinano la configurazione (l'angolo per i giunti rotoidali, l'elongazione per i giunti prismatici)

La conoscenza delle configurazioni di alcuni giunti è data dai sensori (angolari, o di elongazione).

Nel caso generale, quindi, sarà necessario distinguere tra: **giunti attuati, non attuati, sensorizzati, non sensorizzati**. $(q_A, q_{\bar{A}}, q_S, q_{\bar{S}})$

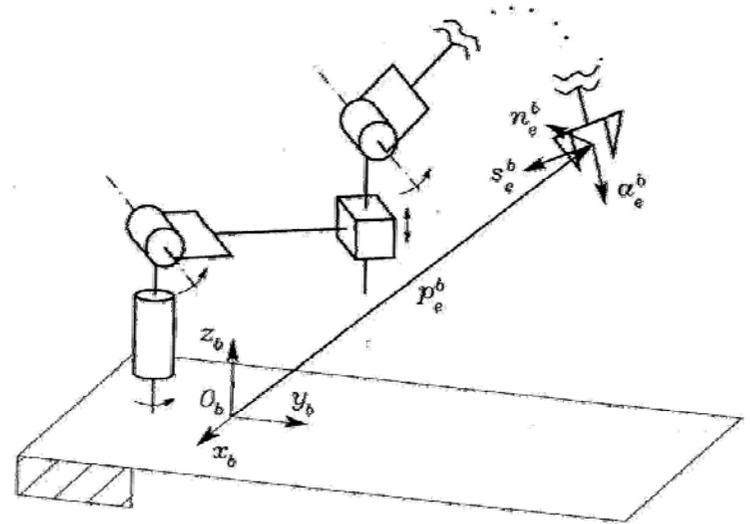
Generalmente un giunto attuato è anche sensorizzato: si parla in questo caso di **giunto attivo**. Un giunto non attuato né sensorizzato viene detto **passivo**.



Modello cinematico del robot

Il modello cinematico di un robot è una descrizione analitica delle relazioni che intercorrono fra:

- le **posizioni** dei giunti, q (angoli e/o elongazioni)
- la **configurazione** o **postura** o **posa** $x \in SE(3)$ (posizione ed orientazione) di un particolare membro della struttura del robot. Quest'ultimo è tipicamente il corpo che reca l'**organo terminale**, o **end-effector**.



Nei bracci manipolatori seriali (da cui iniziamo) l'**end-effector** è posto all'estremità della catena di corpi e giunti che formano il braccio.

L'altra estremità, la **base**, è invece solitamente fissata rigidamente all'ambiente.

La postura dell'organo terminale è spesso descritta rispetto ad un sistema di riferimento solidale all'ambiente di lavoro. Matrice omogenea che la caratterizza:

$${}^b \mathbf{A}_e = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^b \mathbf{n}_e & {}^b \mathbf{s}_e & {}^b \mathbf{a}_e & {}^b \mathbf{p}_e \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

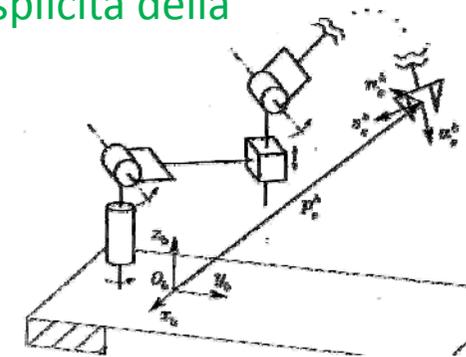
Problema cinematico diretto ed inverso

Problema cinematico diretto

Riguarda la determinazione della postura dell'organo terminale (senza pregiudicare la libertà di considerare tale qualunque membro possa essere utile), quando siano note le configurazioni dei giunti sensorizzati q_S . Si indica con Q_S l'insieme dei valori che possono essere assunti dalle configurazioni dei giunti sensorizzati.

Matematicamente, si tratta quindi di ottenere una espressione esplicita della **mappa cinematica diretta**,

$$\Lambda : Q_S \rightarrow SE(3)$$
$$q \mapsto \Lambda(q) = x \in SE(3)$$



Problema cinematico inverso

Consiste nella determinazione delle configurazioni da far assumere ai giunti attuati per fare in modo che la postura dell'organo terminale sia una assegnata. Se si indica con Q_A l'insieme dei valori che possono assumere i giunti attuati, matematicamente si ha

$$\bar{\Lambda} : SE(3) \rightarrow Q_A$$
$$x \mapsto \bar{\Lambda}(x) = q \in Q_A$$

Nel caso in cui giunti attuati e sensorizzati coincidano, si ha $\bar{\Lambda} = \Lambda^{-1}$

Cinematica diretta dei bracci seriali

Iniziamo la trattazione dal problema cinematico diretto dei bracci seriali, costituiti cioè da catene cinematiche aperte. In questo caso, importante di per sé ma anche strumentale alla soluzione di altri casi (paralleli), si può assumere che sia $Q_A = Q_S = Q$.

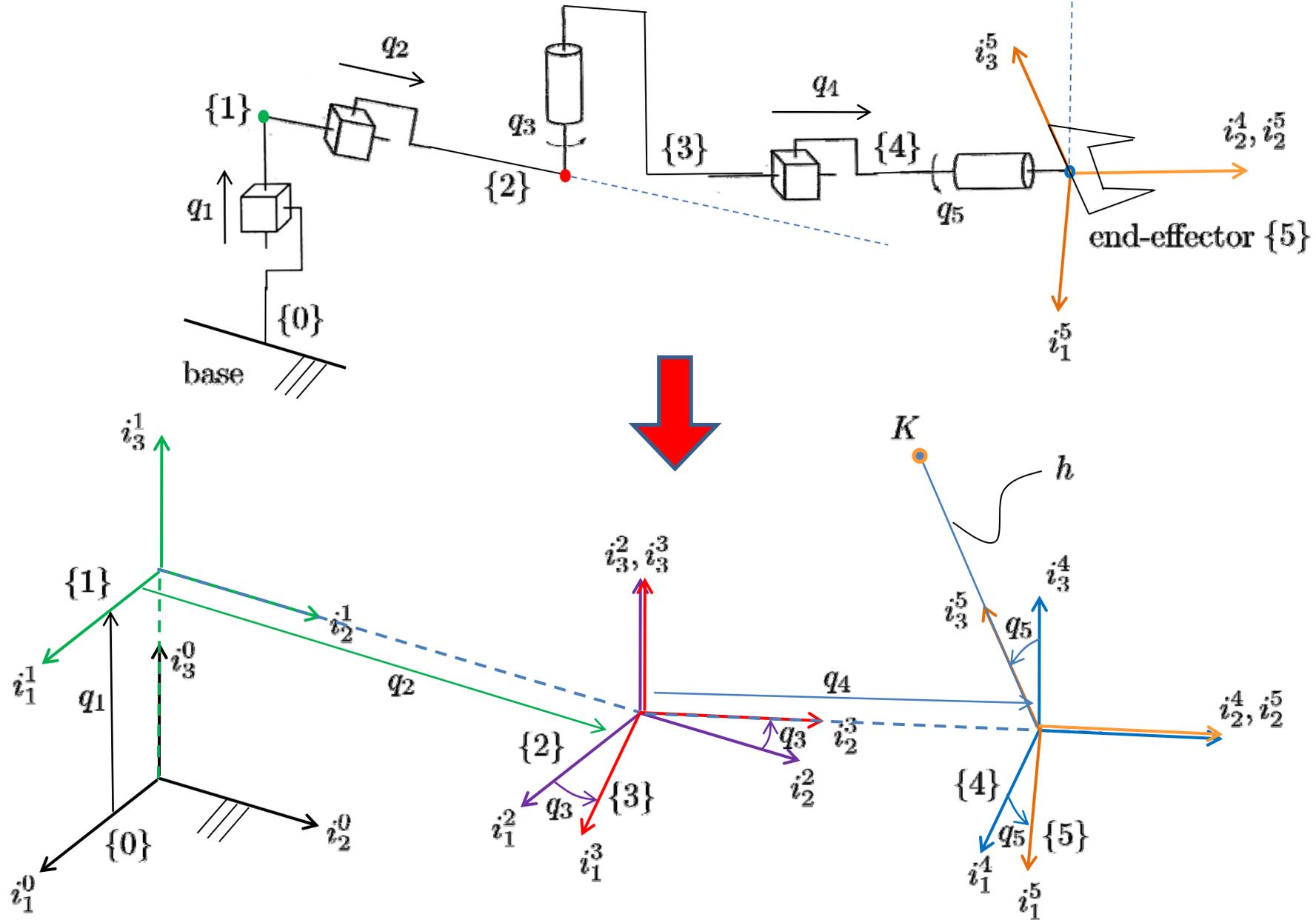
Si impiegano le trasformazioni omogenee nel modo seguente

- 1) Si associa ad ogni membro una terna di riferimento ad esso solidale che ne descrive la configurazione
- 2) Si impiegano le trasformazioni omogenee per descrivere la postura di una terna rispetto alla precedente, ragionando quindi in assi correnti, a partire dalla terna base fino alla terna dell'end-effector
- 3) Tale descrizione rappresenta quindi la postura dell'organo terminale rispetto alla base

Il procedimento è concettualmente molto semplice ed è già stato applicato nell'esempio precedente, in cui le terne sono state fissate in modo piuttosto arbitrario.

Domanda: c'è una qualche convenzione per fissarle in modo sistematico?

Parametrizzazione della postura dell'end-effector rispetto alla base



Convenzione di Denavit-Hartenberg

In casi più complessi, può essere utile procedere in modo sistematico alla scelta dei sistemi di riferimento che permettano di scrivere le catene di trasformazioni omogenee in modo più semplice possibile.

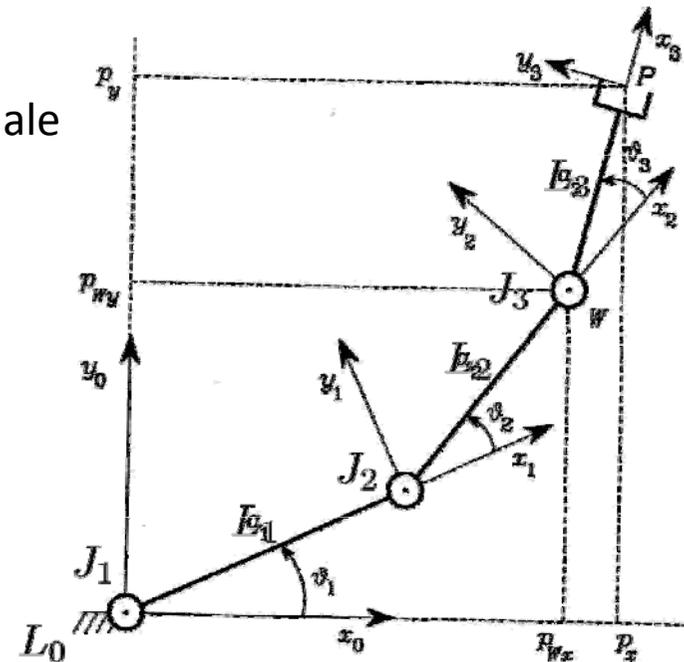
Fissiamo pertanto le seguenti convenzioni, dette di Denavit-Hartenberg:

- **Numerazione dei bracci e dei giunti:** i bracci vengono numerati da 0 a n , partendo dalla base ed arrivando all'organo terminale (si conta anche il telaio o base quindi), e si indicano con L_0, L_1, \dots, L_n . Dato che un braccio seriale con $n + 1$ membri ha n giunti, questi si designano con J_1, \dots, J_n . Il link L_i collega il giunto J_i col giunto J_{i+1}

- **Assegnazione assi "z" dei sistemi di riferimento:**

Al link i -esimo, L_i , ($0 \leq i \leq n$), si associa un frame solidale $S_i = (O_i; x_i, y_i, z_i)$ il cui asse z_i coincide con l'asse del giunto J_{i+1} , cioè del giunto *a valle*, del membro della catena cinematica.

Nota: mentre per un giunto rotoidale, l'asse del giunto è univocamente definito, per i giunti prismatici l'asse definisce solo una direzione. Ogni retta parallela alla direzione del moto può essere presa come asse z .



Convenzione di Denavit-Hartenberg

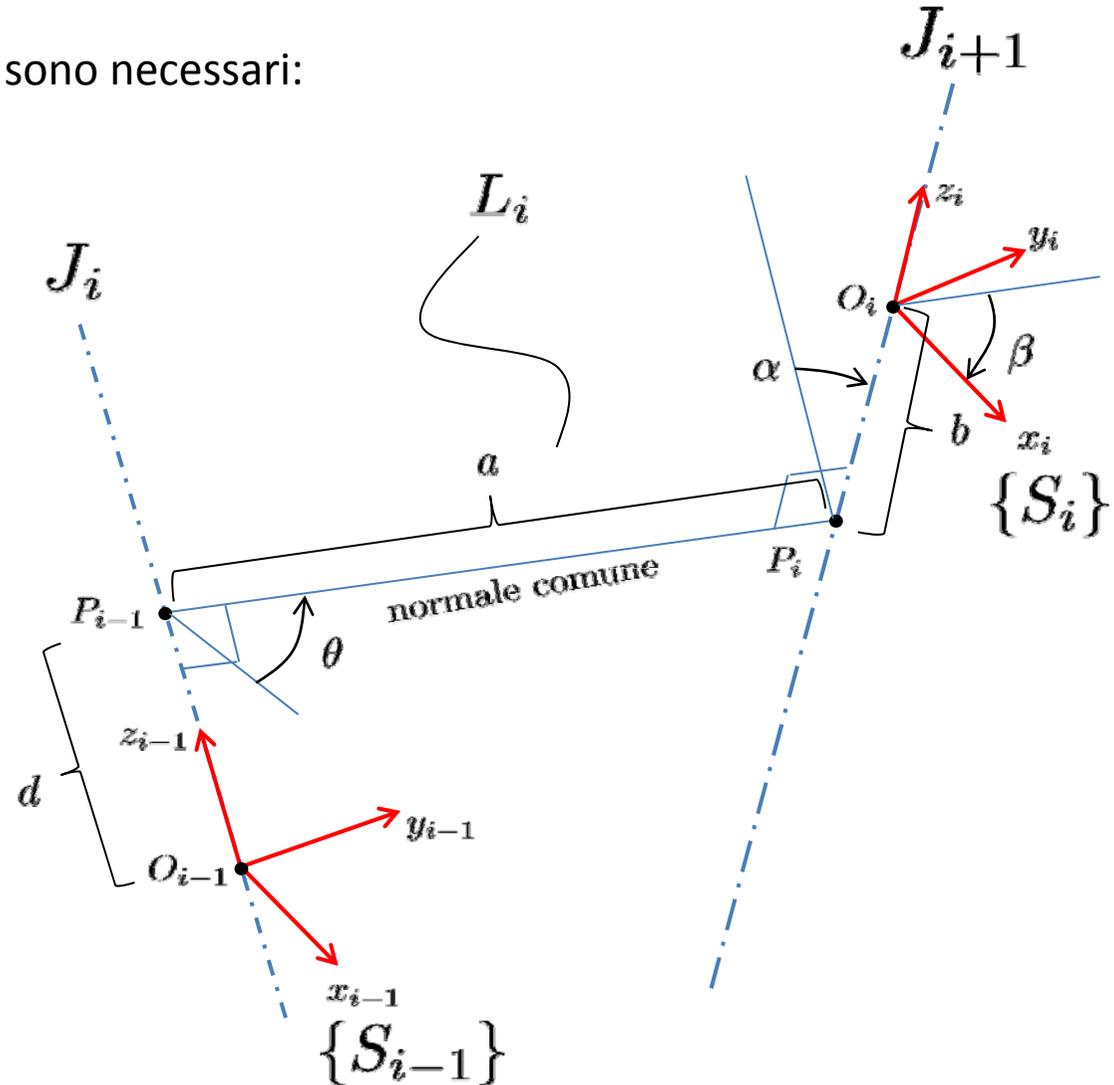
Dati gli assi dei giunti: J_i e J_{i+1} fra cui è posto il link L_i , i sistemi di riferimento $S_{i-1} = (O_{i-1}; x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ ed $S_i = (O_i; x_i, y_i, z_i)$ possono essere posti, in modo arbitrario.

Data la scelta arbitraria di O_i e x_i , sono necessari:

6 parametri:

- 1 è la variabile di giunto;
- 5 sono misure geometriche

In effetti, in generale, per stabilire la posizione relativa fra due frame nello spazio sono necessari 6 g.d.l.



Situazione generale e convenzione di D.-H.

In termini di trasformazioni omogenee, per scrivere la ${}^{i-1}A_i$ dal frame S_{i-1} del link i-1 al frame S_i del link i-esimo, si definiscono le seguenti t.o. elementari (terna corrente):

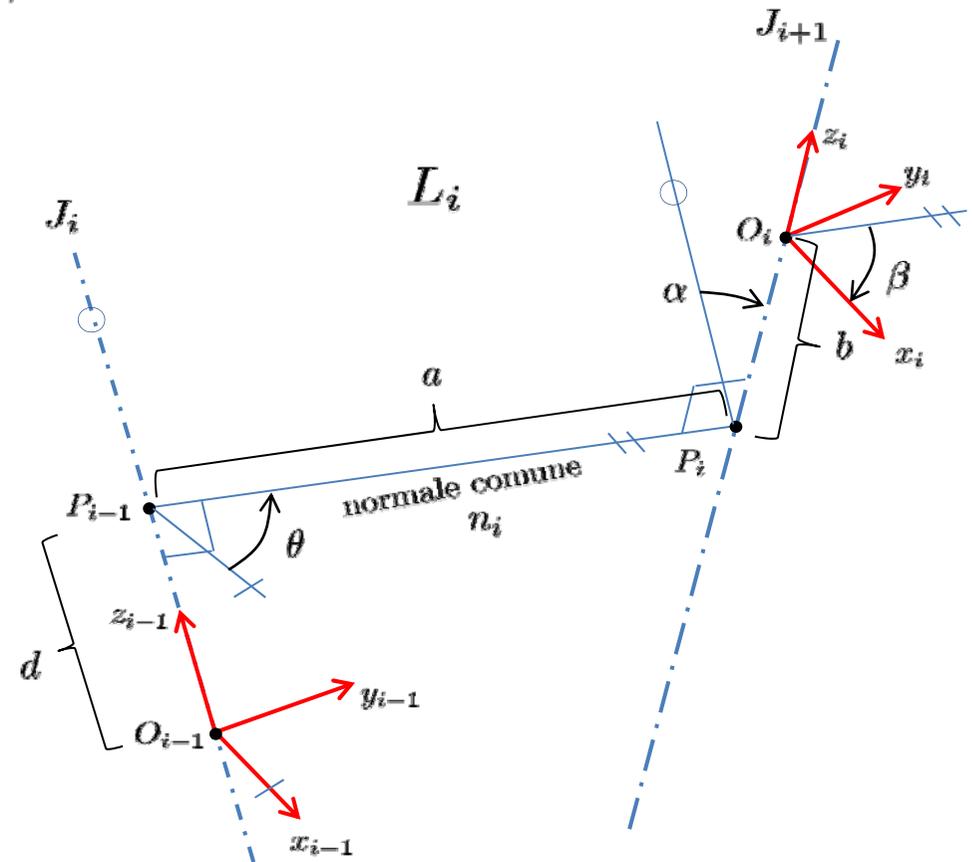
1. Traslo O_{i-1} in P_{i-1} lungo z_{i-1} ; $T(i_3 d)$
2. Allineo x_{i-1} alla normale comune; $R_z(\theta)$
3. Traslo l'origine in P_i ; $T(i_1 a)$
4. Allineo z_{i-1} con z_i ; $R_x(\alpha)$
5. Traslo l'origine in O_i ; $T(i_3 b)$
6. Allineo x_{i-1} con x_i ; $R_z(-\beta)$

Componendole in **terna corrente** si ha:

$${}^{i-1}A_i = T(i_3 d)R_z(\theta)T(i_1 a)R_x(\alpha)T(i_3 b)R_z(-\beta)$$

Ponendo: $O_i = P_i$ e $x_i = n_i$ si risparmiano due parametri e due trasformazioni:

$${}^{i-1}A_i = T(i_3 d)R_z(\theta)T(i_1 a)R_x(\alpha)$$



Convenzione di Denavit-Hartenberg

Ponendo: $O_i = P_i$ e $x_i = n_i$ si risparmiano due parametri e due trasformazioni:

$${}^{i-1}A_i = T(i_3 d_i)R_z(\theta_i)T(i_1 a_i)R_x(\alpha_i)$$

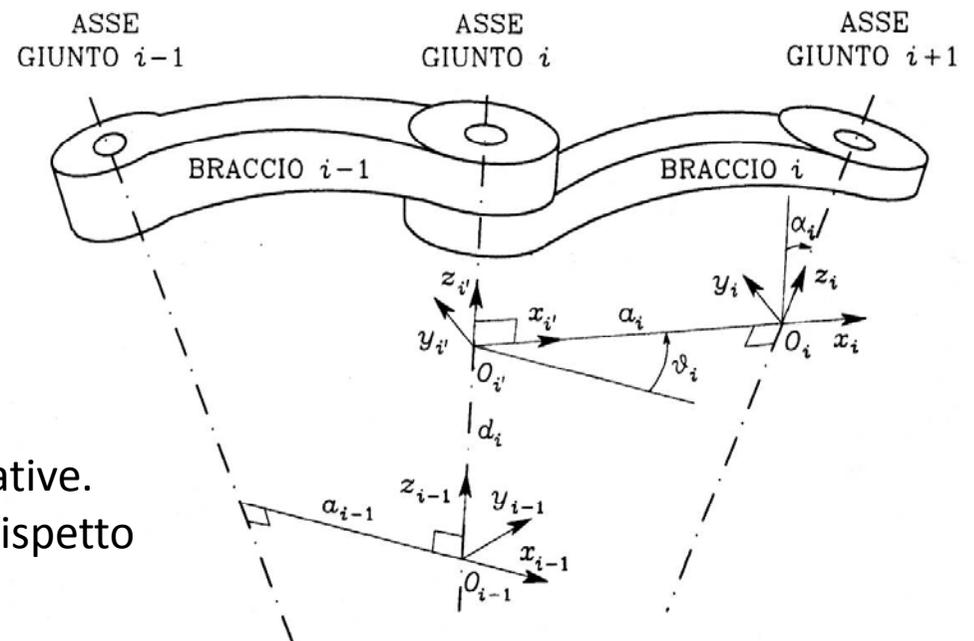
Esplicitamente la matrice di trasformazione omogenea fra **link (i-1)**-esimo e **link i**-esimo è:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_i C_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_i S_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In particolare, si ha che le variabili di giunto sono:

- Per giunti rotoidali (R): $q_i = \theta_i$
- Per giunti prismatici (P): $q_i = d_i$

Osservazione: le variabili di giunto sono relative. Indicano quando il braccio "i" ruota/trasla rispetto braccio "i-1".



Procedura di Denavit-Hartenberg

Riassumendo:

1. Si individuano e si nominano gli assi dei giunti con z_0, \dots, z_{n-1} ;
2. Si fissa il riferimento S_0 del link di base (o semplic. base), con asse $z_0 = J_1$, asse x_0 ed origine O_0 arbitrari.
Talvolta si sceglie O_0 in modo da avere poi $d_1 = 0$ (se giunto 1 è rotoidale), ovvero si sceglie in modo da avere poi $\theta_1 = 0$ (se giunto 1 è prismatico);
3. Si fissano i riferimenti S_1, S_2, \dots, S_{n-1} secondo le regole di D.-H., cioè:
 - ✓ asse $z_i = J_{i+1}$;
 - ✓ origine $O_i = P_i$;
 - ✓ asse $x_i = n_i$;Se J_i, J_{i+1} sono paralleli, si può scegliere O_i in modo tale che $d_i = 0$.
Se J_i, J_{i+1} si intersecano, x_i ha direzione e verso indefiniti.
4. Si fissa il riferimento S_n dell'end-effector, con $x_n \perp z_{n-1}$

Procedura di Denavit-Hartenberg

5. Si crea una tabella (di D.-H.) dei parametri dei link così fatta (es. planare 3 bracci):

LINK	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

6. Si costruiscono le matrici omogenee:

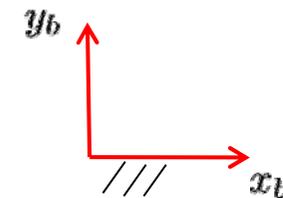
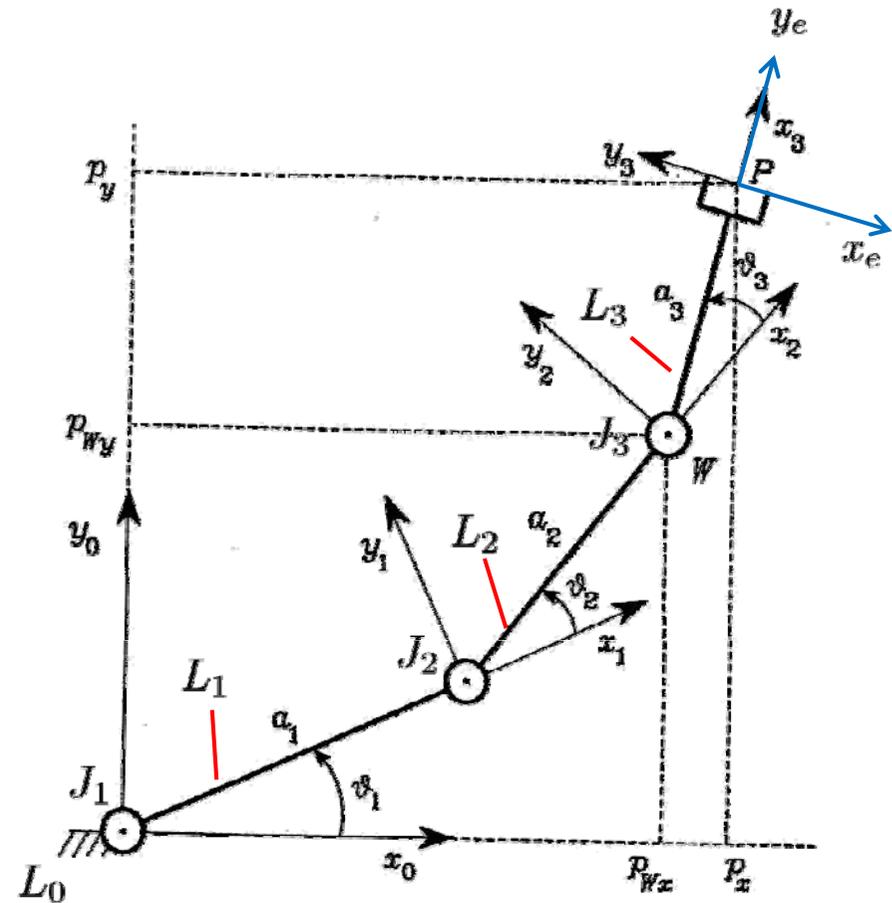
$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Si costruiscono le matrici (costanti)

${}^b A_0$ e ${}^n A_e$ per aggiustare terna di base e terna sull'end-effector a piacere

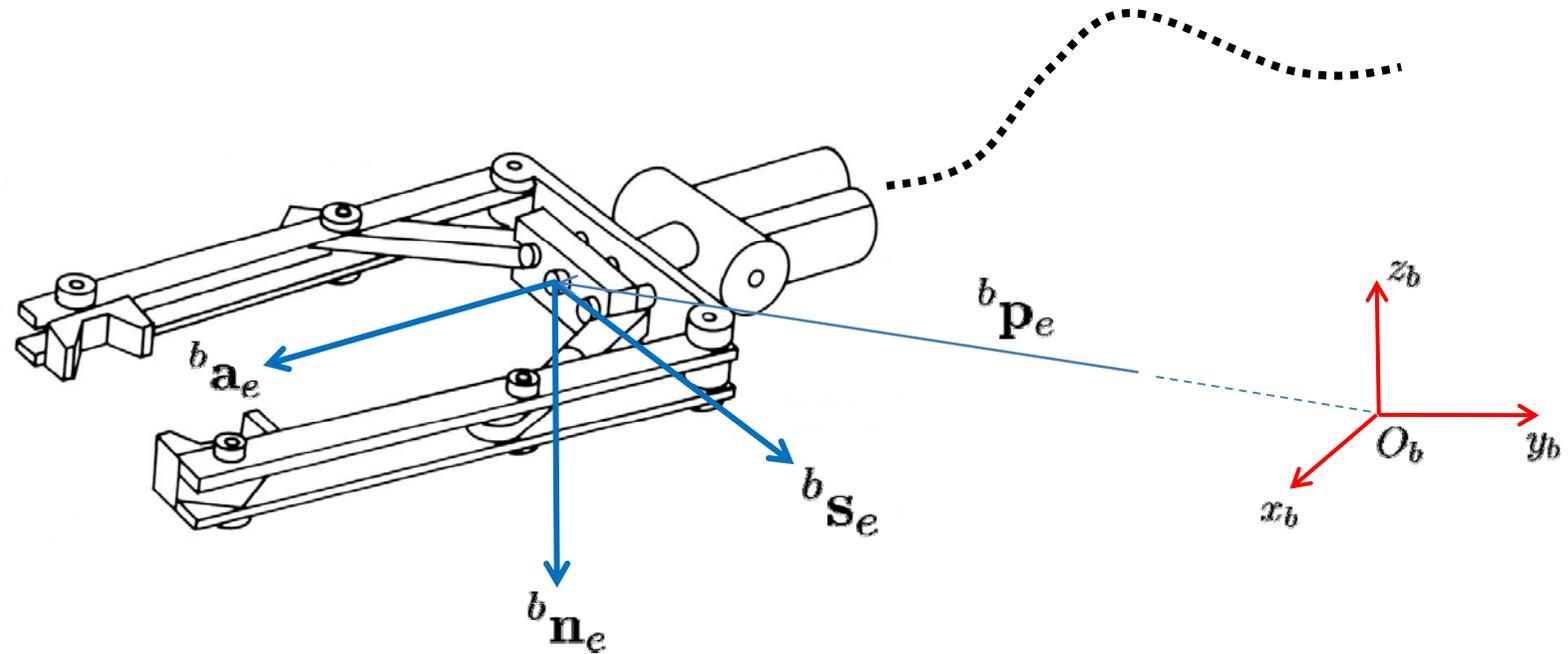
8. Si costruisce la mappa della cinematica diretta:

$${}^b A_e(q) = {}^b A_0 {}^1 A_1(q_1) \dots {}^{n-1} A_n(q_n) {}^n A_e$$



Convenzione per la terna utensile (solidale all'end-effector)

Per posizionare la **terna utensile** si adotta, tipicamente, la seguente convenzione:



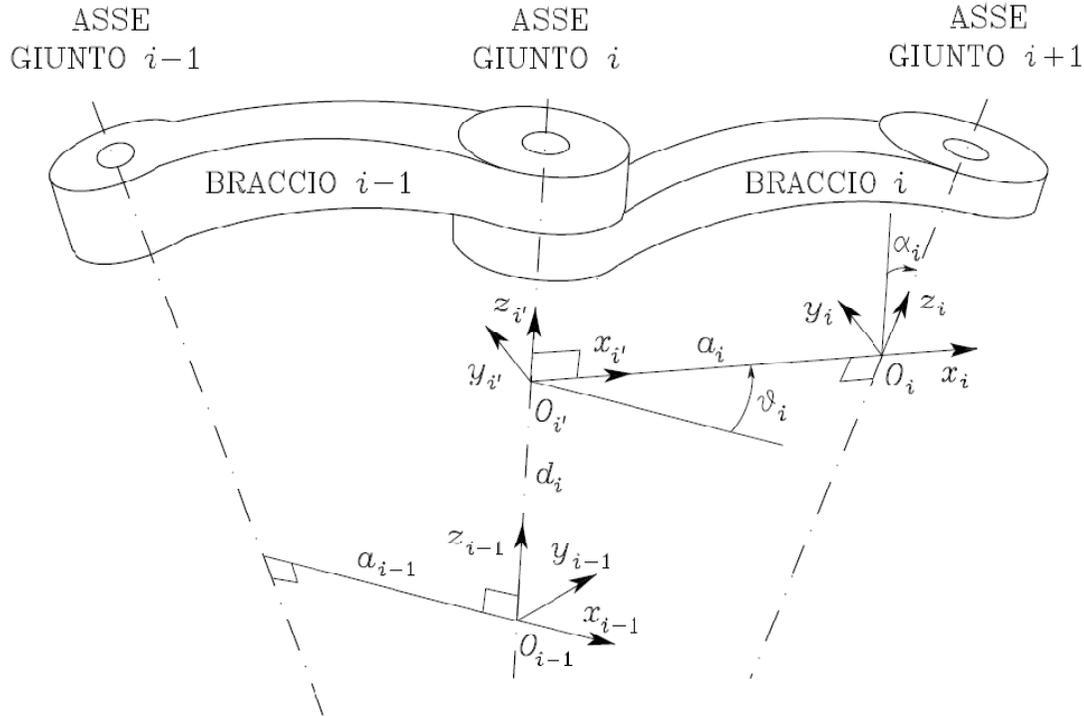
Gli assi della terna (destrorsa) utensile vengono chiamati: **normal, sliding, approach**.
La trasformazione omogenea complessiva rappresenta quindi:

$${}^b \mathbf{A}_e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^b \mathbf{n}_e(\mathbf{q}) & {}^b \mathbf{s}_e(\mathbf{q}) & {}^b \mathbf{a}_e(\mathbf{q}) & | & {}^b \mathbf{p}_e(\mathbf{q}) \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolo della Cinematica Diretta mediante Convenzione di Denavit-Hartenberg

Alcuni esempi

Convenzione di Denavit-Hartenberg



$$A_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i & 0 & 0 \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i^{i-1}(q_i) = A_{i'}^{i-1} A_i^{i'} = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i c\alpha_i & s\vartheta_i s\alpha_i & a_i c\vartheta_i \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i c\alpha_i & -c\vartheta_i s\alpha_i & a_i s\vartheta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Convenzione di Denavit-Hartenberg

- si sceglie l'asse z_i giacente lungo l'asse del giunto $i + 1$
- si individua O_i all'intersezione dell'asse z_i con la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i , e con O'_i si indica l'intersezione della normale comune con z_{i-1}
- si assume l'asse x_i diretto lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i con verso positivo dal giunto i al giunto $i + 1$
- si sceglie l'asse y_i in modo da completare una terna levogira

Convenzione di Denavit-Hartenberg

- Definizione non univoca della terna:
 - ★ con riferimento alla terna 0, per la quale la sola direzione dell'asse z_0 risulta specificata: si possono quindi scegliere arbitrariamente O_0 ed x_0
 - ★ con riferimento alla terna n , per la quale il solo asse x_n risulta soggetto a vincolo (deve essere normale all'asse z_{n-1}): infatti non vi è giunto $n + 1$, per cui non è definito z_n e lo si può scegliere arbitrariamente
 - ★ quando due assi consecutivi sono paralleli, in quanto la normale comune tra di essi non è univocamente definita
 - ★ quando due assi consecutivi si intersecano, in quanto il verso di x_i è arbitrario
 - ★ quando il giunto i è prismatico, nel qual caso la sola direzione dell'asse z_{i-1} è determinata

Convenzione di Denavit-Hartenberg

Procedura operativa

1. Individuare e numerare consecutivamente gli assi dei giunti; assegnare, rispettivamente, le direzioni agli assi z_0, \dots, z_{n-1}
2. Fissare la terna base posizionandone l'origine sull'asse z_0 ; gli assi x_0 e y_0 sono scelti in maniera tale da ottenere una terna levogira

Convenzione di Denavit-Hartenberg

Eseguire i passi da **3** a **5** per $i = 1, \dots, n - 1$:

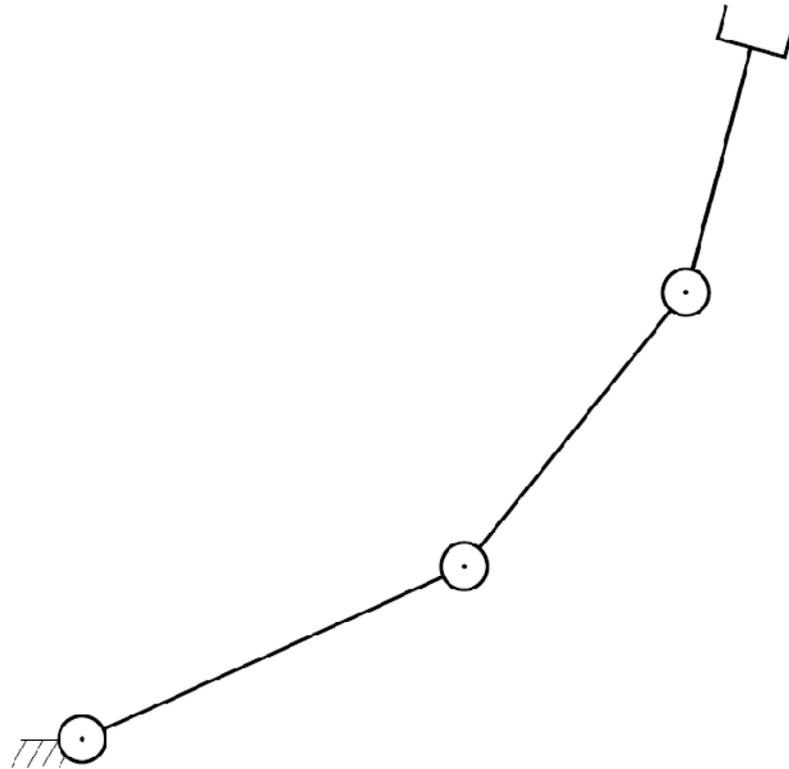
3. Individuare l'origine O_i all'intersezione di z_i con la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i . Se gli assi z_{i-1} e z_i sono paralleli e il giunto i è rotooidale, posizionare O_i in modo da annullare d_i ; se il giunto i è prismatico, scegliere O_i in corrispondenza di una posizione di riferimento per la corsa del giunto (ad esempio un fine-corsa)
4. Fissare l'asse x_i diretto lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i con verso positivo dal giunto i al giunto $i + 1$
5. Fissare l'asse y_i in modo da ottenere una terna levogira

Convenzione di Denavit-Hartenberg

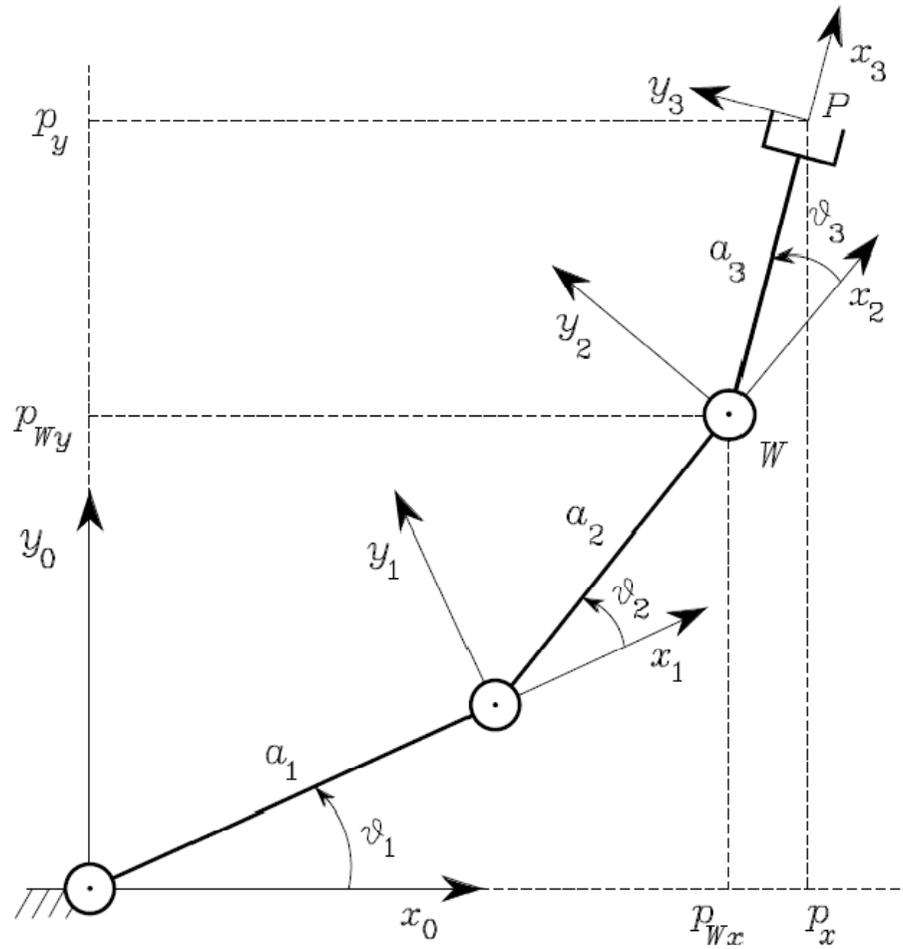
Per completare:

6. Fissare la terna n , allineando z_n lungo la direzione di z_{n-1} se il giunto n è rotoidale, ovvero scegliendo z_n in maniera arbitraria se il giunto n è prismatico; fissare l'asse x_n in accordo al punto 4
7. Costruire per $i = 1, \dots, n$ la tabella dei parametri $a_i, d_i, \alpha_i, \vartheta_i$
8. Calcolare sulla base dei parametri di cui al punto 7 le matrici di trasformazione omogenea $\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i)$ per $i = 1, \dots, n$
9. Calcolare $\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \dots \mathbf{A}_n^{n-1}$ che fornisce posizione e orientamento della terna n rispetto alla terna 0
10. Assegnate \mathbf{T}_0^b e \mathbf{T}_e^n , calcolare la funzione cinematica diretta $\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b \mathbf{T}_n^0 \mathbf{T}_e^n$ che fornisce posizione e orientamento della terna utensile rispetto alla terna base

Manipolatore planare a tre bracci



Manipolatore planare a tre bracci



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	a_1	0	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

Manipolatore planare a tre bracci

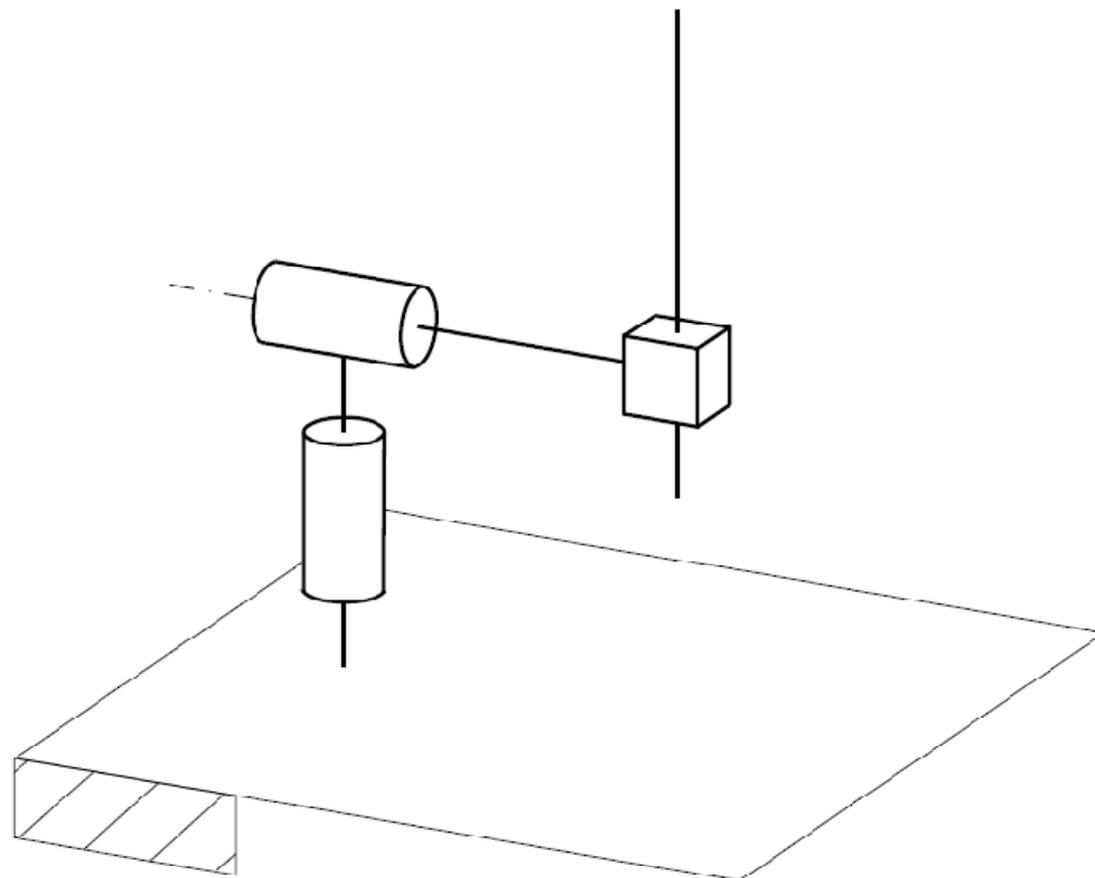
Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	a_1	0	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

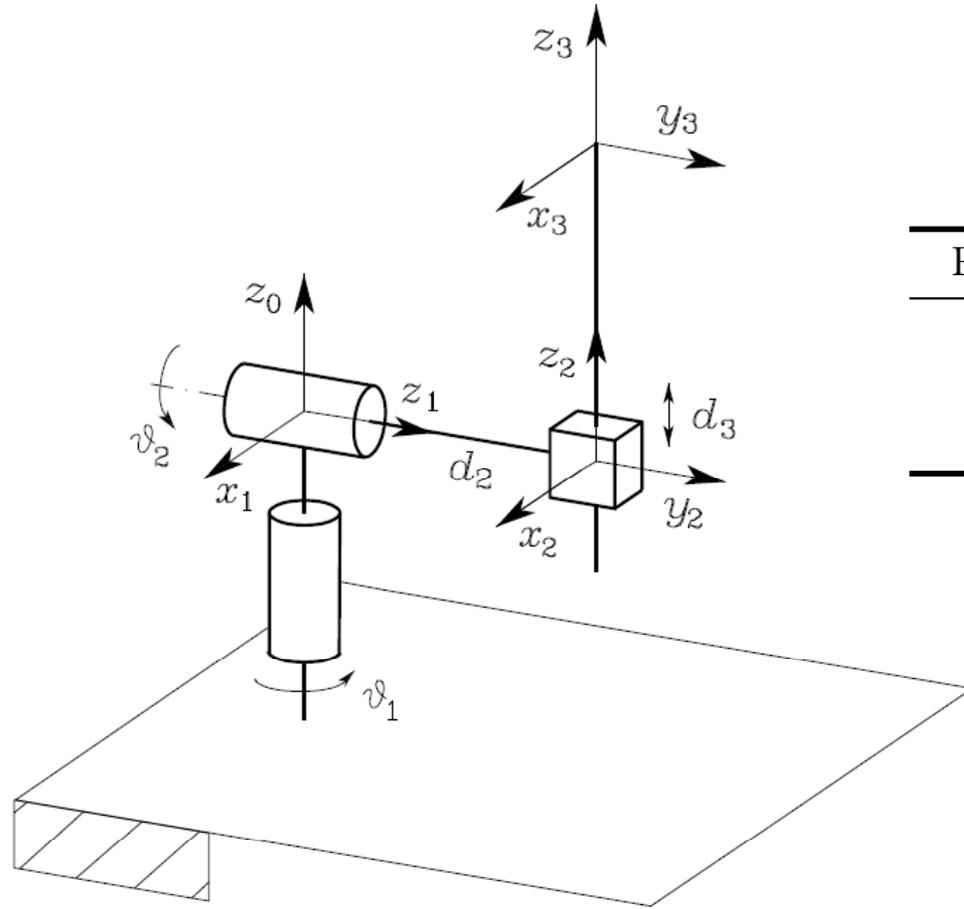
$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore sferico



Manipolatore sferico

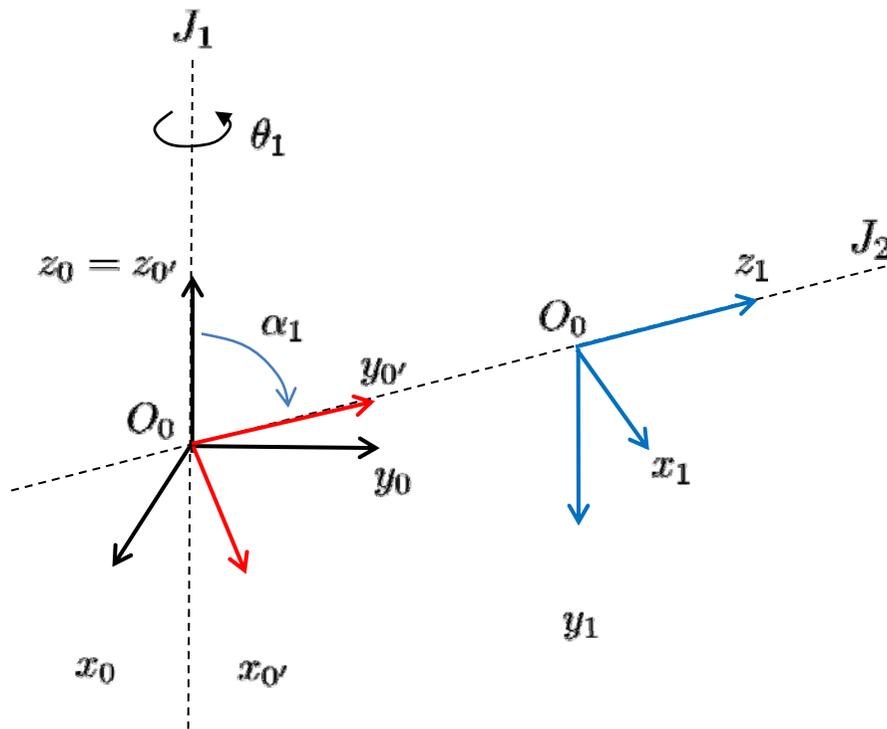


Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$-\pi/2$	0	ϑ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	ϑ_2
3	0	0	d_3	0

Un esempio: manipolatore sferico

Arbitrarietà:

1. decido di porre l'origine di S_0 in $z_0 \cap z_1$;
2. origine di S_1 in $z_0 \cap z_1$;
3. origine di S_2 in $z_1 \cap z_2$;



Dettagli costruzione prima riga della tabella

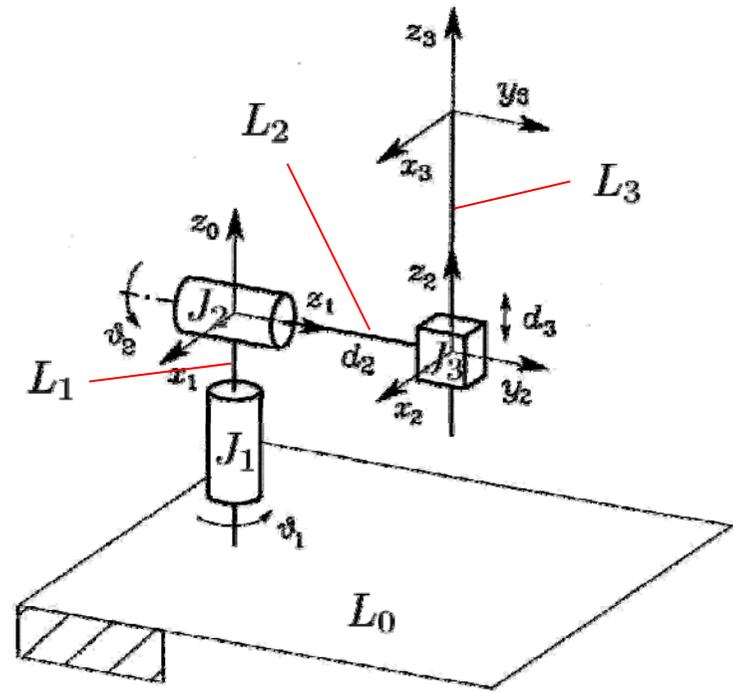


Tabella di D.-H. man. sferico

LINK	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	a_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

Manipolatore sferico

Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$-\pi/2$	0	ϑ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	ϑ_2
3	0	0	d_3	0

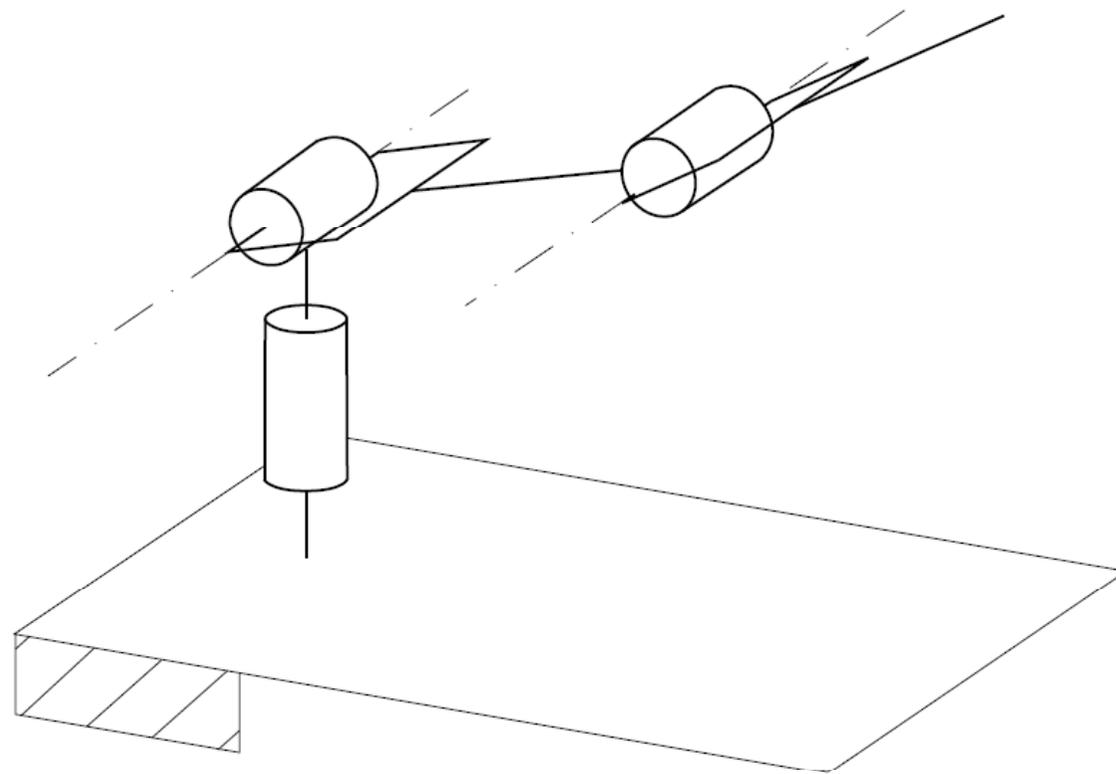
$${}^0A_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2(q_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

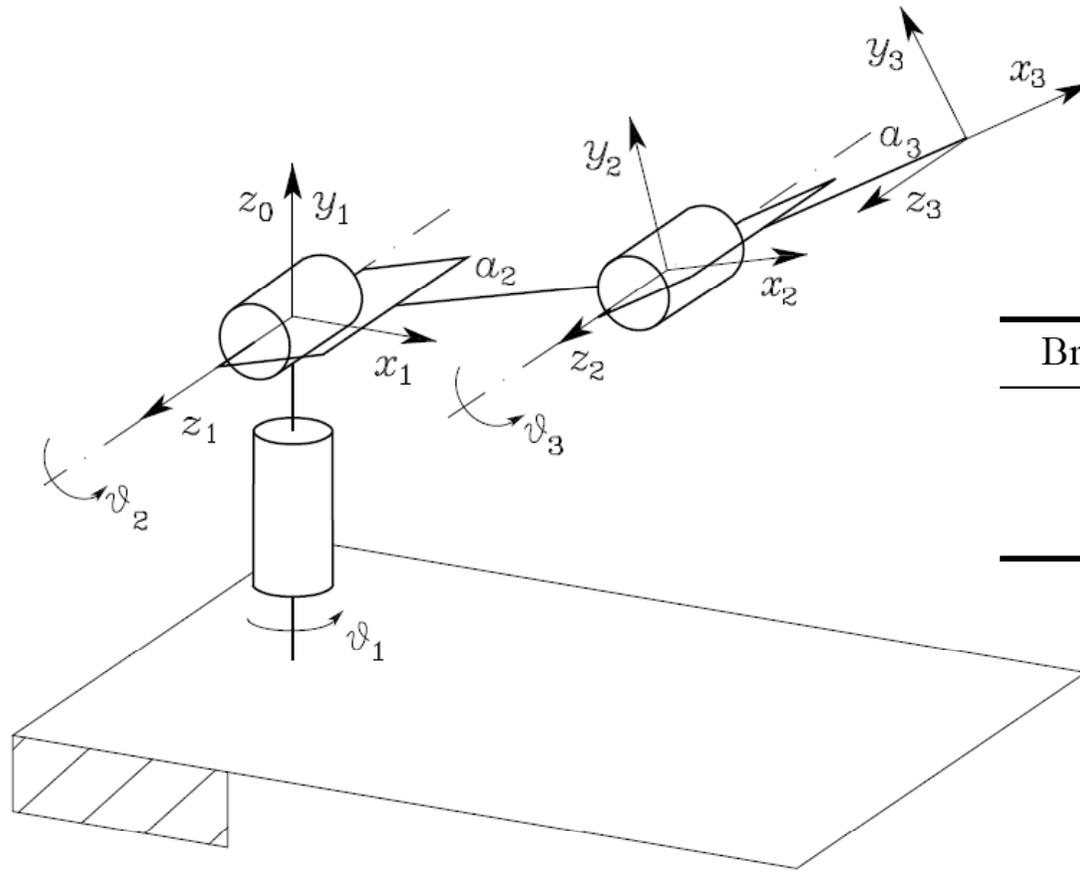
$${}^2A_3(q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_3 = {}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) {}^2A_3(q_3) = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo



Manipolatore antropomorfo



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

Manipolatore antropomorfo

Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

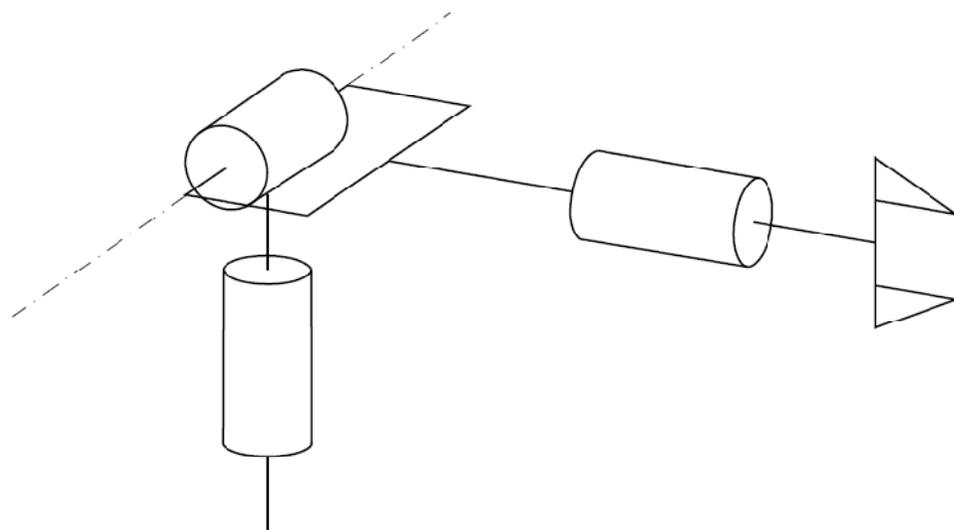
$${}^0A_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 2, 3$$

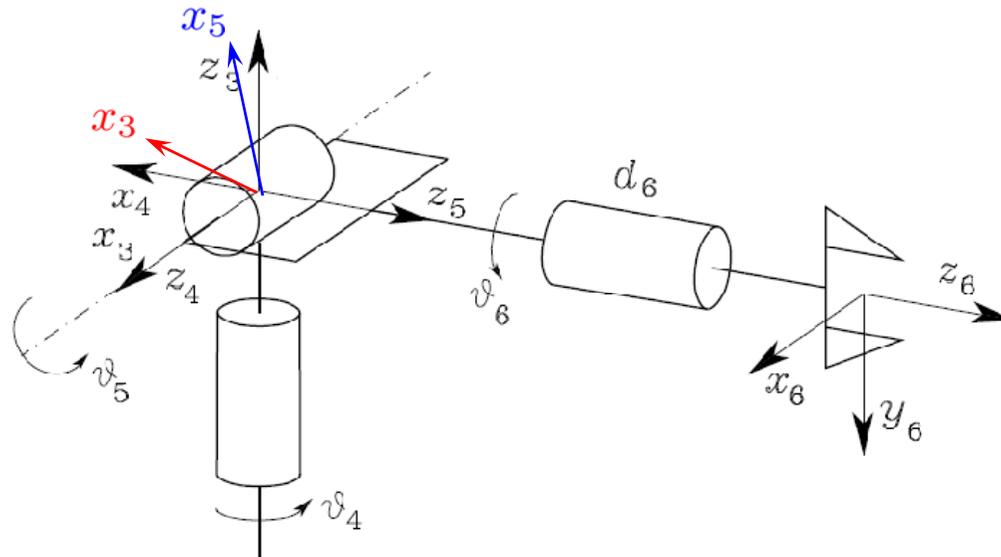
$${}^0A_3 = {}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) {}^2A_3(q_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polso sferico



Polso sferico



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
4	0	$-\pi/2$	0	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

Polso sferico

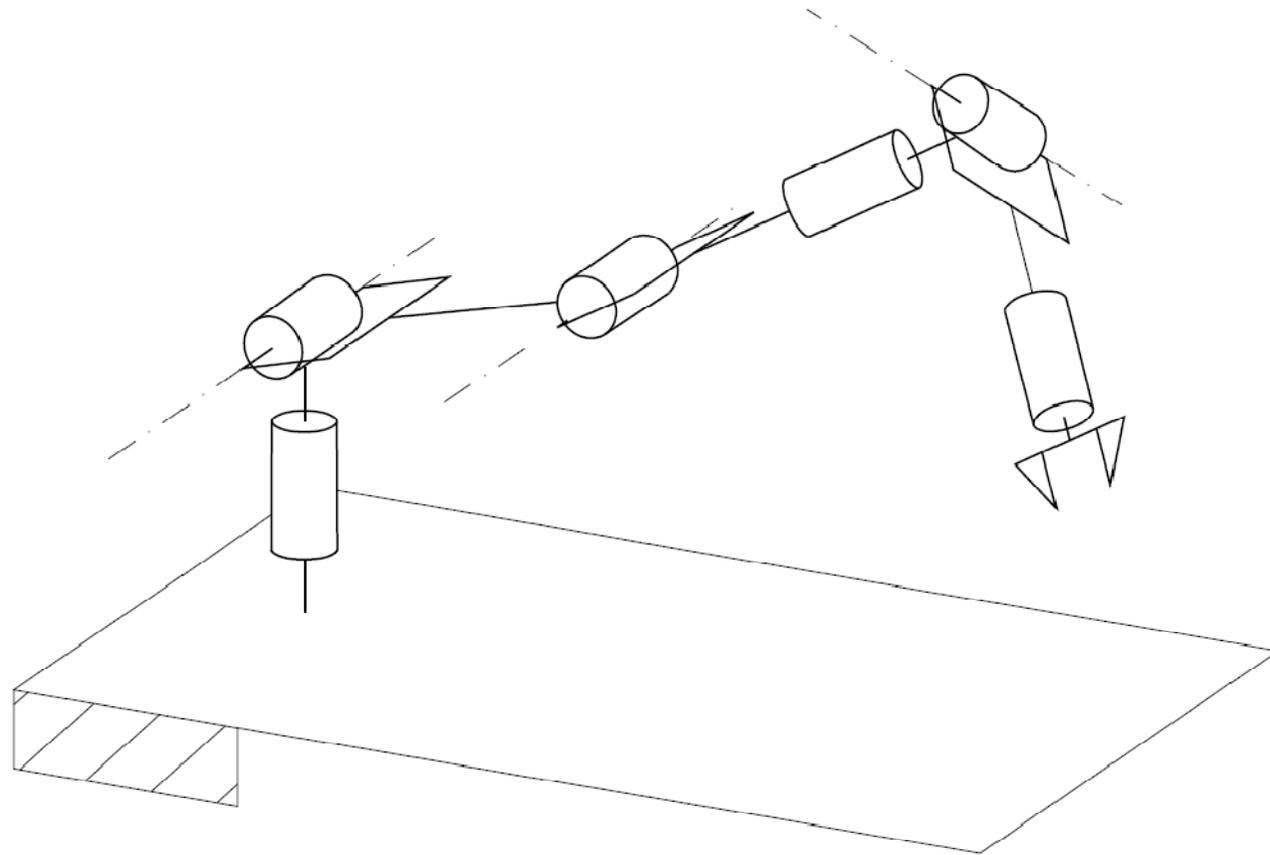
Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
4	0	$-\pi/2$	0	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

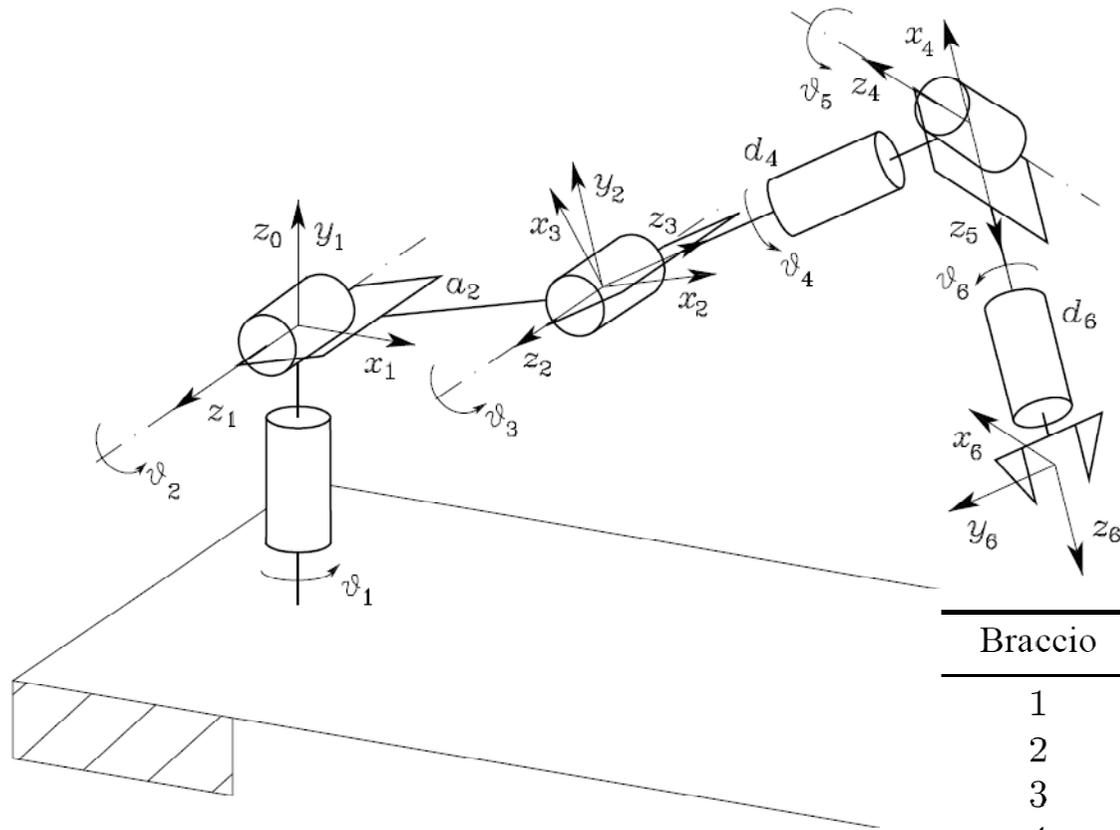
$${}^3A_6 = {}^3A_4(q_4) {}^4A_5(q_5) {}^5A_6(q_6) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo con polso sferico



Manipolatore antropomorfo con polso sferico



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	0	$\pi/2$	0	ϑ_3
4	0	$-\pi/2$	d_4	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

Manipolatore antropomorfo con polso sferico

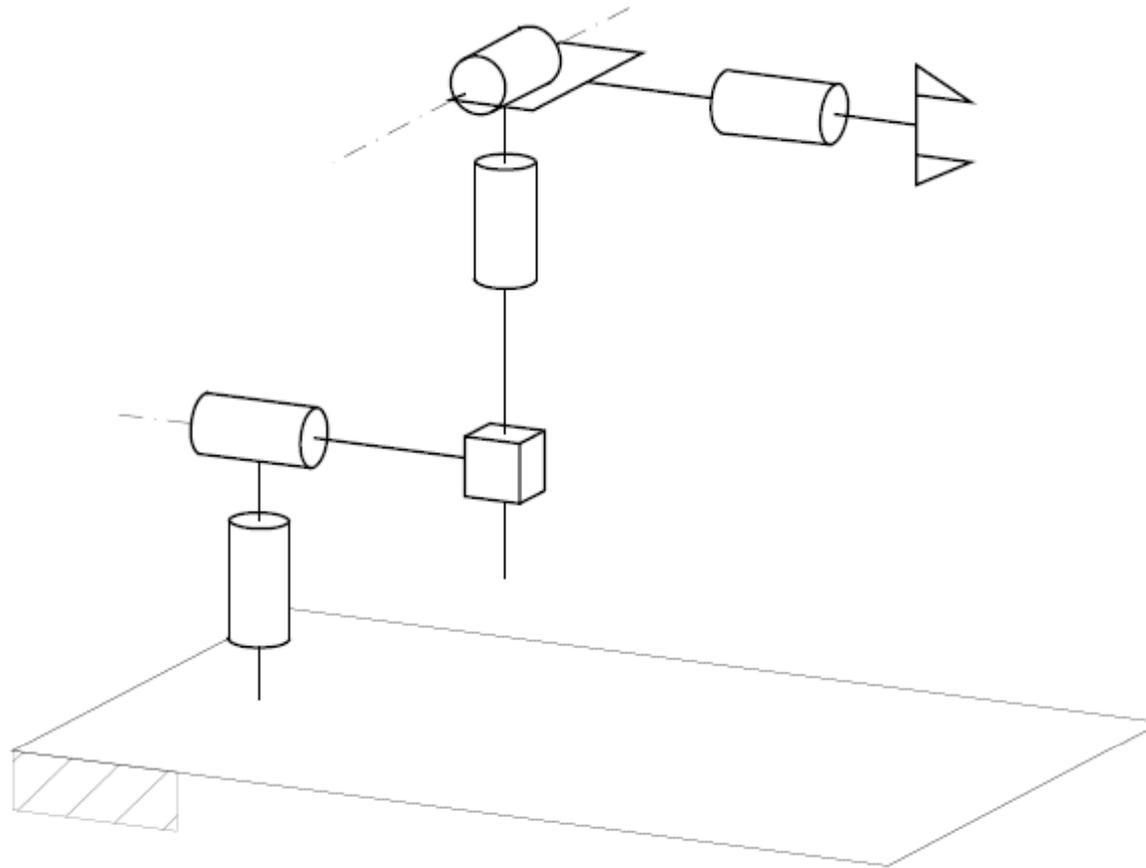
$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} + d_6 (c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_1 s_4 s_5) \\ a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} + d_6 (s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - c_1 s_4 s_5) \\ a_2 s_2 - d_4 c_{23} + d_6 (s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6) + s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1 (c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6) - c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + c_{23} s_5 c_6 \end{bmatrix}$$

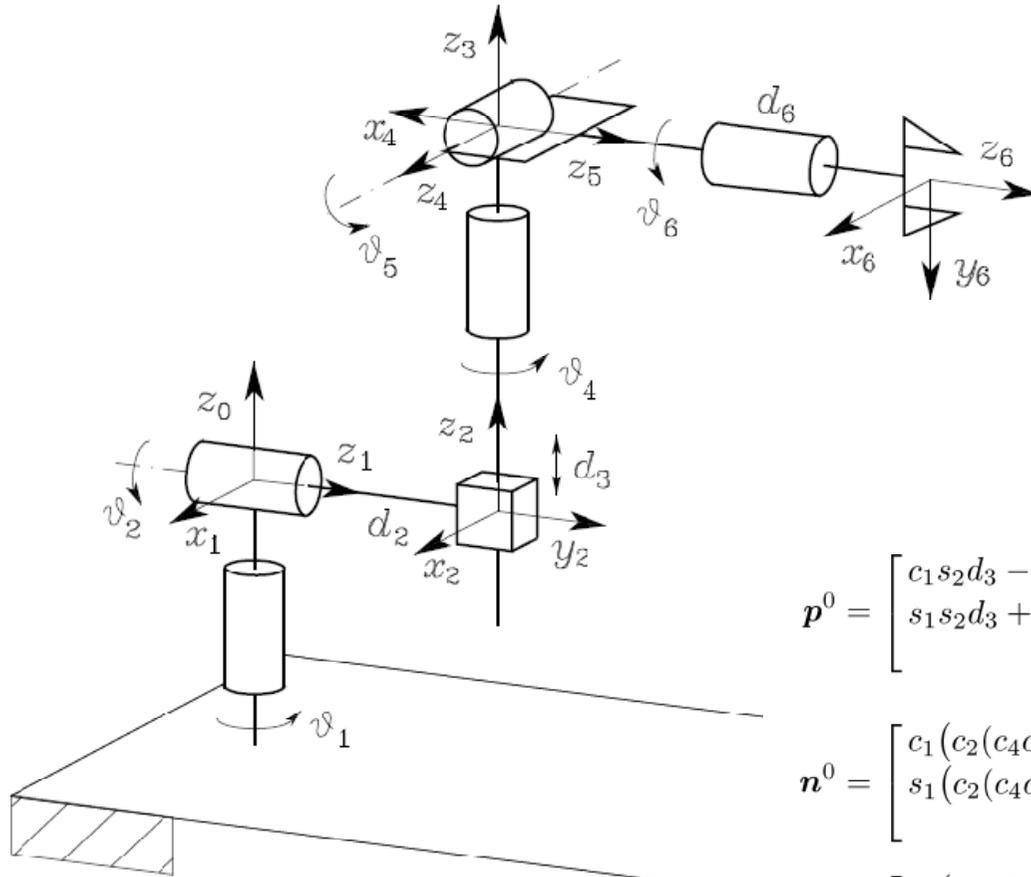
$$\mathbf{s}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) + s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) - c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ -s_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - c_{23} s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - c_1 s_4 s_5 \\ s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \end{bmatrix}$$

Manipolatore di Stanford



Manipolatore di Stanford



$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1 (c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ -s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) - s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1 (-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

Spazio dei giunti e spazio operativo

Nello specificare il compito da far eseguire all'end-effector, sorge la necessità di assegnare posizione ed orientazione della terna utensile, es. in funzione del tempo.

$${}^b\mathbf{A}_e(t) = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^b\mathbf{n}_e(t) & {}^b\mathbf{s}_e(t) & {}^b\mathbf{a}_e(t) & {}^b\mathbf{p}_e(t) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Per descrivere la posizione ${}^b\mathbf{p}_e(t)$ si procede in modo abbastanza naturale.

Per descrivere l'orientazione, espressa dalle 9 componenti dei versori $({}^b\mathbf{n}_e(t), {}^b\mathbf{s}_e(t), {}^b\mathbf{a}_e(t))$ risulta agevole utilizzare una rappresentazione minima (es. angoli di Eulero ${}^b\Phi_e$), in modo da garantire il rispetto dei vincoli di ortogonalità e caratteristiche di essere terna levogira.

Dunque si può individuare la postura di un manipolatore mediante il vettore:

$${}^b\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} {}^b\mathbf{p}_e \\ {}^b\Phi_e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad m \leq 6$$

dove la dimensione m dello spazio operativo dipende tipicamente dall'operazione richiesta al manipolatore.

Con spazio dei giunti (o delle configurazioni) ci si riferisce invece allo spazio in cui vive $q \in \mathbb{R}^n$. In tal caso n sono i gradi di libertà del manipolatore.

Spazio dei giunti e spazio operativo: esempio

Manipolatore planare a tre bracci:

$${}^b x_e = f(q), \quad q = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

Se interessa ANCHE l'orientazione dell' e.-e.:

$${}^b x_e = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = f(q) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}$$

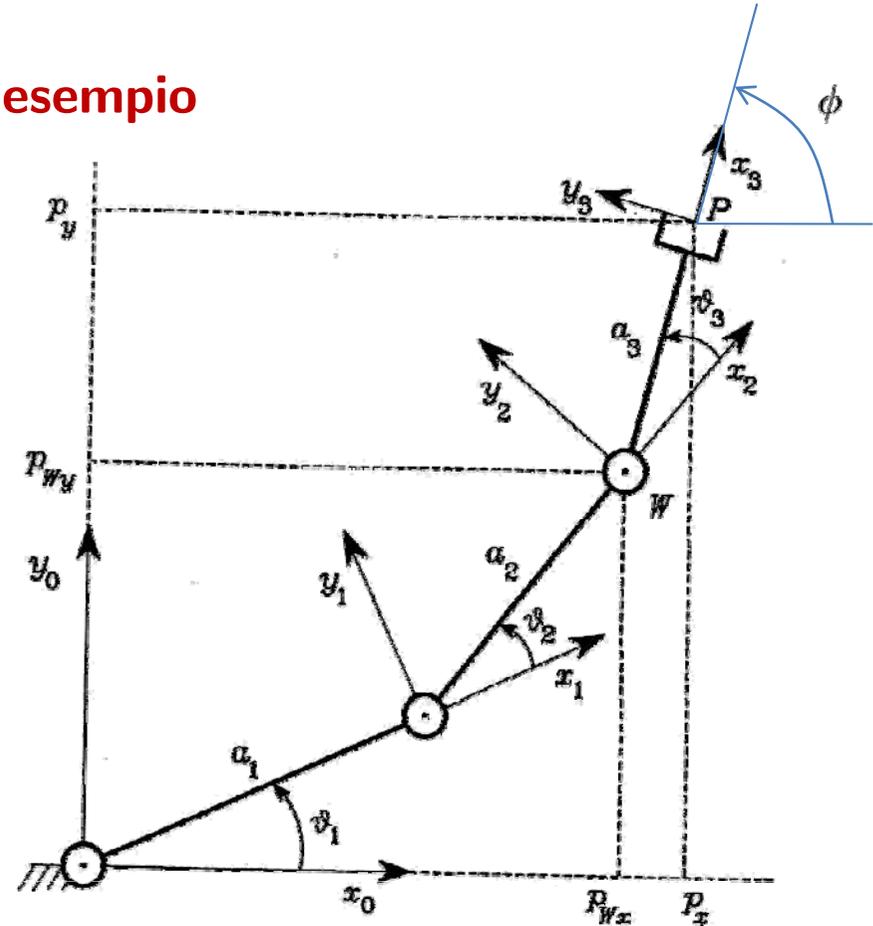
in tal caso: $q \in \mathbb{R}^3$; $x \in \mathbb{R}^3$. ($n = 3$; $m = 3$).

Se NON interessa l'orientazione dell' e.-e.:

$${}^b x_e = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = f(q) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \end{bmatrix}$$

in tal caso: $q \in \mathbb{R}^3$; $x \in \mathbb{R}^2$. ($n = 3$; $m = 2$).

Si ha, in tal caso, **ridondanza cinematica** di gradi di mobilità rispetto ad un compito di puro posizionamento dell'organo terminale.



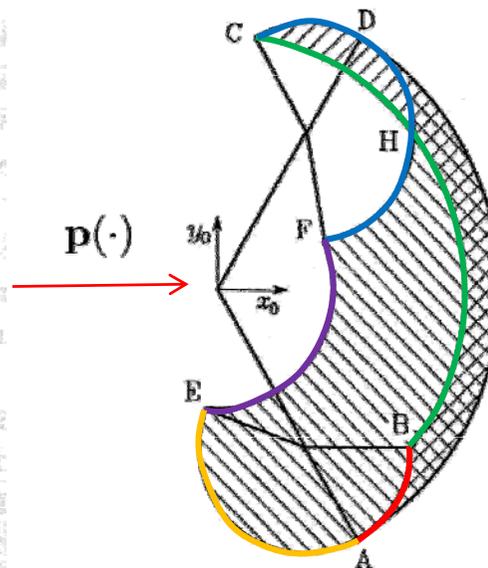
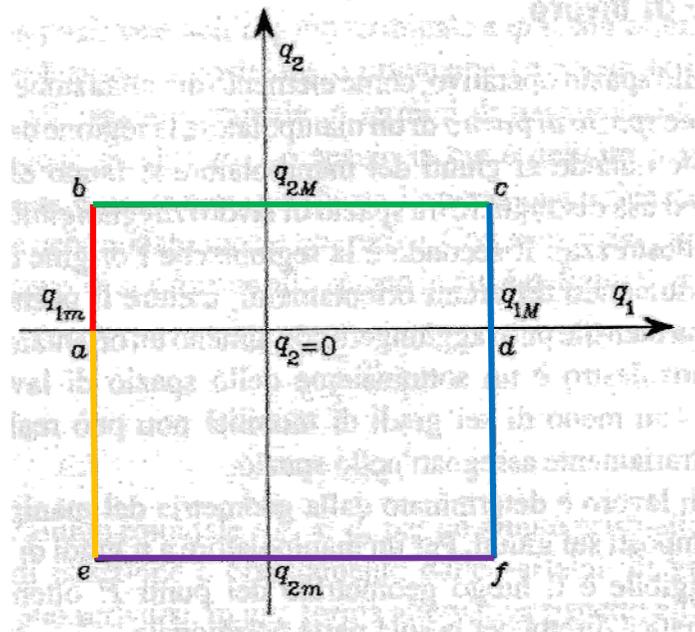
Spazio di lavoro (workspace)

Con riferimento allo spazio operativo, nell'ambito della valutazione delle prestazioni di un robot, si definisce *spazio di lavoro* la regione descritta dall'origine della terna utensile quando ai giunti del manipolatore si fanno eseguire tutti i moti possibili.

Spazio di lavoro raggiungibile: regione che l'origine della terna utensile può raggiungere con almeno un orientamento.

Spazio di lavoro destro: regione che l'origine della terna utensile può raggiungere assumendo differenti orientamenti. E' sottoinsieme del primo.

Esempio di spazio di lavoro: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q})$, $q_{i,m} \leq q_i \leq q_{i,M}$, $i = 1, \dots, n$.



- CDAEFHC = spazio di lavoro
- ///BCDAB = con gomito basso
- \\ DAEFD = con gomito alto
- ⊗ BADHB = entrambe

Ridondanza cinematica

Un manipolatore viene detto ridondante da un punto di vista cinematico quando possiede un numero di gradi di libertà maggiore del numero di variabili necessarie alla caratterizzazione di un determinato compito.

In termini degli spazi dei giunti ed operativo, un manipolatore è intrinsecamente ridondante se $m < n$.

La ridondanza è peraltro un concetto *relativo* al tipo di compito da svolgere. Anche se $m = n$ un manip. può essere funzionalmente ridondante se interessano solo r compon. dello spazio operativo. Es. per planare a 3 bracci $m = 3, n = 3$. Se interessa anche l'orientazione dell'organo terminale $r = m = n = 3$, il manipolatore è non ridondante. Lo diventa se non interessa l'orientamento allora $r = 2; m = n = 3$.

Sicuramente al massimo $m = 6$. Per cui un robot con $n = 6$ è non ridondante se $r = 6$. Lo diventa se ad esempio consideriamo una operazione di taglio laser con asse del fascio uguale all'asse di approccio. In tal caso la rotazione attorno all'asse d'approccio è inessenziale e dunque il manipolatore a sei assi risulta ridondante per tale compito, poiché $r = 5$.

Ridondanza serve per conferire caratteristiche di destrezza e versatilità, es. per evitare ostacoli nello spazio operativo continuando ad esercitare il compito assegnato. Es. braccio umano ha 7 g.d.l. (1 volta ridondante).

Problema cinematico inverso

Modello cinematico diretto

- Funzione $\Lambda(q) \in SE(3)$ che permette di passare dalle variabili di giunto $q \in \mathbb{R}^n$ (con n gradi di libertà del manipolatore), alla posizione/orientazione dell'end-effector (matrice omogenea ${}^b A_e(q)$);
- La definizione di $\Lambda(q)$ è concettualmente semplice e presenta aspetti tali da poter definire tecniche generali ed automatiche per poterla calcolare.

Modello cinematico inverso

- Determinare le variabili di giunto, una volta assegnati posizione ed orientazione dell'end-effector;
- Non esiste alcuna tecnica di tipo generale che applicata sistematicamente dà una soluzione;
- La soluzione che si cerca può non essere unica. Si possono avere: (1) nessuna soluzione (si richiede di stare all'esterno dello *spazio di lavoro*); (2) insieme finito di soluzioni (una o più); (3) infinite soluzioni;
- Si cercano soluzioni in forma chiusa e non numeriche per: (1) ragioni computazionali; (2) esprimendo soluzioni in forma analitica se ne può selezionare una in particolare (se si ha più di una soluzione).

Problema cinematico inverso

Per ottenere una soluzione in forma chiusa al problema della cinematica inversa, esistono essenzialmente due tecniche:

- una di carattere ALGEBRICO, che consiste in manipolazioni delle equazioni cinematiche fino ad ottenere un insieme di equazioni che ci permettano un'inversione delle equazioni;
- una di carattere GEOMETRICO, che si basa, quando e se è possibile, su considerazioni di tipo geometrico, dipendenti dalla struttura del manipolatore, che aiutano nella soluzione.

Problema cinematico inverso: approccio generale

La postura assegnata all'end effector è espressa da una matrice omogenea **nota** T :

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R & p \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \in SE(3)$$

Sia data la matrice omogenea della cinematica diretta, che dipende dalla struttura del manipolatore. Es. per manipolatore ad n g.d.l.:

$${}^b A_e(q) = \left[\begin{array}{c|c} {}^b R_e(q) & {}^b t^e(q) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = {}^b A_0 {}^0 A_1(q_1) \dots {}^{i-1} A_i(q_i) \dots {}^{n-1} A_n(q_n) {}^n A_e$$

Si impone l'equazione matriciale:

$${}^b A_e(q) = T \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} {}^b R_e(q) & {}^b t^e(q) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} R & p \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

Data la struttura della matrice omogenea, tale equazione matriciale corrisponde a 12 equazioni scalari non lineari (solo 6 sono indipendenti) nelle incognite q .

Problema cinematico inverso generale: es. manipolatore di Stanford

Per il manipolatore di Stanford, parametrizzato secondo convenzione di D.-H., con

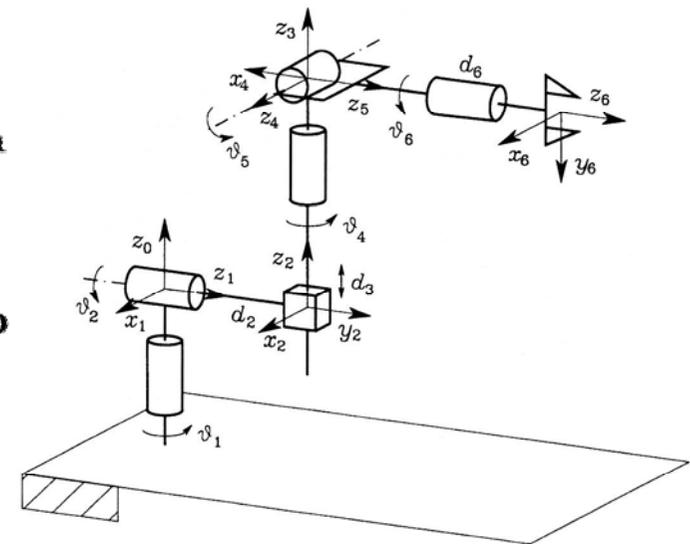
$${}^b A_0 = {}^n A_e = I_4$$

Le 6 equazioni della cinematica inversa sono da scegliersi fra le 12 totali, date da:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 c_1 [c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6] - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) &= r_{11} \\
 s_1 [c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6] + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) &= r_{21} \\
 -s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 &= r_{31}
 \end{aligned} \right\} \mathbf{n} \\
 & \left. \begin{aligned}
 c_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 s_6) + s_2 s_5 s_6] - s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) &= r_{12} \\
 s_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 s_6) + s_2 s_5 s_6] + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) &= r_{22} \\
 s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 s_6) + c_2 s_5 s_6 &= r_{32}
 \end{aligned} \right\} \mathbf{s} \\
 & \left. \begin{aligned}
 c_1 (c_4 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 &= r_{13} \\
 s_1 (c_4 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 &= r_{23} \\
 -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 &= r_{33}
 \end{aligned} \right\} \mathbf{a} \\
 & \left. \begin{aligned}
 c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 - d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5) &= p_x \\
 s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + d_6 (c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2) &= p_y \\
 c_2 d_3 + d_6 (c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5) &= p_z
 \end{aligned} \right\} \mathbf{p}
 \end{aligned}$$

Nelle 6 incognite:

$$q = (\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$$



Stanford manipulator

Esempio problema cinematico inverso: approccio algebrico

Dato il manipolatore planare a tre bracci, determinare le variabili di giunto $q = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ corrispondenti a posizione ed orientamento assegnati dell'organo terminale.

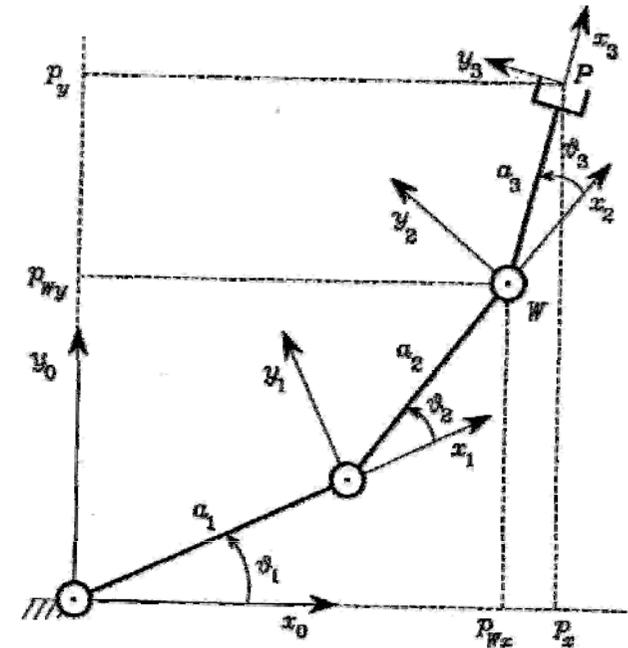
Equazioni:

$$\begin{cases} \phi &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ p_{W_x} &= p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ p_{W_y} &= p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{cases}$$

$$p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2$$

$$\begin{cases} c_2 = \frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2} \\ s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \end{cases} \rightarrow \theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$$

$$\begin{cases} s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{W_y} - a_2 s_2 p_{W_x}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \\ c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{W_x} + a_2 s_2 p_{W_y}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \end{cases} \rightarrow \theta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1) \rightarrow \theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$



Problema cinematico inverso: approccio alla Pieper

Per molte strutture cinematiche di manipolatori industriali vale il cosiddetto “disaccoppiamento cinematico”, che permette di scomporre il problema generale della cinematica inversa (complesso), in due sottoproblemi più semplici:

1. determinazione della soluzione inversa al problema del posizionamento;
2. determinazione della soluzione inversa al problema dell'orientamento.

Esiste a questo riguardo un risultato trovato da un ricercatore, Pieper, che afferma che:

condizione sufficiente per trovare una soluzione in forma chiusa per un manipolatore a sei gradi di libertà è che esistano:

- **tre giunti di rotazione consecutivi i cui assi si intersecano in un punto;**

oppure

- **tre giunti di rotazione i cui assi sono paralleli.**

In molti manipolatori industriali a 6 gradi di libertà, i primi tre sono utilizzati per il posizionamento del polso, il quale ha tipicamente altri tre gradi di libertà per l'orientamento.

In questi casi risulta naturale la scomposizione del problema cinematico inverso nei due sottoproblemi citati precedentemente.

Problema cinematico inverso per manipolatori con polso sferico

Per un manipolatore a polso sferico una scelta naturale è scomporre il problema in:

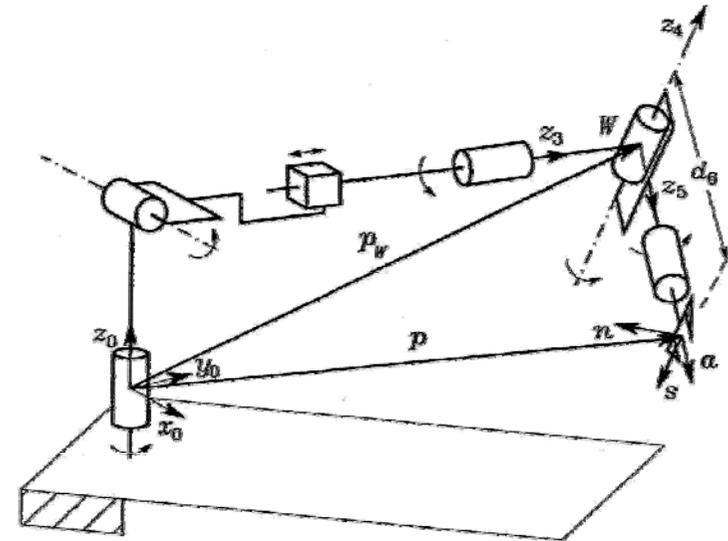
1. posizionamento del punto \mathbf{p}_W intersezione dei tre assi del polso;
2. orientamento dell'attrezzo

Una volta assegnati la posizione e l'orientamento della terna utensile in termini di

$$\mathbf{R} = [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}] \quad \text{e} \quad \mathbf{p}.$$

La procedura si articola come segue (impiegando convenzione di D.-H.):

1. si calcola la posizione del centro del polso $\mathbf{p}_W(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{a}$;
2. si risolve la cinematica inversa per (q_1, q_2, q_3) ;
3. si calcola la matrice di rotazione ${}^0\mathbf{R}_3(q_1, q_2, q_3)$;
4. si calcola la rotazione residua ${}^3\mathbf{R}_6 = {}^0\mathbf{R}_3^T \mathbf{R}$;
5. si risolve la cinematica inversa dell'orientamento nei tre angoli (q_4, q_5, q_6) ; a seguito della scelta fatta per parametrizzare il polso sferico con D.-H., tali angoli corrispondono a quelli di Eulero ZYZ. Valgono dunque le formule inverse viste in precedenza.



Posizionamento centro del polso \mathbf{p}_W per manip. sferico

Dalla ${}^0\mathbf{T}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$ segue che: $({}^0\mathbf{A}_1^{-1}){}^0\mathbf{T}_3 = {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$

Consideriamo così le componenti in frame S_1 . Esplicitamente si ha:

$$({}^0\mathbf{A}_1^{-1}){}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & d_3 s_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & -d_3 c_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

Eguagliando i vettori posizione (in componenti in frame S_1)

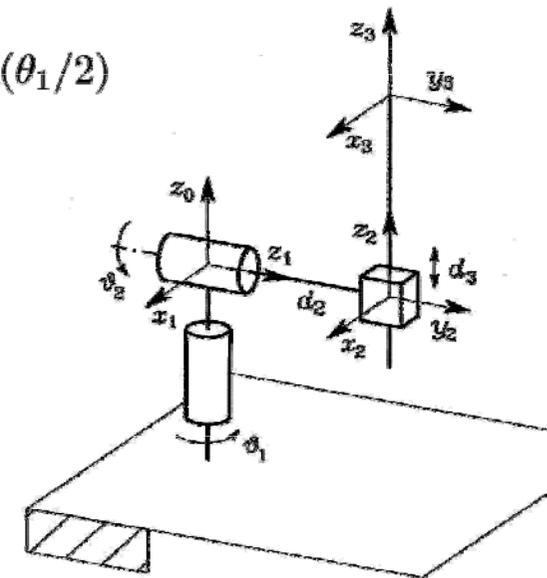
$${}^1\mathbf{p}_w = \begin{bmatrix} p_x c_1 + p_y s_1 \\ -p_z \\ -p_x s_1 + p_y c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Ultima componente dipende solo da θ_1 . Allora si pone: $a = \tan(\theta_1/2)$

$$c_1 = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}, \quad s_1 = \frac{2a}{1 + a^2}$$

Sostituendo si ha:

$$(d_2 + p_y)a^2 + (2p_x)a + (d_2 - p_y) = 0$$



Posizionamento centro del polso \mathbf{p}_W per manip. sferico

$$(d_2 + p_y)a^2 + (2p_x)a + (d_2 - p_y) = 0 \longrightarrow a = \frac{-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{d_2 + p_y}$$

Due soluzioni possibili se $(p_x^2 + p_y^2 - d_2^2 > 0)$, ovvero:

$$\theta_1 = 2 \operatorname{atan2}(-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, d_2 + p_y)$$

Il vettore ${}^1\mathbf{p}_w$ era definito come

$${}^1\mathbf{p}_w = \begin{bmatrix} p_x c_1 + p_y s_1 \\ -p_z \\ -p_x s_1 + p_y c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Dalle prime due componenti si ha quindi ($d_3 > 0$):

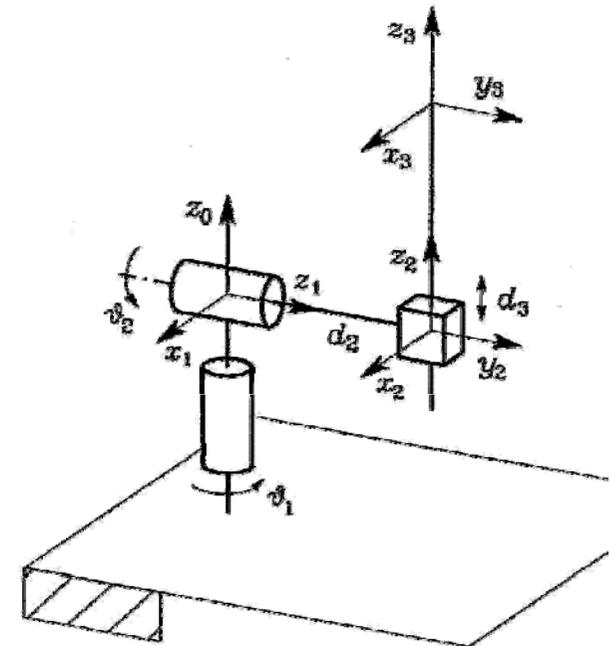
$$s_2 = (p_x c_1 + p_y s_1)/d_3; \quad c_2 = p_z/d_3;$$

da cui:

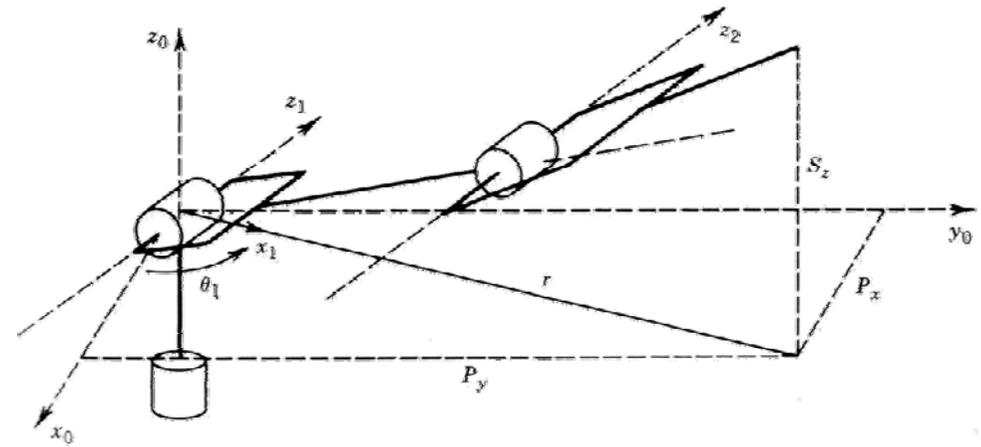
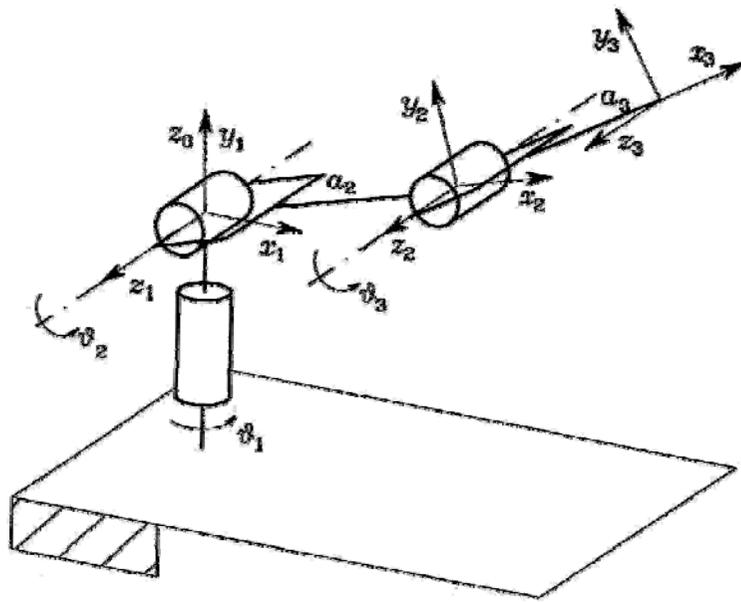
$$\theta_2 = \operatorname{atan2}(p_x c_1 + p_y s_1, p_z)$$

Infine, quadrando e sommando le prime due componenti, si ottiene:

$$d_3 = \sqrt{(p_x c_1 + p_y s_1)^2 + p_z^2}$$



Posizionamento centro del polso p_W per manip. antropomorfo



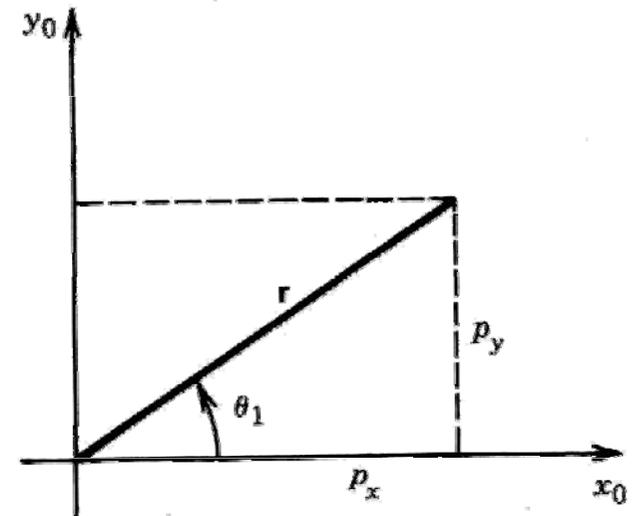
Dalla configurazione geometrica si ha immediatamente:

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$$

Si osservi che un'altra soluzione possibile è:

$$\theta'_1 = \pi + \text{atan2}(p_y, p_x)$$

a cui è associato un nuovo $\theta'_2 = \pi - \theta_2$



Posizionamento centro del polso \mathbf{p}_W per manip. antropomorfo

Una volta determinato θ_1 , la struttura risulta planare nei riguardi di θ_2, θ_3 .
 Si può quindi opportunamente utilizzare la soluzione del manipolatore planare a due bracci precedentemente studiato, da cui:

$$c_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}; \quad s_3 = \pm\sqrt{1 - c_3^2} \quad \longrightarrow \quad \theta_3 = \text{atan2}(s_3, c_3)$$

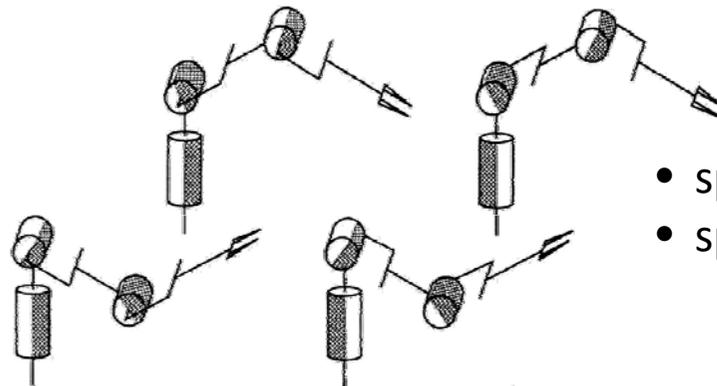
Inoltre, per ragionamento geometrico:

$$s_2 = \frac{(a_2 + a_3c_3)p_z - a_3s_3\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

$$c_2 = \frac{(a_2 + a_3c_3)\sqrt{p_x^2 + p_y^2} + a_3s_3p_z}{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad \longrightarrow \quad \theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$$

Come si riconosce, esistono 4 soluzioni, con diverso orientamento:

- spalla destra-gomito alto;
- spalla destra-gomito basso;



- spalla sinistra-gomito alto;
- spalla sinistra-gomito basso;

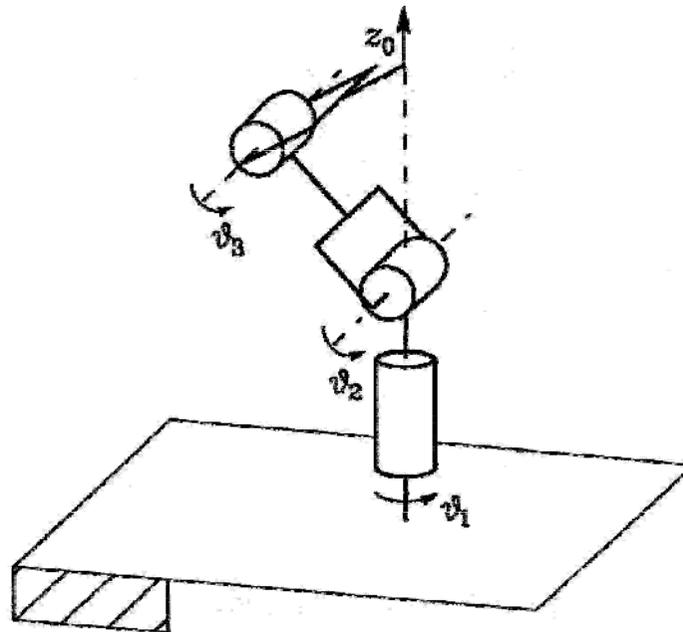
Posizionamento centro del polso \mathbf{p}_W per manip. antropomorfo

Si noti, infine, come sia possibile individuare univocamente la soluzione solo se:

$$p_x \neq 0; \quad p_y \neq 0$$

Nel caso $p_x = p_y = 0$, si ottiene una infinità di soluzioni, in quanto è possibile determinare le variabili di giunto θ_2, θ_3 a prescindere dal valore assunto da θ_1 . Tale configurazione individua una **singularità cinematica** per il manipolatore.

In tale configurazione il centro del polso è allineato all'asse del primo giunto: si parla in tale caso di **singularità di spalla**. Maggiori dettagli verranno forniti in seguito.



Soluzione del polso sferico

Considerando il polso in figura, si vogliono ricavare le variabili di giunto $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ corrispondenti ad un orientamento assegnato dell'organo terminale in termini di ${}^3\mathbf{R}_6$.

Come osservato in precedenza, tali angoli costituiscono l'insieme degli angoli di Eulero ZYZ rispetto alla terna di riferimento S_3 . ($\theta_4 = \varphi, \theta_5 = \theta, \theta_6 = \psi$)

Pertanto, una volta specificata la matrice di rotazione

$${}^3\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} {}^3n_x & {}^3s_x & {}^3a_x \\ {}^3n_y & {}^3s_y & {}^3a_y \\ {}^3n_z & {}^3s_z & {}^3a_z \end{bmatrix}$$

la soluzione segue direttamente dalle formule viste:

$$\begin{cases} \theta_4 = \text{atan2}({}^3a_y, {}^3a_x) \\ \theta_5 = \text{atan2}(\sqrt{({}^3a_x)^2 + ({}^3a_y)^2}, {}^3a_z) \\ \theta_6 = \text{atan2}({}^3s_z, -{}^3n_z), \quad \text{se } \theta_5 \in (0, \pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_4 = \text{atan2}(-{}^3a_y, -{}^3a_x) \\ \theta_5 = \text{atan2}(-\sqrt{({}^3a_x)^2 + ({}^3a_y)^2}, {}^3a_z) \\ \theta_6 = \text{atan2}(-{}^3s_z, {}^3n_z), \quad \text{se } \theta_5 \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

