Moti rigidi generali e trasformazioni omogenee

Robotica I

Marco Gabiccini

A.A. 2009/2010 LS Ing. Meccanica ed Automazione

Trasformazioni rigide generali

Rotazione fra due sistemi di riferimento esprimibile in forma matriciale (lineare):

$$p^1 = g_R(p^0) = {}^0R_1\, p^0$$

Traslazione fra due sistemi di riferimento esprimibile come trasformazione “affine”:

$$p^1 = g_T(p^0) = v + p^0$$

Consideriamo adesso una trasformazione formata dalla successione di una rotazione seguita da una traslazione, espresse in assi fissi:

$$g_T(g_R(p)) = v + Rp, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad R \in SO(3)$$

Si noti che le operazioni non commutano, essendo:

$$g_R(g_T(p)) = Rv + Rp, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad R \in SO(3)$$

La struttura della trasformazione tuttavia non cambia, dato che in entrambi i casi:

$g(p) = Rp + m$ con m opportunamente definito

Composizione di trasformazioni rigide generali

La trasformazione generale ottenuta rappresenta ancora un moto rigido. E' inoltre possibile dimostrare che qualsiasi moto rigido può essere scritto in questa forma, ossia come roto-traslazione:

$$g(p) = Rp + m$$

Indichiamo la generica rototraslazione come la coppia

$$g = (R, m) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$$

Consideriamo due rototraslazioni $g_1 = (R_1, t_1)$ e $g_2 = (R_2, t_2)$, in cui si stabilisce la convenzione che prima sia fatta agire la rotazione e poi la traslazione.
Se le componiamo in terna fissa facendole agire sul generico punto p , effettuando prima quella indicata coi pedici “1” e successivamente quella coi pedici “2” si ottiene:

$$g_1(p) = R_1 p + t_1; \quad g_2(g_1(p)) = R_2(R_1 p + t_1) + t_2 = R_2 R_1 p + R_2 t_1 + t_2$$

Ciò significa che il risultato della composizione fra g_1 e g_2 è dato da

$$g_2 \circ g_1 = (R_2, t_2) \circ (R_1, t_1) = (R_2 R_1, R_2 t_1 + t_2)$$

L'insieme delle rototraslazioni, assieme a questa legge di composizione, forma un gruppo, detto Speciale Euclideo, indicato come $SE(3)$

Coordinate omogenee

Vista la grande praticità della notazione matriciale, e la facilità con la quale si presta al calcolo automatico, introduciamo una nuova rappresentazione che ci permetta di scrivere ogni trasformazione rigida in forma matriciale.
Questo può essere fatto immergendo lo spazio $\mathbb{R}^3$, in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$, fissando la seguente relazione:

$$a \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \bar{a} \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ s \end{bmatrix}$$

Fissando il valore di s con la convenzione che:

- se con a si indicano le coordinate di un punto, $s = 1$
- se con a si indicano le componenti di un vettore, $s = 0$

Così facendo, tra l'altro, si esplicita la netta differenza tra queste grandezze, e la definizione di un vettore come differenza fra punti. Infatti, se $p - q = v$, in notazione omogenea si ha: (nota come somma di punti non ha senso in tal contesto)

$$\bar{p} - \bar{q} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{v}$$

Rappresentazione di trasformazioni rigide in forma matriciale

Usando le coordinate omogenee, è possibile esprimere la generica trasformazione rigida in forma matriciale. Si associa alla $g_{(R,t)}$

$$g_{(R,t)}(p) = Rp + t \quad \rightarrow \quad \bar{g}_{(R,t)}(\bar{p}) = \left[\begin{array}{c:c} R & t \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} p \\ \hdashline 1 \end{array}\right] = A_{(R,t)}\,\bar{p}$$

L'azione della trasformazione rigida sul vettore $v = p - q$ è espressa dallo stesso operatore, infatti

$$g_{(R,t)*}(v) = g_{(R,t)}(p) - g_{(R,t)}(q) = Rv \quad \rightarrow \quad \bar{g}_{(R,t)*}(\bar{v}) = \left[\begin{array}{c:c} R & t \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v \\ \hdashline 0 \end{array}\right] = A_{(R,t)}\,\bar{v}$$

Nella rappresentazione omogenea, gli elementi di $SE(3)$ si identificano dunque con matrici 4x4 della particolare forma

$$A_{(R,t)} = \left[\begin{array}{c:c} R & t \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right], \quad R \in SO(3),\ t \in \mathbb{R}^3$$

In tale forma la legge di composizione è semplicemente il convenzionale prodotto fra matrici. Si ha dunque:

$$A_{(R_2,t_2)}\,A_{(R_1,t_1)} = \left[\begin{array}{c:c} R_2 & t_2 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} R_1 & t_1 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} R_2R_1 & R_2t_1 + t_2 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$$

Proprieta' delle rototraslazioni e della rappresentazione matriciale

La rappresentazione del gruppo $SE(3) = \{(R,t) : R \in SO(3), t \in \mathbb{R}^3\}$ in cui la legge di composizione è fornita da:

$$g_2 \circ g_1 = (R_2, t_2) \circ (R_1, t_1) = (R_2 R_1, R_2 t_1 + t_2)$$

è dunque data dalle matrici omogenee della forma

$$A_{(R,t)} = \left[\begin{array}{c:c} R & t \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$$

composte mediante il convenzionale prodotto fra matrici.

Anche le corrispondenti matrici omogenee formano un gruppo, denotato ancora $SE(3)$, per cui valgono:

- Chiusura $\quad A_{(R_1,t_1)},\ A_{(R_2,t_2)},\ A_{(R_2,t_2)} A_{(R_1,t_1)} = \left[\begin{array}{c:c} R_2 R_1 & R_2 t_1 + t_2 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \in SE(3)$
- Associatività $\quad (A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3)$
- Elemento neutro $\quad I_4$
- Inversa $A^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} R^T & -R^T t \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$;

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c:c} R & t \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} X & y \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} I_3 & 0 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{cases} RX = I_3, \ X = R^T \\ Ry + t = 0, \ y = -R^T t \end{cases} \end{array}\right.$$

Rotazioni e traslazioni elementari

Le trasformazioni omogenee elementari, corrispondenti a rotazioni di un angolo θ attorno agli assi x, y, z , sono date da:

$$R_x(\theta) = \left[\begin{array}{c:c} Rot(x,\theta) & 0 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]; \quad R_y(\theta) = \left[\begin{array}{c:c} Rot(y,\theta) & 0 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]; \quad R_z(\theta) = \left[\begin{array}{c:c} Rot(z,\theta) & 0 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right];$$

La trasformazione omogenea elementare corrispondente ad una traslazione di un vettore t, è data da:

$$T(t) = \left[\begin{array}{c:c} I_3 & t \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$$

Generalmente, come precedentemente fatto per le rotazioni, una rototraslazione complessa viene scritta combinando matrici omogenee elementari. Ciò equivale a scomporre un moto complesso nei suoi costituenti elementari.

Per completezza, si osserva che la più generale delle trasformazioni omogenee può essere scritta nella forma:

$$H = \left[\begin{array}{c:c} D_{3\times 3} & t_{3\times 1} \\ \hdashline f_{1\times 3} & s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \text{Deformazione} & \text{Traslazione} \\ \hdashline \text{Prospettiva} & \text{Scala} \end{array}\right]$$

Questa rappresenta un moto rigido se e solo se $D \in SO(3),\ f = [0\ 0\ 0],\ s = 1$. Scelte diverse sono usate per avere deformazioni, distorsioni prospettiche e cambiamenti di scala. ***[P. J. Schneider, D. H. Eberly – Geometric Tools for Computer Graphics, Morgan Kaufmann, 2003]***

Interpretazione delle matrici di trasformazione omogenea

Come per le matrici di rotazione, anche per le matrici di trasformazione omogenea si possono dare diverse interpretazioni. In particolare una matrice

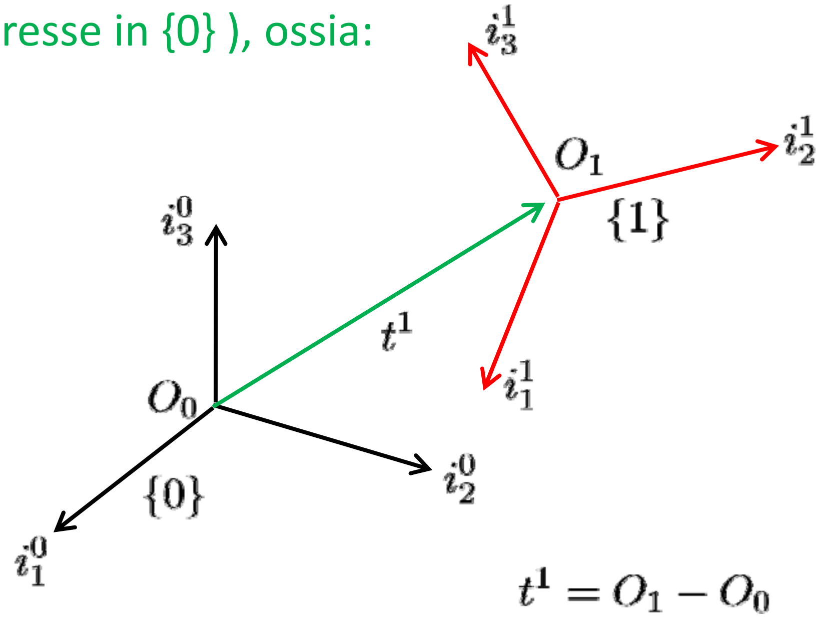
$$A = \left[\begin{array}{c:c} R & t \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$$

Può rappresentare rispettivamente:

- $A = {}^0A^{(1\leftarrow 0)}$: l'operatore che porta punti e vettori da una configurazione {0} in una nuova configurazione {1}, ruotata di ${}^0R^{(1\leftarrow 0)}$ e traslata di ${}^0t^1$ (con componenti dei versori di {1} e componenti della traslaz. espresse in {0}), ossia:

$$^0A^{(1\leftarrow 0)} = \left[\begin{array}{c:c} ^0R^{(1\leftarrow 0)} & ^0t^1 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} ^0R_1 & ^0t^1 \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$$

- $A = {}^0A_1$: l'operatore che trasforma le coordinate di un punto inizialmente descritto da un osservatore posto in {1} in quelle descritte da un osservatore posto in un riferimento {0}. {1} rispetto a {0} ha origine posto in ${}^0t^1$ e versori dati dalle colonne di ${}^0R_1$



Composizione di trasformazioni omogenee

La composizione di matrici di trasformazione omogenee si effettua utilizzando il prodotto matriciale secondo le leggi viste per la composizione di rotazioni, cioè:

- per pre-moltiplicazione di matrici espresse rispetto ad una terna fissa;
- per post-moltiplicazione di matrici espresse rispetto alla terna corrente.

Dimostrazione formalmente analoga a quella per le sole rotazioni, a patto di impiegare le coordinate omogenee.

Es. composizione in assi correnti:

$$ {}^{0}\bar{p}^{1} = {}^{0}A^{(1\leftarrow 0)}\,{}^{0}\bar{p}^{0} $$

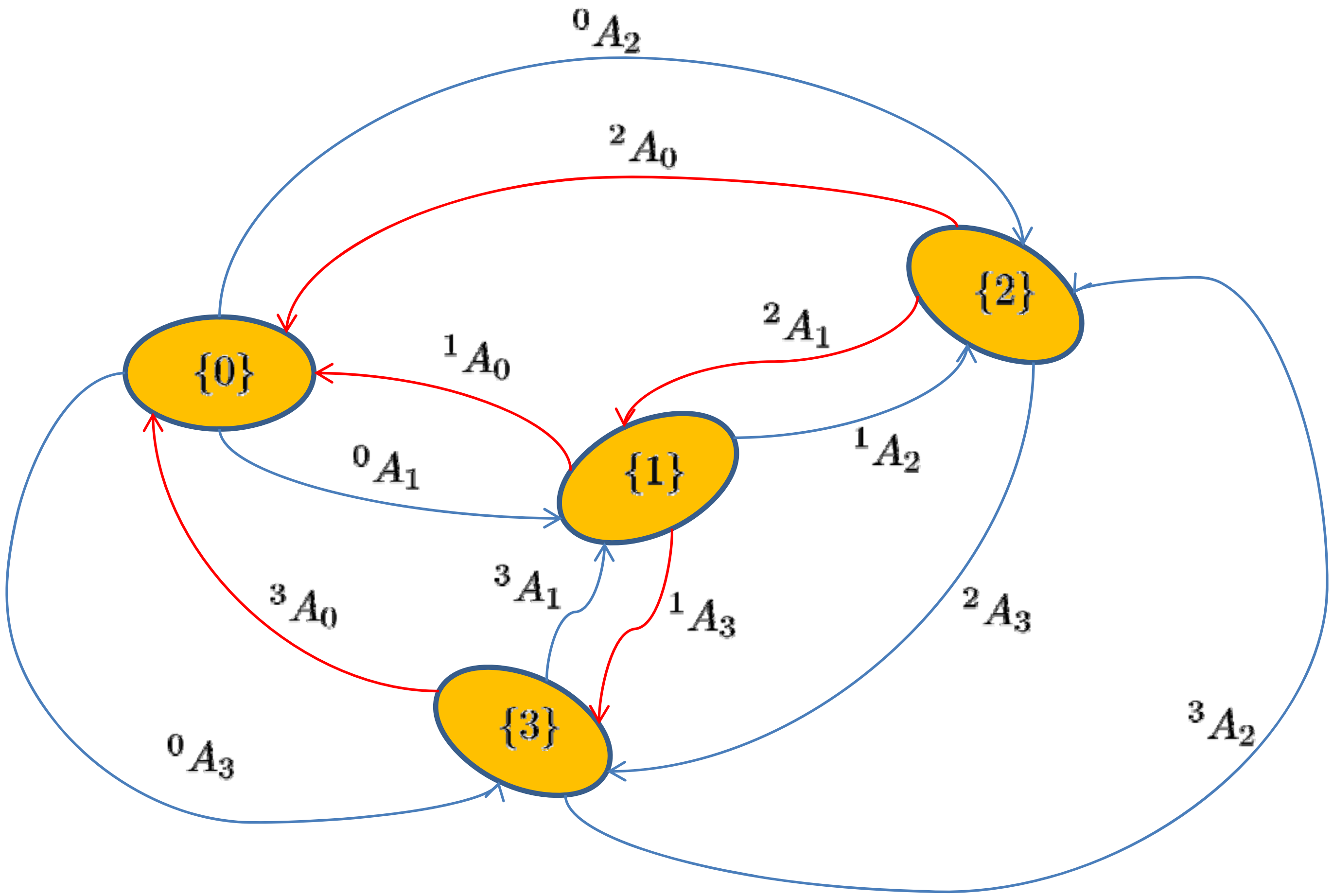
$$ {}^{1}\bar{p}^{1} = {}^{1}A_{0}\,{}^{0}\bar{p}^{1} $$

$$ {}^{1}\bar{p}^{2} = {}^{1}A^{(2\leftarrow 1)}\,{}^{1}\bar{p}^{1} $$

$$ {}^{0}\bar{p}^{2} = {}^{0}A_{1}\,{}^{1}\bar{p}^{2} $$

$$ {}^{0}\bar{p}^{2} = {}^{0}A_{1}\,{}^{1}A_{2}\,{}^{1}A_{0}\,{}^{0}A_{1}\,{}^{0}\bar{p}^{0} = {}^{0}A_{1}\,{}^{1}A_{2}\,{}^{0}\bar{p}^{0} $$

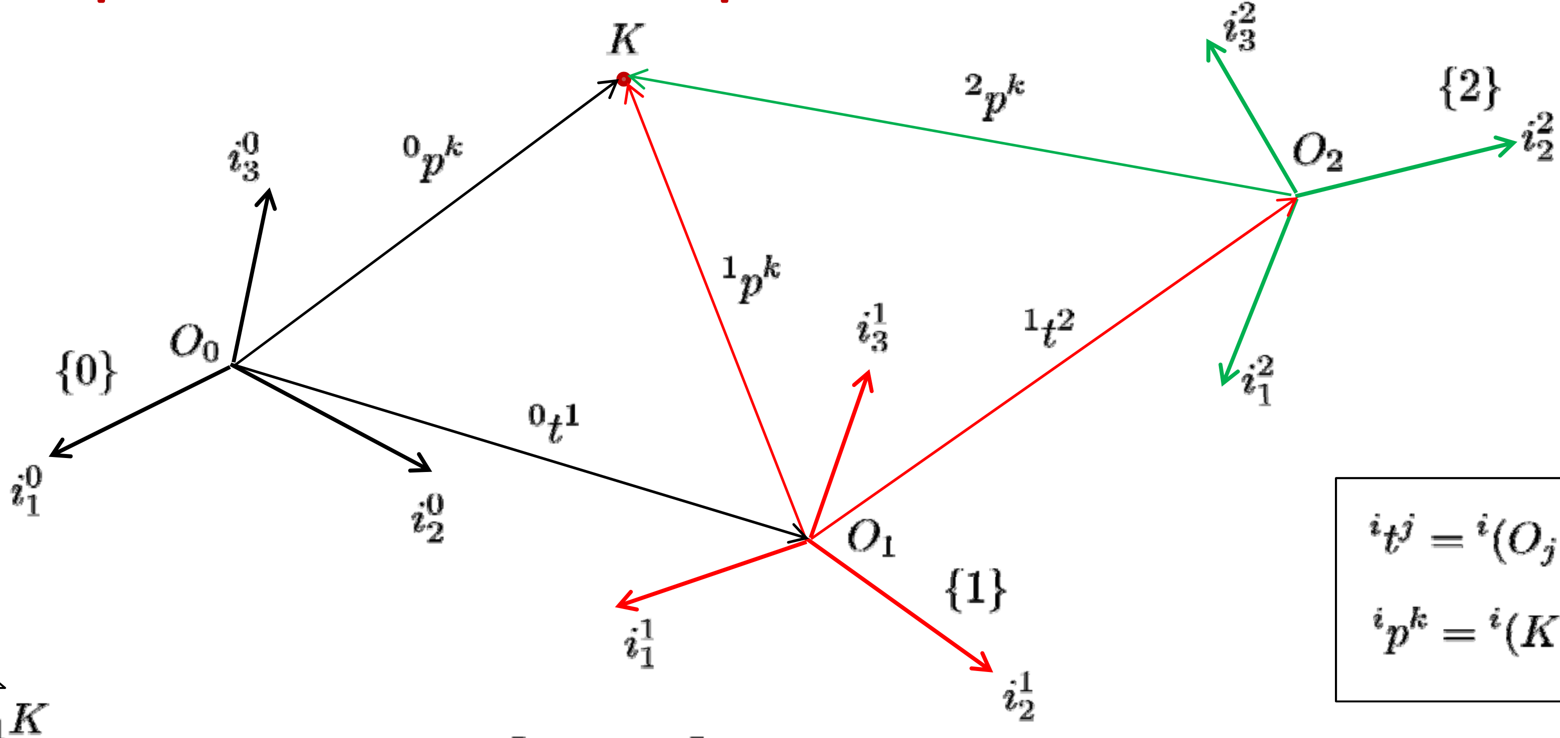
Una interessante costruzione mnemonica (tipo grafo)



Seguendo gli archi da un vertice ad un altro…

$${}^1A_0 = {}^1A_3{}^3A_2{}^2A_0$$

Esempio di trasformazioni composte



$$ {}^it^j = {}^i(O_j - O_i) $$

$$ {}^ip^k = {}^i(K - O_i) $$

$\overset{\triangle}{O_0O_1K}$

$$ {}^0p^k = {}^0t^1 + {}^0R_1\,{}^1p^k \rightarrow \quad {}^0\bar{p}^k = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_1 & {}^0t^1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] {}^1\bar{p}^k $$

$\overset{\triangle}{O_1O_2K}$

$$ {}^1p^k = {}^1t^2 + {}^1R_2\,{}^2p^k \rightarrow \quad {}^1\bar{p}^k = \left[\begin{array}{c|c} {}^1R_2 & {}^1t^2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] {}^2\bar{p}^k $$

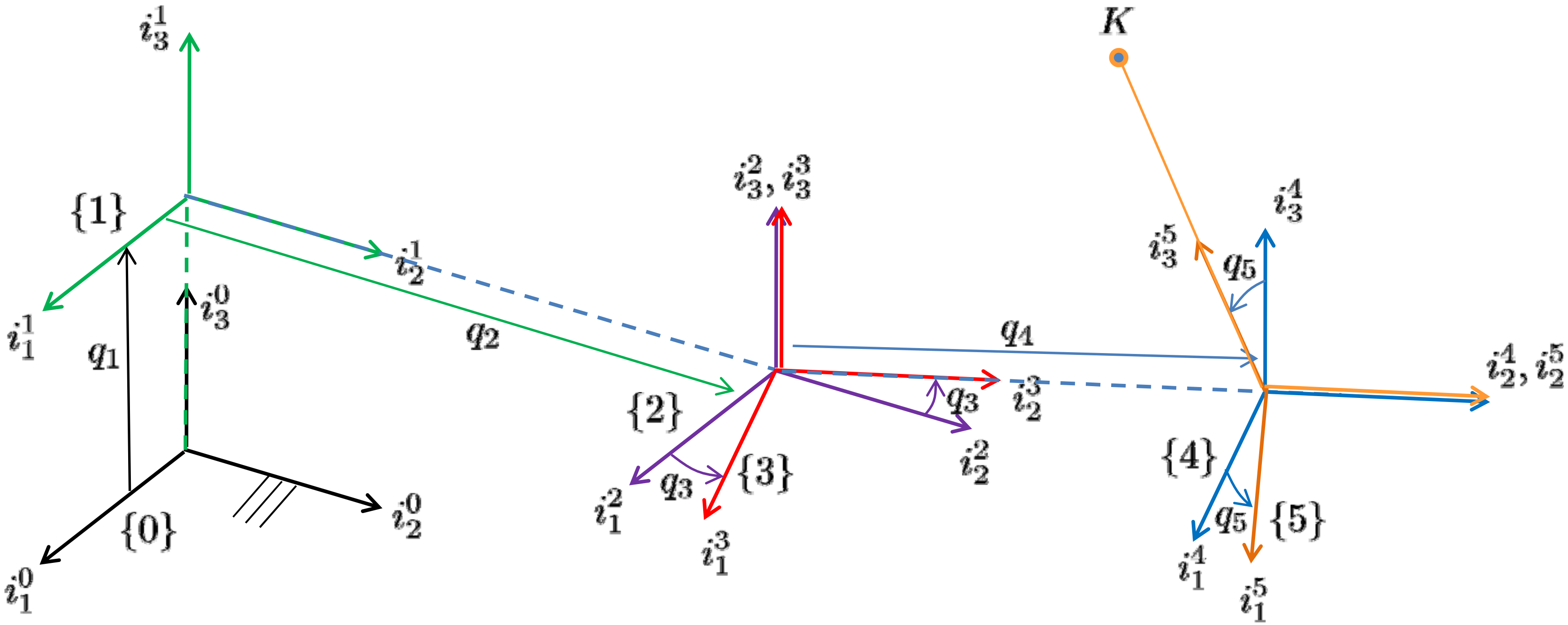
$$ {}^0\bar{p}^k = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_1\,{}^1R_2 & {}^0R_1\,{}^1t^2 + {}^0t^1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] {}^2\bar{p}^k $$

$\overset{\diamond}{O_0O_1O_2K}$

$$ {}^0p^k = {}^0t^1 + {}^0R_1\,{}^1t^2 + {}^0R_1\,{}^1R_2\,{}^2p^k \rightarrow \quad {}^0\bar{p}^k = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_1\,{}^1R_2 & {}^0R_1\,{}^1t^2 + {}^0t^1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] {}^2\bar{p}^k $$

Esempio

Costruzione della $^0A_5(q), \quad q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$



Componiamo in terna corrente

$$\boxed{^0A_5(q) = {}^0A_1(q_1)\,{}^1A_2(q_2)\,{}^2A_3(q_3)\,{}^3A_4(q_4)\,{}^4A_5(q_5),}$$

Le cinque trasformazioni parziali sono esprimibili come trasf. elementari

$^0A_1(q_1) = T([0\ 0\ q_1]^T); \quad {}^1A_2(q_2) = T([0\ q_2\ 0]^T); \quad {}^2A_3(q_3) = R_z(q_3);$

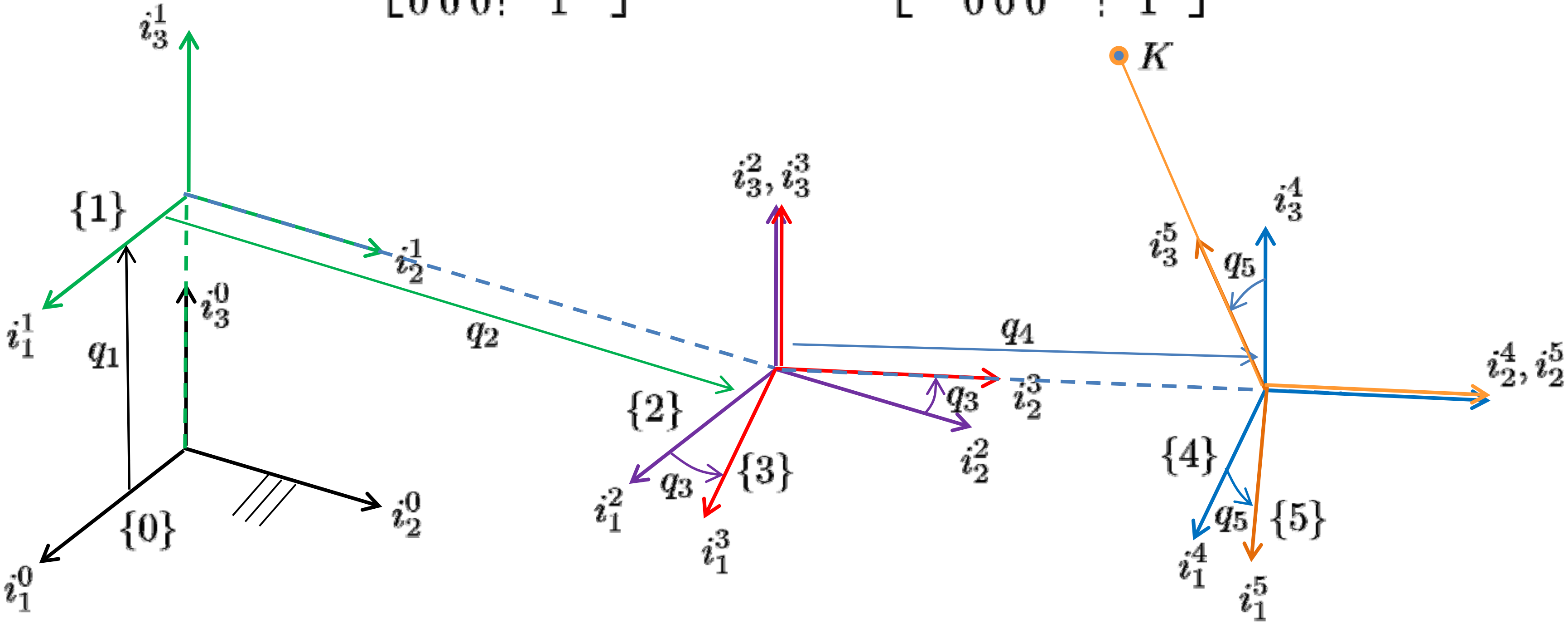
$^3A_4(q_4) = T([0\ q_4\ 0]^T); \quad {}^4A_5(q_5) = R_y(q_5);$

Esempio

In modo esplicito, le matrici elementari che composte forniscono la ${}^0A_5(q)$ sono:

$$ {}^0A_1(q_1) = \left[\begin{array}{c:c} I_3 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]; \quad {}^1A_2(q_2) = \left[\begin{array}{c:c} I_3 & \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]; \quad {}^2A_3(q_3) = \left[\begin{array}{c:c} Rot(z, q_3) & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]; $$

$$ {}^3A_4(q_4) = \left[\begin{array}{c:c} I_3 & \begin{bmatrix} 0 \\ q_4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]; \quad {}^4A_5(q_5) = \left[\begin{array}{c:c} Rot(y, q_5) & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hdashline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]; $$



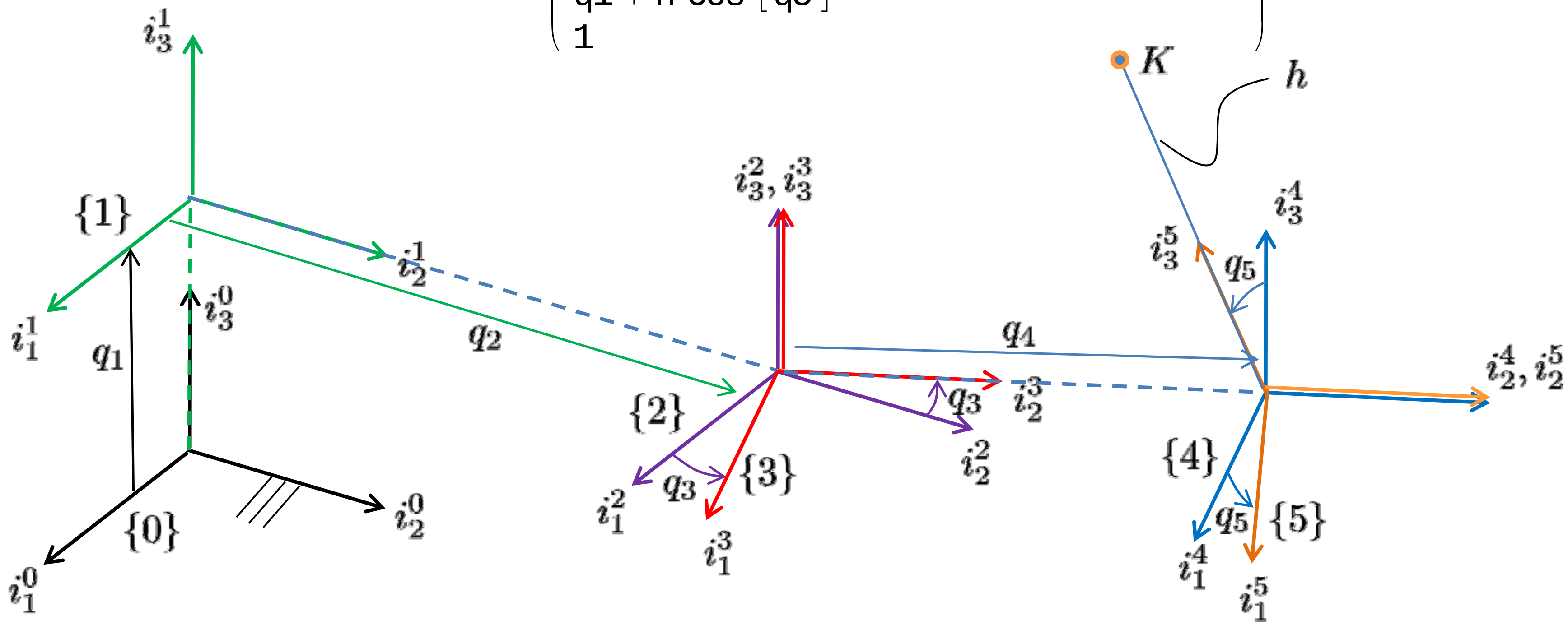
Esempio

L’espressione finale della $^0A_5(q)$ è data da:

$$
{}^0A_5(q) = \left(\begin{array}{ccc|c}
\mathrm{Cos}[q3]\,\mathrm{Cos}[q5] & -\mathrm{Sin}[q3] & \mathrm{Cos}[q3]\,\mathrm{Sin}[q5] & -q4\,\mathrm{Sin}[q3] \\
\mathrm{Cos}[q5]\,\mathrm{Sin}[q3] & \mathrm{Cos}[q3] & \mathrm{Sin}[q3]\,\mathrm{Sin}[q5] & q2 + q4\,\mathrm{Cos}[q3] \\
-\mathrm{Sin}[q5] & 0 & \mathrm{Cos}[q5] & q1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

Il punto indicato, solidale a $\{5\}$, e che ha in esso coordinate omogenee $^5\bar{p}^k = [0\ 0\ h\ 1]^T$ ha coordinate omogenee in $\{0\}$:

$$
{}^0\bar{p}^k = {}^0A_5(q)\,{}^5\bar{p}^k = \begin{pmatrix}
-q4\,\mathrm{Sin}[q3] + h\,\mathrm{Cos}[q3]\,\mathrm{Sin}[q5] \\
q2 + q4\,\mathrm{Cos}[q3] + h\,\mathrm{Sin}[q3]\,\mathrm{Sin}[q5] \\
q1 + h\,\mathrm{Cos}[q5] \\
1
\end{pmatrix}
$$



Parametrizzazione della postura dell'end-effector rispetto alla base