

Parametrizzazioni di $SO(3)$

Antonio Bicchi, Marco Gabiccini

A.A. 2007/2008 Laurea Specialistica in
Ingegneria dell'Automazione

1 Parametrizzazioni di $SO(3)$

Definizione di $SO(3)$

Sia $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matrice di rotazione e siano $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^3$ le sue colonne, ossia

$$R = [r_1 \ r_2 \ r_3]$$

Dal momento che le colonne di R sono mutuamente ortonormali, segue che

$$r_i^T r_j = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Tale condizioni sulla matrice R possono essere espresse come

$$RR^T = R^T R = I$$

Definizione di $SO(3)$

La condizione di preservare gli angoli risulta semplicemente in

$$r_2 \times r_3 = \pm r_1$$

La condizione di preservare il *verso di percorrenza*, ossia che terne destrorse (o levogire) vengano mappate in terne destrorse, equivale a pretendere il segno positivo. Moltiplicando scalarmente per r_1 entrambi i membri si ha

$$r_1^T (r_2 \times r_3) = 1$$

Ma dall'algebra lineare si ricorda che il risultato del prodotto misto dei tre versori r_1, r_2, r_3 equivale al determinante della matrice che ha tali versori come colonne, dunque

$$\det R = \det[r_1 \ r_2 \ r_3] = r_1^T (r_2 \times r_3) = 1$$

Definizione formale di $SO(3)$

Stanti le proprietà precedenti, si può fornire la definizione formale di gruppo delle matrici di rotazione (Speciale Ortogonale)

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : RR^T = I, \det R = +1\}$$

$SO(3)$ è un *gruppo* con l'operazione di prodotto matriciale dato che verifica i seguenti assiomi:

- 1** *Chiusura*: Se $R_1, R_2 \in SO(3)$, allora $R_1 R_2 \in SO(3)$
- 2** *Identità*: La matrice identità è l'elemento neutro (o identico)
- 3** *Inversa*: Per ogni $R \in SO(3)$ esiste un'unica inversa che in particolare è uguale alla trasposta, ossia $RR^{-1} = RR^T = R^T R = I$
- 4** *Associatività*: L'associatività della operazione del gruppo segue direttamente dalla associatività del prodotto fra matrici; cioè, $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$.

Interpretazione degli elementi di $SO(3)$

La matrice di rotazione ${}^i R_j$ ha la duplice veste di indicare:

- 1 La rotazione, espressa nel sistema di riferimento $\{i\}$, che permette di passare dalla configurazione di $\{i\}$ alla configurazione di $\{j\}$.

Essa è stata indicata anche come ${}^i R_j = {}^i R^{(j \leftarrow i)}$.

In base al significato degli apici si ha infatti

$${}^i p^j = {}^i R^{(j \leftarrow i)} {}^i p^i = {}^i R_j {}^i p^i$$

- 2 La trasformazione di coordinate dal sistema di riferimento $\{j\}$ al sistema di riferimento $\{i\}$.

In base al significato degli apici si ha infatti

$${}^i p^k = {}^i R_j {}^j p^k$$

Regole di composizione delle rotazioni

Se si hanno tre rotazioni rigide generiche successive espresse dalle matrici R_1, R_2, R_3 , la composizione di tale successione avviene nel seguente modo:

- 1 Per pre-moltiplicazione se le rotazioni avvengono tutte rispetto agli assi fissi (iniziali), ossia

$$R = \overleftarrow{R_3 R_2 R_1}$$

- 2 Per post-moltiplicazione se le rotazioni avvengono rispetto agli assi correnti, ossia

$$R = \overrightarrow{R_1 R_2 R_3}$$

Parametrizzazioni di $SO(3)$

Le matrici di $SO(3)$ corrispondono esattamente alle rotazioni rigide – nel senso che ad ogni matrice di rotazione corrisponde una ed una sola rotazione e viceversa. La relazione è quindi *one-to-one*.

La rappresentazione matriciale d'altronde, che utilizza nove parametri non indipendenti, può presentare alcuni inconvenienti, tra i quali:

- non è molto intuitiva, dovendo ricorrere alle espressioni in coordinate dei versori degli assi delle terne;
- non è molto robusta numericamente (una procedura numerica che debba calcolare i valori di una matrice di rotazione può produrre lievi errori che fanno sì che il risultato non sia in effetti in $SO(3)$), introducendo quindi deformazioni dei corpi (faremo esercitazione in seguito).

Parametrizzazioni di $SO(3)$

Per ovviare a questi inconvenienti è importante avere a disposizione altre rappresentazioni delle rotazioni che possano ovviare a questi inconvenienti. D'altronde, a partire dai 9 elementi della generica matrice di rotazione, grazie alle 6 equazioni di vincolo, i gradi di libertà si riducono a 3. Infatti si ha:

$$R = [r_1 \ r_2 \ r_3] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

con le 6 equazioni di vincolo:

$$r_i^T r_j = \delta_i^j, \quad \text{per } (i = 1, \dots, 3, j = i, \dots, 3)$$

Una rappresentazione dell'orientamento in termini di tre soli parametri indipendenti ne costituisce pertanto una *rappresentazione minima*.

Rappresentazioni minime dell'orientamento

Componendo 3 fra le rotazioni elementari intorno agli assi x, y, z , espresse dalle matrici di rotazione

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix},$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si può ottenere una rappresentazione minima dell'orientamento.

E' importante notare che la rotazione al passo $i + 1$ deve essere diversa dalla rotazione al passo i per esserne indipendente. Ciò significa che esistono 12 rappresentazioni minime dell'orientamento, ossia $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

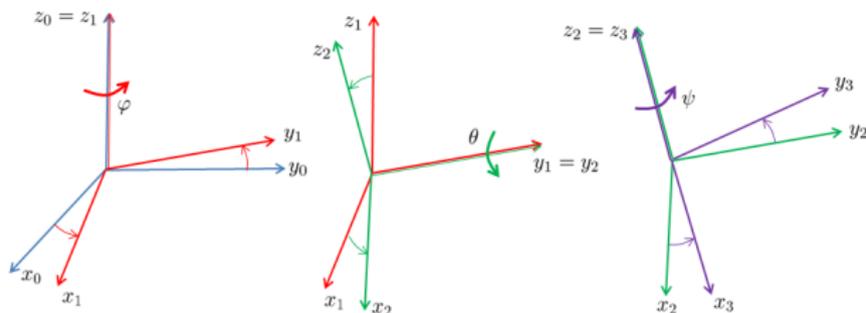
Rappresentazioni minime dell'orientamento

Componendo matrici di rotazione elementari, siamo sicuri che la matrice prodotto R è sicuramente membro di $SO(3)$. In base alla sequenza di rotazioni scelta si hanno diverse rappresentazioni. Le più diffuse nel campo della robotica sono:

- Angoli di Eulero, ossia sequenza (ZYZ)
- Angoli di Roll, Pitch, Yaw (RPY), ossia sequenza (ZYX)
- Altre rappresentazioni sono quelle basate sugli angoli di Helmholtz (YZX)
- Nella letteratura italiana i sei gruppi (XYZ, YZX, ZXY, XZY, ZYX, YXZ) vengono definiti angoli di Cardano. Si noti come gli angoli di Cardano, gruppo 5 siano esattamente quelli di RPY.

Parametrizzazione con angoli di Eulero

La sequenza di Eulero (ZYZ) si basa sulla seguente successione di tre rotazioni elementari:



La matrice di rotazione $R_{ZYZ}(\varphi, \theta, \psi)$ (costruita in assi correnti) risulta

$$R_z(\varphi)R_y(\theta)R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

Angoli di Eulero

La determinazione degli angoli di Eulero, sequenza (ZYZ), a partire da una matrice $R \in SO(3)$, avviene nel modo seguente.

Assegnata

$$R = [r_1 \ r_2 \ r_3] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

si cerca di determinare (se possibile) la terna (φ, θ, ψ) tale che

$$R = R_{ZYZ}(\varphi, \theta, \psi).$$

La $R_{ZYZ}(\varphi, \theta, \psi)$ risulta:

$$R_z(\varphi)R_y(\theta)R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

Soluzioni isolate per angoli di Eulero

Se $r_{13}^2 + r_{23}^2 = \sin^2 \theta \neq 0$ si possono avere due soluzioni isolate:

- Se definiamo $\theta \in (0, \pi)$, ($\sin \theta > 0$) si ha la soluzione

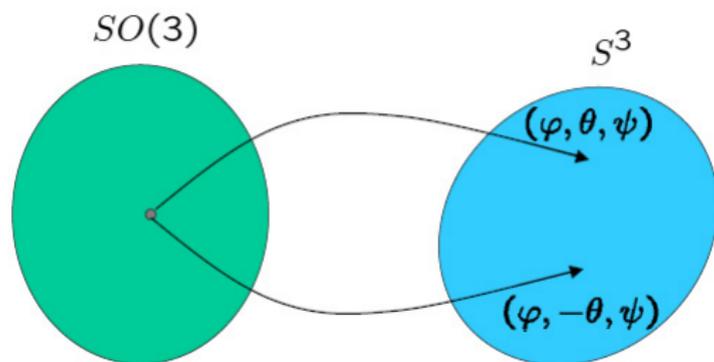
$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \theta = \operatorname{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi = \operatorname{atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{cases}$$

- Se definiamo $\theta \in (-\pi, 0)$, ($\sin \theta < 0$) si ha la soluzione

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \\ \theta = \operatorname{atan2}(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi = \operatorname{atan2}(-r_{32}, r_{31}) \end{cases}$$

Soluzioni isolate per angoli di Eulero

Soluzioni isolate per $\theta \in (0, \pi)$ e $\theta \in (-\pi, 0)$.



Singularità per angoli di Eulero / $r_{33} = +1$

Se $r_{13}^2 + r_{23}^2 = \sin^2 \theta = 0$ si possono avere due condizioni, ossia $\cos \theta = \pm 1$. In tal caso si guarda l'elemento r_{33} che è proprio il $\cos \theta$.

Se $r_{33} = +1$, allora:

- $\cos \theta = +1$, dunque $\theta = 0$ per entrambe le scelte.

In questo caso gli elementi r_{11} ed r_{21} valgono, rispettivamente,

$$r_{11} = c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\psi = c_{\varphi+\psi}$$

$$r_{21} = s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\psi = s_{\varphi+\psi} = -r_{12}$$

In tal caso si riesce pertanto a determinare solo

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \varphi + \psi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) = \text{atan2}(-r_{12}, r_{11}). \end{cases}$$

Singularità per angoli di Eulero / $r_{33} = -1$

Se $r_{13}^2 + r_{23}^2 = \sin^2 \theta = 0$ si possono avere due condizioni, ossia $\cos \theta = \pm 1$. In tal caso si guarda l'elemento r_{33} che è proprio il $\cos \theta$.

Se $r_{33} = -1$, allora $\cos \theta = -1$, dunque

- $\theta = \pi$ nel primo caso;
- $\theta = -\pi$ nel secondo.

In questo caso gli elementi r_{11} ed r_{21} valgono, rispettivamente,

$$r_{11} = -c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\psi = -c_{\varphi-\psi}$$

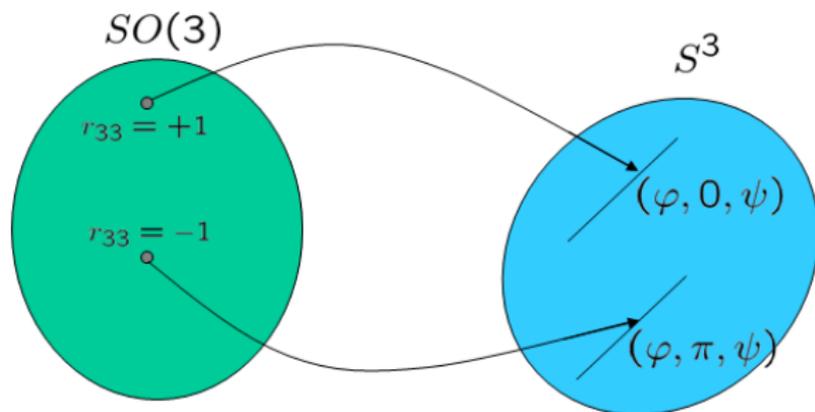
$$r_{21} = -s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\psi = -s_{\varphi-\psi} = r_{12}$$

In tal caso si riesce pertanto a determinare solo

$$\begin{cases} \theta = \pi \text{ o } -\pi \\ \varphi - \psi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) = \text{atan2}(r_{12}, r_{11}). \end{cases}$$

Singularità di rappresentazione per angoli di Eulero

Singularità per la scelta $\theta \in (0, \pi)$.



Formalizzazione del pb. di parametrizzazione di $SO(3)$

Il problema di determinare gli angoli di Eulero corrispondenti ad una matrice di rotazione $R \in SO(3)$, può essere espresso in modo *formale* come la definizione di una carta (chart) su un certo aperto $U \subset SO(3)$.

Come si è visto, una sola carta non può ricoprire completamente $SO(3)$.

Infatti:

- per $r_{33} = 1$, si ha $\theta = 0$ sia che $\theta \in (0, \pi)$ o che $\theta \in (-\pi, 0)$, e si determina solo $(\varphi + \psi)$;
- per $r_{33} = -1$, si ha $\theta = \pi$ (se $\theta \in (0, \pi)$) o si ha $\theta = -\pi$ (se $\theta \in (-\pi, 0)$) e si determina solo $(\varphi - \psi)$.

Dunque, per definire una carta impiegando gli angoli di Eulero, occorre definire l'aperto

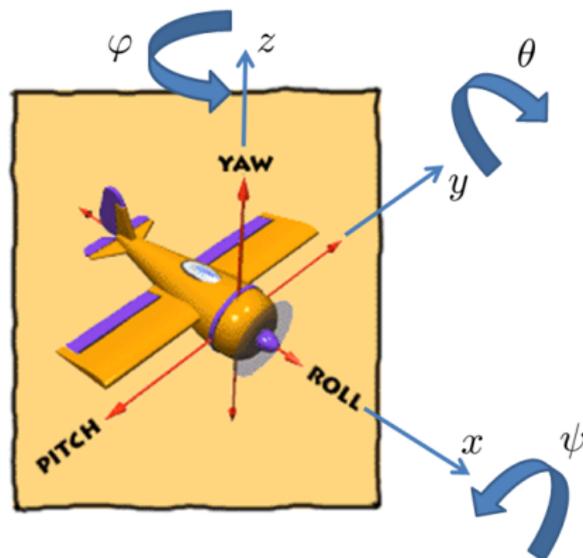
$$U = \{R \in SO(3) \mid r_{33} \notin \{-1, 1\}\}$$

e definire la carta Φ tale che

$$\Phi(R) \mapsto [\varphi(R), \theta(R), \psi(R)]^T \in S^3$$

Angoli di Roll, Pitch, Yaw

Parametrizzazione mediante angoli di Roll, Pitch e Yaw.



Angoli di Roll, Pitch, Yaw

La determinazione degli angoli di Roll, Pitch, Yaw, (rollio, beccheggio, imbardata) sequenza (ZYX), a partire da una matrice $R \in SO(3)$, avviene nel modo seguente.

Assegnata

$$R = [r_1 \ r_2 \ r_3] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

si cerca di determinare (se possibile) la terna (φ, θ, ψ) tale che $R = R_{ZYX}(\varphi, \theta, \psi)$.

La $R_{ZYX}(\varphi, \theta, \psi)$ risulta

$$R_z(\varphi)R_y(\theta)R_x(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & -s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\theta s_\psi & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi \\ s_\varphi c_\theta & c_\varphi c_\psi + s_\varphi s_\theta s_\psi & -c_\varphi s_\psi + s_\varphi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

Soluzioni isolate per angoli di Roll, Pitch, Yaw

Se $r_{11}^2 + r_{21}^2 = \cos^2 \theta \neq 0$ si possono avere due soluzioni isolate:

- Se definiamo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, ($\cos \theta > 0$) si ha la soluzione

$$\begin{cases} \varphi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \theta = \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33}) \end{cases}$$

- Se definiamo $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$, ($\cos \theta < 0$) si ha la soluzione

$$\begin{cases} \varphi = \text{atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \theta = \text{atan2}(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi = \text{atan2}(-r_{32}, -r_{33}) \end{cases}$$

Singularità per angoli Roll, Pitch, Yaw

Se $r_{11}^2 + r_{21}^2 = \cos^2 \theta = 0$ si possono avere due condizioni, ossia $\sin \theta = \pm 1$.
 In tal caso si guarda l'elemento r_{31} che è proprio il $-\sin \theta$.

- Se $r_{31} = -1$, allora $\sin \theta = 1$, dunque $\theta = \pi/2$ in entrambi i casi.

In questo caso gli elementi r_{23} ed r_{13} valgono, rispettivamente,

$$r_{23} = s_\varphi c_\psi - c_\varphi s_\psi = s_{\varphi-\psi}$$

$$r_{13} = c_\varphi c_\psi + s_\varphi s_\psi = c_{\varphi-\psi}$$

In tal caso si riesce pertanto a determinare solo

$$\begin{cases} \theta = \pi/2 \\ \varphi - \psi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13}). \end{cases}$$

Singularità per angoli Roll, Pitch, Yaw

Se $r_{11}^2 + r_{21}^2 = \cos^2 \theta = 0$ si possono avere due condizioni, ossia $\sin \theta = \pm 1$.
In tal caso si guarda l'elemento r_{31} che è proprio il $-\sin \theta$.

- Se $r_{31} = +1$, allora $\sin \theta = -1$, dunque $\theta = -\pi/2$ nel primo caso, $\theta = 3\pi/2$ nel secondo.

In questo caso gli elementi r_{23} ed r_{13} valgono, rispettivamente,

$$r_{23} = -s_\varphi c_\psi - c_\varphi s_\psi = -s_{\varphi+\psi}$$

$$r_{13} = -c_\varphi c_\psi + s_\varphi s_\psi = -c_{\varphi+\psi}$$

In tal caso si riesce pertanto a determinare solo

$$\begin{cases} \theta = -\pi/2 \text{ o } 3\pi/2 \\ \varphi + \psi = \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13}). \end{cases}$$

Asse/angolo

Un'altra rappresentazione **minima** dell'orientamento può ottenersi ricorrendo a 4 parametri (più 1 eq.ne di vincolo) che esprimono la rotazione attorno ad un asse dello spazio di un certo angolo.

Tale rappresentazione può risultare vantaggiosa nel problema della generazione di traiettorie per l'orientamento dell'organo terminale di un manipolatore.

Sia ω il *versore* dell'asse attorno a cui si ruota e θ l'*angolo* di cui si ruota.

La matrice di rotazione attorno ad un asse fisso può essere ottenuta per combinazioni elementari come segue.

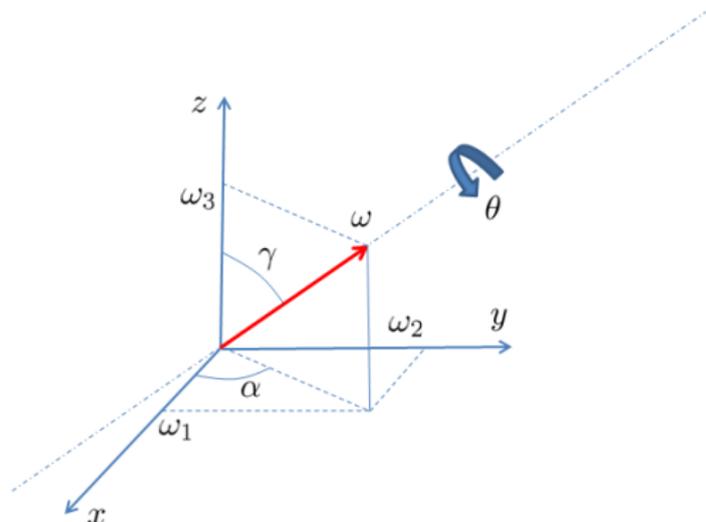
Siano (α, β, γ) gli angoli formati dalle proiezioni di ω con gli assi cartesiani.

Possiamo scrivere

$$R_{\omega}(\theta) = R_z(\alpha)R_y(\gamma)R_z(\theta)R_y(-\gamma)R_z(-\alpha)$$

Asse/angolo

$$R_{\omega}(\theta) = R_z(\alpha)R_y(\gamma)R_z(\theta)R_y(-\gamma)R_z(-\alpha)$$



Asse/angolo

La soluzione precedente si basa sull'idea di ruotare il versore ω dell'angolo necessario a sovrapporlo sull'asse z , effettuare la rotazione dell'angolo θ che a questo punto è facilmente descrivibile in termini di rotazioni elementari, ed infine riportare il versore nella direzione iniziale.

In dettaglio, la successione delle diverse rotazioni, da effettuare sempre rispetto ad assi di terna fissa, è la seguente:

- sovrapposizione di ω su z , come successione di rotazione di $-\alpha$ intorno a z e di $-\gamma$ intorno a y
- rotazione di θ intorno a z
- ripristino dell'orientamento iniziale di ω , come successione di rotazione di γ intorno a y e rotazione di α intorno a z .

In sintesi, di nuovo:

$$R_\omega(\theta) = R_z(\alpha)R_y(\gamma)R_z(\theta)R_y(-\gamma)R_z(-\alpha)$$

Asse/angolo - forma matriciale esplicita

Dalle componenti del versore ω si possono estrarre le funzioni trascendenti necessarie al calcolo della matrice di rotazione, in modo da eliminare la dipendenza esplicita da α e γ ; riconoscendo che

$$s_\alpha = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}; \quad c_\alpha = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}; \quad s_\gamma = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}; \quad c_\gamma = \omega_3$$

Ponendo $c_\theta = c_\theta$, $s_\theta = s_\theta$ e $v_\theta = (1 - c_\theta)$, la matrice di rotazione corrispondente ad una descrizione asse/angolo risulta dunque:

$$R_\omega(\theta) = \begin{bmatrix} \omega_1^2 v_\theta + c_\theta & \omega_1 \omega_2 v_\theta - \omega_3 s_\theta & \omega_1 \omega_3 v_\theta + \omega_2 s_\theta \\ \omega_1 \omega_2 v_\theta + \omega_3 s_\theta & \omega_2^2 v_\theta + c_\theta & \omega_2 \omega_3 v_\theta - \omega_1 s_\theta \\ \omega_1 \omega_3 v_\theta - \omega_2 s_\theta & \omega_2 \omega_3 v_\theta + \omega_1 s_\theta & \omega_3^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix}$$

Per tale matrice vale la proprietà $R_{-\omega}(-\theta) = R_\omega(\theta)$, che mostra come tale rappresentazione non sia univoca poiché una rotazione di $-\theta$ intorno a $-\omega$ produce gli stessi effetti di una rotazione di θ intorno a ω .

Asse/angolo - problema inverso

Se è di interesse il problema inverso di individuare asse ed angolo di rotazione connessi ad una generica matrice di rotazione

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

può essere utile il seguente risultato che discende direttamente dall'ispezione degli elementi di $R_\omega(\theta)$ valido per $\sin \theta \neq 0$:

$$\theta = \arccos \left[\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right] = \arccos \left[\frac{\text{tr}(R) - 1}{2} \right];$$

$$\omega = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Asse/angolo - singolarità di rappresentazione

Nel caso in cui $\sin \theta = 0$, la formula per il calcolo del versore ω dell'asse di rotazione perde di significato.

Per risolvere il problema inverso è necessario riferirsi direttamente alle espressioni particolari assunte dalla matrice di rotazione R ed individuare le formule risolutive nei due casi $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Si noti in particolare che per $\theta = 0$ (rotazione nulla) il versore ω è arbitrario, ossia si ha una singolarità.

Asse/angolo - Notazione esponenziale

La notazione esponenziale per le rotazioni può essere vista come una generalizzazione al caso 3D della notazione complessa usata per indicare rotazioni planari. In quel caso si ha che una rotazione $R \in SO(2)$ può essere espressa, identificando \mathbb{R}^2 col piano complesso, con la notazione

$$g_R(p) = Rp = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta \\ s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} p \quad \Leftrightarrow \quad e^{j\theta} \hat{p}, \quad \hat{p} = x + jy$$

L'esponente usato è un numero immaginario puro, cioè un numero complesso tale che il suo Hermitiano (il trasposto coniugato) è identico a se stesso:

$$j\theta = -(j\theta)^H.$$

Tale notazione si generalizza ponendo $R = e^{\hat{\Theta}}$, con $\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ antisimmetrica (*skew-symmetric*), quindi tale che $\hat{\Theta}^H = -\hat{\Theta}$.

Secondo la definizione di esponenziale di matrice, si ha:

$$e^{\hat{\Theta}} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\hat{\Theta}^i}{i!} = I + \hat{\Theta} + \frac{\hat{\Theta}^2}{2!} + \frac{\hat{\Theta}^3}{3!} + \dots$$

Asse/angolo - Notazione esponenziale

La matrice antisimmetrica $\hat{\Theta}$ è caratterizzata da tre soli parametri indipendenti, che possiamo estrarre in un vettore $\Theta = \hat{\Theta}^\vee$, introducendo l'operatore " \vee ", che è l'inverso di quello introdotto per la notazione matriciale dei prodotti vettoriali:

$$\hat{\Omega}^\vee = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_a & \Omega_b \\ -\Omega_a & 0 & \Omega_c \\ -\Omega_b & -\Omega_c & 0 \end{bmatrix}^\vee = \begin{bmatrix} -\Omega_c \\ \Omega_b \\ -\Omega_a \end{bmatrix}$$

Ponendo $\hat{\Omega} = \hat{\omega} \theta$, con θ uno scalare tale che $\hat{\omega}^\vee$ abbia norma unitaria, si ha:

$$\hat{\omega} = -\hat{\omega}^T; \hat{\omega}^2 = \omega\omega^T - I; \hat{\omega}^3 = -\hat{\omega};$$

da cui si calcolano ricorsivamente le seguenti espressioni

$$\hat{\omega}^{(2k+1)} = (-1)^k \hat{\omega}; \hat{\omega}^{2k} = (-1)^k (I - \omega\omega^T), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Asse/angolo - Notazione esponenziale

Applicando tali relazioni ricorsivamente, la sommatoria che definisce l'esponenziale di matrice può essere valutata concisamente, e si ottiene

$$e^{\hat{\omega}\theta} = I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \hat{\omega} + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \dots \right) \hat{\omega}^2$$

Da cui si riconosce:

$$R_{\omega}(\theta) = e^{\hat{\omega}\theta} = I + \hat{\omega} \sin \theta + \hat{\omega}^2 (1 - \cos \theta)$$

E' facile verificare che $e^{\hat{\omega}\theta} \in SO(3)$, infatti

$$\begin{cases} (e^{\hat{\omega}\theta})^T &= e^{\hat{\omega}^T \theta} = e^{-\hat{\omega}\theta} = (e^{\hat{\omega}\theta})^{-1} \\ \det(e^{\hat{\omega}\theta}) &= 1, \text{ per } \theta = 0, \text{ da cui, per continuità } \det(e^{\hat{\omega}\theta}) = 1, \forall \theta \end{cases}$$

Asse/angolo - Notazione esponenziale

Naturalmente svolgendo i calcoli si ottiene l'espressione già vista in precedenza:

$$e^{\hat{\omega}\theta} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 v_\theta + c_\theta & \omega_1 \omega_2 v_\theta - \omega_3 s_\theta & \omega_1 \omega_3 v_\theta + \omega_2 s_\theta \\ \omega_1 \omega_2 v_\theta + \omega_3 s_\theta & \omega_2^2 v_\theta + c_\theta & \omega_2 \omega_3 v_\theta - \omega_1 s_\theta \\ \omega_1 \omega_3 v_\theta - \omega_2 s_\theta & \omega_2 \omega_3 v_\theta + \omega_1 s_\theta & \omega_3^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix}$$

dove si è posto $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$ e $v_\theta = (1 - \cos \theta)$.

Una espressione alternativa risulta data da:

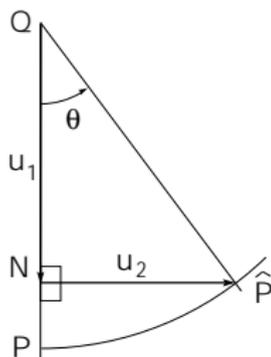
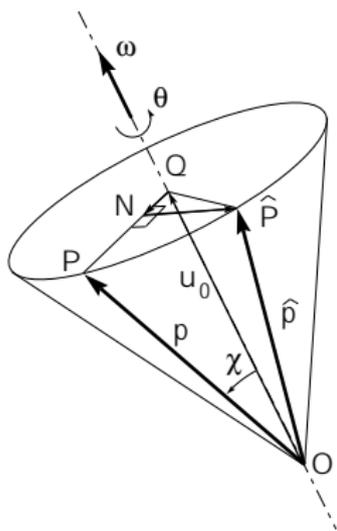
$$e^{\hat{\omega}\theta} = I + \hat{\omega} \sin \theta + (\omega \omega^T - I)(1 - \cos \theta)$$

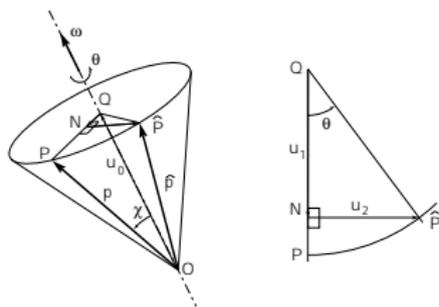
E' interessante notare (e tale proprietà è stata sfruttata ampiamente in precedenza) che $\text{Im}(\omega \omega^T) \equiv \ker(\hat{\omega})$, da cui $\hat{\omega}(\omega \omega^T) = 0$.

Asse/angolo - Costruzione *tutta* geometrica

La rotazione che porta il vettore $p = OP$ sul vettore $\hat{p} = O\hat{P}$ può essere costruita geometricamente nel modo seguente:

$$\hat{p} = O\hat{P} = OQ + QN + N\hat{P} = u_0 + u_1 + u_2$$



Asse/angolo - Costruzione *tutta* geometrica (continua)

dove:

$$OQ = u_0 = (\omega\omega^T) p, \quad QP = OP - OQ = p - (\omega\omega^T) p,$$

$$QN = u_1 = [p - (\omega\omega^T) p] \cos \theta = [I - (\omega\omega^T)] \cos \theta p,$$

$$N\hat{P} = u_2 = \omega \times [p - (\omega\omega^T) p] \sin \theta = \hat{\omega} \sin \theta p$$

Da cui:

$$\hat{p} = \left((\omega\omega^T) + [I - \omega\omega^T] \cos \theta + \hat{\omega} \sin \theta \right) p = R_\omega(\theta) p$$



Asse/angolo - Notazione esponenziale - problema inverso

La soluzione del problema inverso nel vettore delle coordinate esponenziali $\omega\theta$ (se $R \neq I$, con θ definito a meno del segno), come visto in precedenza, risulta

$$\theta = \operatorname{acos} \left[\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right] = \operatorname{acos} \left[\frac{\operatorname{tr}(R) - 1}{2} \right];$$

$$\omega = \hat{\omega}^\vee = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Tale risultato, ossia che compaia la $\operatorname{tr}(R)$ e la simmetria degli indici nel successivo calcolo di ω , non è una fortunata coincidenza.

È infatti legato a delle proprietà delle matrici che si conservano indipendentemente dal sistema di riferimento in cui ne vengono espresse le componenti, ossia gli *invarianti lineari*.

Invarianti lineari di una matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Data una qualsiasi matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, la sua decomposizione *Cartesiana*, consiste nella somma della sua parte simmetrica A_S ed antisimmetrica A_{SS} , definite come

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A_S + A_{SS}$$

Gli invarianti lineari di nostro interesse sono costituiti da:

- il vettore $a = \text{vect}(A) = (A_{SS})^\vee$ della matrice, tale che $a \times v = A_{SS} v$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$
- $\text{tr}(A)$ che equivale a $\text{tr}(A_S)$

Il calcolo esplicito degli invarianti porta alla definizione di

$$a = (A_{SS})^\vee = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix}, \quad \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Invarianti lineari di una matrice $R \in SO(3)$

Applicando la definizione ad una matrice di rotazione $R \in SO(3)$:

$$R_S = \omega\omega^T + \cos\theta(I - \omega\omega^T); \quad R_{SS} = \hat{\omega} \sin\theta$$

Gli invarianti lineari sono quindi costituiti da:

$$\text{vect}(R) = (R_{SS})^\vee = \omega \sin\theta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(R) &= \text{tr}[\omega\omega^T + \cos\theta(I - \omega\omega^T)] = \\ &= \omega^T\omega + \cos\theta(3 - \omega^T\omega) = 1 + 2\cos\theta, \end{aligned}$$

da cui si ricavano le coordinate esponenziali di R

$$\cos\theta = \frac{\text{tr}(R) - 1}{2}, \quad \omega = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix}$$

Alcune considerazioni sulla notazione esponenziale

Le coordinate esponenziali sono da considerarsi minime, anche se si utilizzano 4 parametri, perché esiste la condizione di vincolo $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1$. In quanto rappresentazione minima, soffre anch'essa di singolarità. La indeterminazione del segno di θ , fa sì che ad una stessa rotazione corrispondano due distinte soluzioni, ossia (ω, θ) e $(-\omega, -\theta)$. Inoltre, se $R = I$, $\theta = 0$ e ω è indefinito (può assumere qualsiasi valore). Tale problema è rilevante in pratica per θ “piccoli”, che portano a malcondizionamenti numerici nel calcolo di ω . Con tale notazione tuttavia è comodo esprimere in modo compatto la rotazione che porta una terna (i^0, j^0, k^0) in (i^1, j^1, k^1) . Vale il *lemma dei versori*, cioè

$$i^{0T} i^1 + j^{0T} j^1 + k^{0T} k^1 = 1 + 2 \cos \theta$$

$$i^0 \times i^1 + j^0 \times j^1 + k^0 \times k^1 = 2\omega \sin \theta$$

La $R_\omega(\theta)$ che ne risulta rappresenta la 0R_1 , ovvero la ${}^0R^{(1 \leftarrow 0)}$.

Interpretazione della notazione esponenziale

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno all'origine con velocità angolare **costante** $\omega \in \mathbb{R}^3$. La velocità di un suo generico punto è data da

$$\dot{p} = \omega \times p = \hat{\omega}p$$

Questa, è una equazione differenziale ordinaria lineare a coeff. costanti in $p(t)$, la cui soluzione è data da

$$p(t) = e^{\hat{\omega}t} p(t_0).$$

Attenzione al fatto che, se $\|\omega\| \neq 1$, si ha

$$e^{\hat{\omega}t} = I + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|} \sin(\|\omega\|t) + \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^2} (1 - \cos(\|\omega\|t)).$$

Rappresentazione con Quaternione Unitario

Abbiamo visto che le rappresentazioni minime introducono una singolarità di rappresentazione, nella quale si perde la biunivocità della rappresentazione stessa. In effetti, il problema è intrinseco alla **topologia della varietà** $SO(3)$, che non è rappresentabile con un'unica mappa globale su \mathbb{R}^3 . Un pò come non è possibile definire una carta coordinata esente da singolarità sulla superficie di una sfera.

Le singolarità di rappresentazione, come abbiamo osservato, sono indesiderabili soprattutto perché algoritmi numerici applicati nei dintorni di una singolarità danno spesso spesso luogo a malcondizionamenti ed errori numerici. Abbiamo anche osservato come una rappresentazione a quattro parametri legata alla notazione esponenziale, non sia essa stessa immune da singolarità.

E' però possibile ottenere una rappresentazione globale di $SO(3)$ con quattro parametri, usando i *quaternioni unitari* (le cui componenti sono i cosiddetti parametri di Eulero).

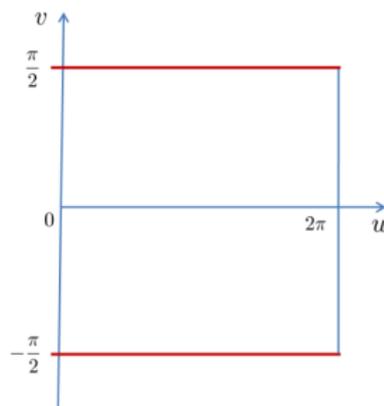
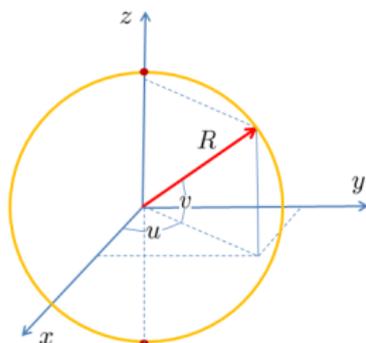
Singularità della parametrizzazione di una sfera

Esempio di parametrizzazione di una sfera:

$$x(u, v) = R \cos v \cos u; \quad y(u, v) = R \cos v \sin u; \quad z(v) = R \sin v$$

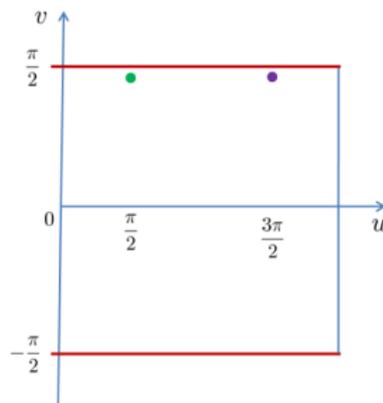
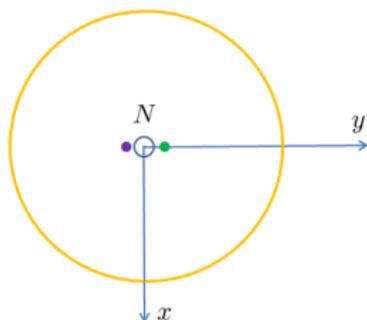
Punti interni alla sfera sono mappati 1 a 1 (one-to-one) sulla superficie della sfera.

Sui bordi invece, per $u = \pm\pi/2$, tutti i punti dei segmenti nel piano (u, v) vanno, rispettivamente, nel polo Nord e nel polo Sud.



Malcondizionamento nelle vicinanze di una singolarità

Se si considerano due punti molto vicini al polo Nord (N) (punto di singolarità della parametrizzazione), si vede che i loro corrispondenti sul dominio (u, v) possono essere anche molto lontani fra loro, causando la nascita di instabilità nel momento in cui si cerca di risolvere il problema inverso. Infatti, del rumore numerico sulla posizione del punto sulla sfera può causare instabilità della soluzione in termini di coordinate parametriche.



Rappresentazione con Quaternione Unitario

Un quaternione può essere considerato la generalizzazione di un numero complesso, ed è definito come

$$\mathcal{Q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = (q_0, \mathbf{q}), \quad q_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \dots, 3$$

dove q_0 è la componente *scalare* di \mathcal{Q} e $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ è la sua componente *vettoriale*. L'insieme dei quaternioni \mathbb{Q} è uno spazio vettoriale 4-dimensionale sui reali e forma un gruppo rispetto alla moltiplicazione fra quaternioni, identificata da “ \cdot ”. La moltiplicazione è distributiva ed associativa, ma *non commutativa*; inoltre soddisfa le relazioni

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j};$$

Si definisce il coniugato di un quaternione \mathcal{Q} il quaternione $\mathcal{Q}^* = (q_0, -\mathbf{q})$ ed il modulo di un quaternione verifica

$$\|\mathcal{Q}\|^2 = \mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}^* = (q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q}, \mathbf{0}) = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \mathbf{0}).$$

Proprietà dei quaternioni unitari

E' semplice verificare che l'inverso di un quaternione è $Q^{-1} = Q^* / \|Q\|^2$ e che $Q = (1, \mathbf{0})$ è l'identità per l'operazione di moltiplicazione.

Dati due quaternioni $Q = (q_0, \mathbf{q})$ e $P = (p_0, \mathbf{p})$, si dimostra che il prodotto fra i quaternioni può essere effettuato come

$$Q \cdot P = (q_0 p_0 - \mathbf{q}^T \mathbf{p}, q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p})$$

Tale regola elimina la necessità di usare direttamente le regole moltiplicative fornite precedentemente.

Un quaternione unitario è un quaternione per cui $\|Q\| = 1$. Per i quaternioni unitari l'inverso è uguale al coniugato, ossia $Q^{-1} = Q^*$. I quaternioni unitari formano anch'essi un sottogruppo e si dimostra che esiste una *relazione biunivoca* fra i quaternioni unitari e le matrici di $SO(3)$.

Legame con rappresentazione asse/angolo

Assegnata una matrice di rotazione $R = e^{\hat{\omega}\theta}$, possiamo associargli un quaternionio unitario definito da

$$Q_R = (\cos(\theta/2), \boldsymbol{\omega} \sin(\theta/2))$$

Si noti che una rotazione di $-\theta$ attorno a $-\boldsymbol{\omega}$ fornisce lo stesso quaternionio che la rotazione di θ intorno a $\boldsymbol{\omega}$, risolvendo così la singolarità di rappresentazione della notazione asse/angolo.

Viceversa, dato un quaternionio unitario $Q = (q_0, \mathbf{q})$, gli associamo una rotazione $R = e^{\hat{\omega}\theta}$ ponendo

$$\theta = 2 \arccos q_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \hat{\omega}^\vee = \begin{cases} \frac{1}{\sin(\theta/2)} \mathbf{q}, & \text{se } \theta \neq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre, date due matrici di rotazione R_1 ed R_2 ed i rispettivi quaternioni associati Q_{R_1} e Q_{R_2} , si ha

$$Q_{R_1} \cdot Q_{R_2} = Q_{R_1 R_2},$$

il prodotto fra q.'s corrisponde a quello fra le matrici di $SO(3)$.



Forma matriciale del q.u. (parametri di Eulero)

La matrice di rotazione corrispondente ad una descrizione in termini di quaternioni risulta, applicando la forma asse/angolo,

$$R(q_0, \mathbf{q}) = I + 2\hat{\mathbf{q}}(q_0I + \hat{\mathbf{q}}), \quad \text{con } \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^\wedge$$

che in forma esplicita risulta

$$R(q_0, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}$$

Può inoltre essere utile il seguente risultato

$$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\text{tr}(R) + 1}$$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{sgn}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \text{sgn}(r_{21} - r_{12}) \sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix}, \quad \text{con } \theta \in [-\pi, \pi]$$

Rotazione mediante algebra dei q.u.

La moltiplicazione fra quaternioni può essere impiegata direttamente per effettuare la rotazione di un punto da una configurazione iniziale $\{0\}$ ad una configurazione finale $\{1\}$ senza la necessità di impiegare la matrice di rotazione.

Procedura:

- Il punto ${}^0p^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, che deve essere ruotato, è rappresentato mediante un quaternionione con parte scalare nulla e parte vettoriale uguale alle coordinate cartesiane del punto stesso, ossia ${}^0\mathcal{P}^0 = (0, {}^0p^0)$;
- Il quaternionione che rappresenta la rotazione dalla configurazione $\{0\}$ alla configurazione $\{1\}$ è espresso da 0Q_1 ;
- Le coordinate del punto nella nuova configurazione, ossia ${}^0p^1$, si ottengono come parte vettoriale del quaternionione ${}^0\mathcal{P}^1 = (0, {}^0p^1)$ risultato della seguente operazione:

$${}^0\mathcal{P}^1 = {}^0Q_1 \cdot {}^0\mathcal{P}^0 \cdot ({}^0Q_1)^*$$

Interpolazione fra pose mediante quaternioni unitari

I quaternioni sono molto comodi per l'interpolazione fra due configurazioni successive di un corpo rigido. In particolare, se \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono quaternioni rappresentativi di due posizioni, con angolo compreso θ , le posizioni intermedie possono essere espresse in funzione del parametro $t \in [0, 1]$ mediante interpolazione lineare come

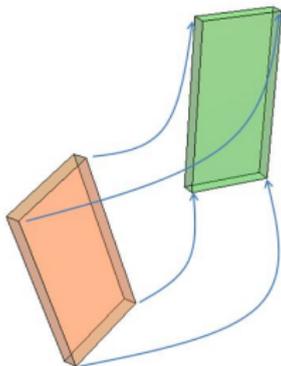
$$s(t; \mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \frac{\sin[\frac{\theta}{2}(1-t)]\mathcal{P} + \sin[\frac{\theta}{2}t]\mathcal{Q}}{\sin[\frac{\theta}{2}]}$$

La $s(t; \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ viene definita "SLERP", ossia *Spherical LinEaR interPolation*. Se \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono pensato come due punti sulla sfera unitaria in \mathbb{R}^4 , la formula precedente fornisce una parametrizzazione della geodetica che li unisce, ossia del tratto di circonferenza massima che li unisce. E' importante notare che campionamento uniforme di t in $[0, 1]$, fornisce punti sulla sfera (quaternioni) equispaziati sull'arco.

Esempio: interpolazione fra 2 pose

Sono date due pose di un corpo rigido caratterizzate, es. con angoli di Eulero ZYZ, da:

- posa 1: $R_{zyz}(\varphi_i, \theta_i, \psi_i)$
- posa 2: $R_{zyz}(\varphi_f, \theta_f, \psi_f)$



Come determinare le pose intermedie?

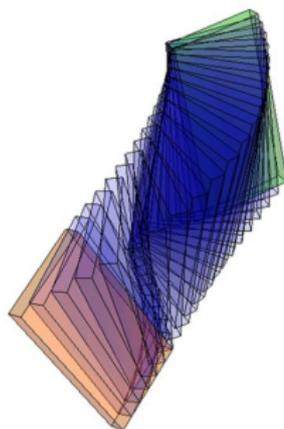
Due soluzioni

Due soluzioni possibili sono:

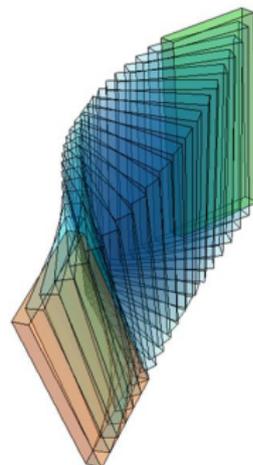
- Interpolare linearmente negli angoli di Eulero, cosicchè:

$$\theta(t) = (1 - t)\theta_i + t\theta_f, \dots ; \quad R(t) = R_{zyz}(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)), \quad t \in [0, 1]$$

- Impiegare la SLERP secondo la logica vista (risultato “naturale”)



Eulero



SLERP

