Compito di Robotica I – 01 Aprile 2011

1) La Figura 1 mostra lo schema cinematico di un veicolo dotato di due ruote anteriori con direzione fissa rispetto allo chassis e di una ruota posteriore pivottante. Le ruote anteriori sono attuate indipendentemente l'una dall'altra mediante i motori M_1 ed M_2, mentre la ruota posteriore pivottante è non attuata. Il vincolo fra ruote e pavimento è di puro rotolamento. Si indichi con C il baricentro della piastra triangolare (di massa m) che costituisce lo chassis del veicolo, e si assuma che il sistema di riferimento $\{C\}$ di versori $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$ sia principale d'inerzia, con tensore d'inerzia $\mathfrak{I} = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$. Si trascuri la massa e l'inerzia rotazionale di tutti gli altri componenti del veicolo. Con riferimento alle grandezze introdotte in Figura 1 si risponda ai seguenti quesiti:

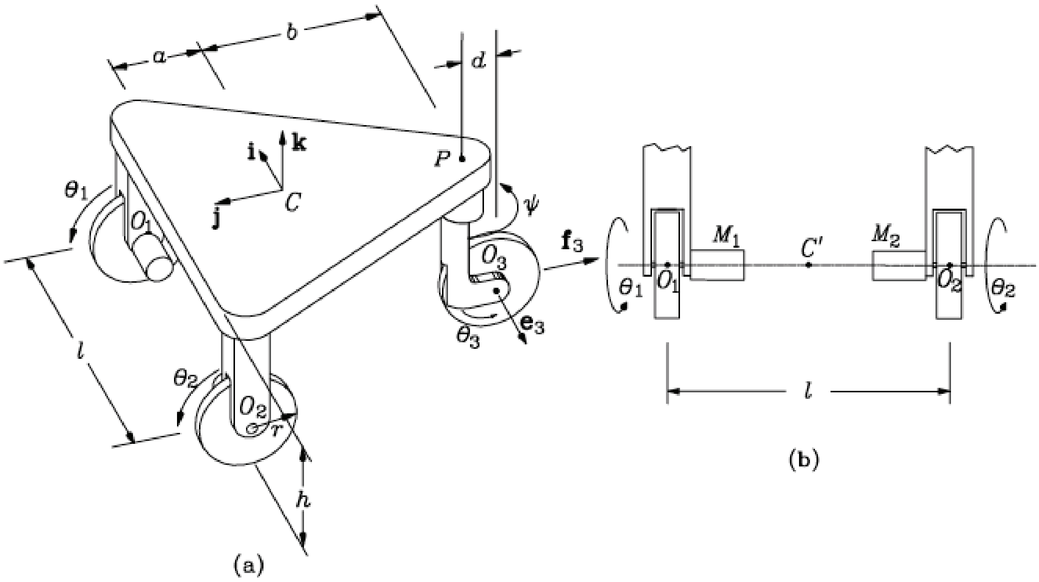


Figura 1: Veicolo. (a) layout generale; (b) dettaglio delle ruote attuate non pivottanti

(i) si rendano in forma esplicita le relazioni che legano le velocità angolari $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ dei motori alla velocità di imbardata ω_z del veicolo ed alla velocità di avanzamento del veicolo v_y in direzione $\boldsymbol{j}$; (ii) si rendano in forma esplicita le relazioni che intercorrono fra $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ e le velocità angolari $\dot{\theta}_3$ e $\dot{\psi}$ relative alla ruota posteriore pivottante; (iii) indicando con τ_1 e τ_2 le coppie (interne) applicate dai motori alle ruote anteriori, si scrivano le equazioni di moto del veicolo.

2) Si descriva in modo dettagliato l'algoritmo che consente di applicare la convenzione di Denavit-Hartenberg (D-H) alla parametrizzazione di una catena cinematica seriale generica. Per meglio illustrarne la piena comprensione da parte del candidato, la si applichi nello specifico al manipolatore seriale riportato in Figura 2 disegnando tutti i sistemi di riferimento introdotti e riportando chiaramente la tabella di D-H.

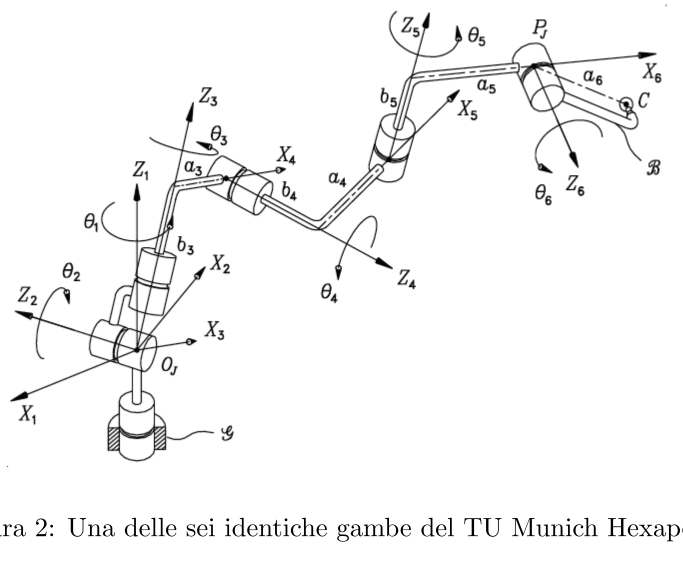


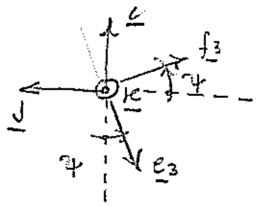
Figura 2: Una delle sei identiche gambe del TU Munich Hexapod.

Soluzione compito Robotica I del 1.4.2011

Esercizio 1

Consideriamo la ruota 1. Il suo twist scritto rispetto al polo O_1 vale:

$$\underline{\xi}^1_{O_1} = \begin{bmatrix} \underline{v}^1_{O_1} \\ \underline{\omega}^1_1 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \underline{v}^1_{O_1} = \dot\theta_1 r \underline{j} \; ; \; \underline{\omega}_1 = -\dot\theta_1 \underline{i} + \omega^4_z \underline{k}$$



Se invece considero il twist della ruota 2 rispetto al polo O_2 si ha:

$$\underline{\xi}^2_{O_2} = \begin{bmatrix} \underline{v}^2_{O_2} \\ \underline{\omega}^2_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \underline{v}^2_{O_2} = \dot\theta_2 r \underline{j} \; ; \; \underline{\omega}_2 = -\dot\theta_2 \underline{i} + \omega^4_z \underline{k}$$

n.b. che ψ è angolo relativo

Ma i punti O_1 ed O_2 sono anche punti dello chassis corpo 4, da cui:

$$\underbrace{\underline{v}_{O_2}}_{\dot\theta_2 r \underline{j}} = \underbrace{\underline{v}_{O_1}}_{\dot\theta_1 r \underline{j}} + \omega^4_z \underbrace{\underline{k} \times \overbrace{O_1O_2}^{-e\,\underline{i}}}_{-e\,\underline{j}} \longrightarrow \dot\theta_2 r \underline{j} = \dot\theta_1 r \underline{j} - \omega^4_z e \underline{j} \qquad (1)$$

moltiplicando (1) scalarmente per $\underline{j}$ ottengo:

$$(\dot\theta_1 - \dot\theta_2) r = \omega^4_z e$$

$$\boxed{\omega^4_z = \frac{r}{e}(\dot\theta_1 - \dot\theta_2)}$$

relazione fra la velocità di imbardata dello chassis e le velocità angolari delle ruote

A questo punto, nota la ω^4_z, la velocità del baricentro C può essere scritta come

pto. medio su assale anteriore

$$\underline{v}_C = \underline{v}_{O_2} + \omega^4_z \underline{k} \times O_2C \qquad \text{dove} \quad O_2C = O_2M + MC' + C'C$$

proiezione su piano orizz. alla quota dell'assale di C

$$O_2M = \frac{L}{2}\underline{i} \; ; \quad MC' = -a\underline{j} \; ; \quad C'C = h\underline{k}$$

$$\omega^4_z \underline{k} \times O_2C = \omega^4_z \underline{k} \times O_2C' = \omega^4_z \underline{k} \times \left(\frac{L}{2}\underline{i} - a\underline{j}\right) = \omega^4_z \frac{L}{2}\underline{j} + \omega^4_z a \underline{i}$$
$$= \omega^4_z \left(a\underline{i} + \frac{L}{2}\underline{j}\right)$$

Allora

$$\underline{v}_c = \dot\theta_2 r \underline{j} + \frac{r}{e}(\dot\theta_1 - \dot\theta_2)\left(a\underline{i} + \frac{L}{2}\underline{j}\right) = \dot\theta_2 r \underline{j} + \frac{ar}{e}\dot\theta_1 \underline{i} + \frac{r}{2}\dot\theta_1 \underline{j} +$$
$$- \frac{ar}{e}\dot\theta_2 \underline{i} - \frac{r}{2}\dot\theta_2 \underline{j} = \left(\frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j}\right)\dot\theta_1 + \left(-\frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j}\right)\dot\theta_2$$

Dunque il twist ridotto del moto piano eseguito dallo chassis risulta:

$$\underline{\xi}^4_C = \begin{bmatrix} \underline{v}^4_C \\ \hline \omega^4_z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \left[\frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j}\right] & \left[-\frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j}\right] \\ \hline r/e & -r/e \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \hline \dot\theta_2 \end{bmatrix} \triangleq \perp \underline{\dot\theta}_a$$

dove $\perp = \begin{bmatrix} \frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j} & -\frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j} \\ r/e & -r/e \end{bmatrix}$ con $\underline{i}$, $\underline{j}$ ancora inespressi in componenti

$$\underline{\dot\theta}_a = \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad \underline{\theta}_a = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$ angoli di rotazione dei giunti attuati

Una volta effettuata questa procedura, la stessa idea è applicata per scrivere la velocità del punto O_3.

Il twist della ruota 3 risulta

$$\xi^3_{O_3} = \begin{bmatrix} \underline{v}^3_{O_3} \\ \underline{\omega}_3 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \underline{v}^3_{O_3} = \dot{\theta}_3 \, r \, (-\underline{f}_3) \; ; \quad \underline{\omega}_3 = \dot{\theta}_3 \, \underline{e}_3 + (\omega^4_z + \dot{\psi}) \, \underline{k}$$

La velocità di $P \in 4$ risulta

$$\underline{v}_P = \underbrace{\underline{v}_c}_{\text{nota}} + \omega^4_z \, \underline{k} \times \underbrace{\underbrace{\underline{CP}}_{-bj}}_{b\,i} = \underline{v}_c + \omega^4_z \, b \, \underline{i} = \underline{v}_c + \frac{rb}{e} \underline{i} \, \dot{\theta}_1 - \frac{rb}{e} \underline{i} \, \dot{\theta}_2$$

Allora

$$\underline{v}_P = \Big[\overbrace{\left(\frac{ar}{e} + \frac{br}{e} \right)}^{\frac{r(a+b)}{e}} \underline{i} + \frac{r}{2} \underline{j} \Big] \dot{\theta}_1 + \Big[\overbrace{\left(-\frac{ar}{e} - \frac{br}{e} \right)}^{-\frac{r(a+b)}{e}} \underline{i} + \frac{r}{2} \underline{j} \Big] \dot{\theta}_2$$

$$= \Big[\frac{r}{e}(a+b) \, \underline{i} + \frac{r}{2} \underline{j} \Big] \dot{\theta}_1 + \Big[-\frac{r}{e} (a+b) \, \underline{i} + \frac{r}{2} \underline{j} \Big] \dot{\theta}_2$$

Considerando il corpo rigido sterzo (corpo 5) si arriva al punto O_3 da P.

$$\underline{v}^5_{O_3} = \underline{v}^5_P + (\omega^4_z + \dot{\psi}) \, \underline{k} \times \underbrace{PO_3}_{(PP' + P'O_3) = (-h\,\underline{k} + d\,\underline{f}_3)} = \underline{v}^5_P + (\omega^4_z + \dot{\psi}) \, \underline{k} \times (d \, \underline{f}_3) = \underline{v}^5_P - (\omega^4_z + \dot{\psi}) \, d \, \underline{e}_3$$

Dunque

$$\underline{v}^3_{O_3} = -\dot{\theta}_3 \, r \, \underline{f}_3 = \frac{r}{e}(a+b) \, \underline{i} \, (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \frac{r}{2} \underline{j} \, (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - (\omega^4_z + \dot{\psi}) \, d \, \underline{e}_3 = \underline{v}^5_{O_3}$$

Se adesso esprimo $\underline{e}_3$ ed $\underline{f}_3$ rispetto a $\underline{i}$ e $\underline{j}$ ottengo:

$$\begin{cases} \underline{e}_3 = -\cos\psi \, \underline{i} - \sin\psi \, \underline{j} \\ \underline{f}_3 = +\sin\psi \, \underline{i} - \cos\psi \, \underline{j} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \underline{e}_3 \cdot \underline{i} = -\cos\psi \; ; \quad \underline{e}_3 \cdot \underline{j} = -\sin\psi \\ \underline{f}_3 \cdot \underline{i} = \sin\psi \; ; \quad \underline{f}_3 \cdot \underline{j} = -\cos\psi \end{array}$$

allora

$$-\dot{\theta}_3 \, r \, (\sin\psi \, \underline{i} - \cos\psi \, \underline{j}) = r \, \frac{(a+b)}{e} \, \underline{i} \, (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \frac{r}{2} \underline{j} \, (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - (\omega^4_z + \dot{\psi}) \, d \cdot (-\cos\psi \, \underline{i} - \sin\psi \, \underline{j})$$

Se divido tutto per d e definisco

$$\frac{r}{d} = \rho \quad ; \quad \frac{a+b}{e} = \alpha \quad \text{ottengo}$$

$$-\dot{\theta}_3 \, \rho \, (\sin\psi \, \underline{i} - \cos\psi \, \underline{j}) = \alpha \, \rho \, \underline{i} \, (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \frac{\rho}{2} \underline{j} \, (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - (\omega^4_z + \dot{\psi}) \, d \cdot (-\cos\psi \, \underline{i} - \sin\psi \, \underline{j})$$

In realtà riparto da la versione con $\underline{e}_3$ ed $\underline{f}_3$ incogniti;
moltip. per $\underline{f}_3 \cdot$ si ha (dato che $\underline{f}_3 \cdot \underline{e}_3 = 0$)

$$-\dot{\theta}_3 \cancel{r} = \cancel{r}\alpha \underbrace{\underline{i}\cdot\underline{f}_3}_{\sin\psi} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \frac{\cancel{r}}{2} \underbrace{\underline{j}\cdot\underline{f}_3}_{-\cos\psi} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

allora

$$-\dot{\theta}_3 = \left(\alpha \sin\psi - \frac{\cos\psi}{2}\right)\dot{\theta}_1 + \left(-\alpha\sin\psi - \frac{\cos\psi}{2}\right)\dot{\theta}_2$$

da cui

$$\dot{\theta}_3 = \left(\frac{\cos\psi}{2} - \alpha\sin\psi\right)\dot{\theta}_1 + \left(\frac{\cos\psi}{2} + \alpha\sin\psi\right)\dot{\theta}_2$$

Invece moltiplicando per $\underline{e}_3 \cdot$ si ha (dato che $\underline{f}_3 \cdot \underline{e}_3 = 0$)

$$0 = r\alpha \underbrace{\underline{i}\cdot\underline{e}_3}_{-\cos\psi} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \frac{r}{2} \underbrace{\underline{j}\cdot\underline{e}_3}_{-\sin\psi} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - (\omega_z^4 + \dot{\psi}) d$$

da cui

$$\underbrace{\frac{r}{d}}_{\rho}\alpha(-\cos\psi)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - \underbrace{\frac{r}{2d}}_{\rho}\sin\psi(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) = (\omega_z^4 + \dot{\psi})$$

$$\alpha\rho(-\cos\psi)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - \frac{\rho}{2}\sin\psi(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \underbrace{\omega_z^4}_{\frac{r}{e}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)} = \dot{\psi}$$

Da cui:

$$\dot{\psi} = \left(-\alpha\rho\cos\psi - \frac{\rho}{2}\sin\psi - \frac{r}{e}\right)\dot{\theta}_1 + \left(\alpha\rho\cos\psi - \frac{\rho}{2}\sin\psi + \frac{r}{e}\right)\dot{\theta}_2$$

ma $\rho = \frac{r}{d}$, se definisco $\delta = \frac{d}{e}$ si ha $\frac{r}{e} = \frac{r}{d}\frac{d}{e} = \rho\delta$ da cui

$$\dot{\psi} = \rho\left[-\alpha\cos\psi - \frac{\sin\psi}{2} - \delta\right]\dot{\theta}_1 + \rho\left[\alpha\cos\psi - \frac{\sin\psi}{2} + \delta\right]\dot{\theta}_2$$

Dunque si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos\psi}{2} - \alpha\sin\psi & \frac{\cos\psi}{2} + \alpha\sin\psi \\ \rho\left[-\alpha c\psi - \frac{s\psi}{2} - \delta\right] & \rho\left[\alpha c\psi - \frac{s\psi}{2} + \delta\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Dunque se chiamo questa matrice M ottengo

$$\dot{\underline{\theta}}_u = M \, \dot{\underline{\theta}}_a \quad \text{dove} \quad \dot{\underline{\theta}}_u = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad e \quad \dot{\underline{\theta}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

veloc. ang. passive (un-actuated) — veloc. ang. attive (actuated)

Dunque ricapitolando

$\underline{\xi}_c^4 \in \mathbb{R}^3$ (twist bidimensionale) $\qquad \underline{\xi}_c^4 = L\,\dot{\underline{\theta}}_a$

$\dot{\theta}_{ie} \in \mathbb{R}^2$ (veloc. angolari non attuate) $\qquad \dot{\underline{\theta}}_e = M\,\dot{\underline{\theta}}_a$

Scriviamo la dinamica del veicolo

Energia potenziale $\quad U = \text{cost} = 0$ se scelgo lo zero alla quota di C

Energia cinetica $\quad T = \frac{1}{2}\,\underline{\xi}_c^{4\,T} D\, \underline{\xi}_c^4 \quad$ dove $D = \left[\begin{array}{cc|c} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_z \end{array}\right]$

ovvero

$$[\dot\theta_1 \,|\, \dot\theta_2] \left[\begin{array}{c|c} \frac{ar}{e}\underline{i}^T + \frac{r}{2}\underline{j}^T & r/e \\ \hline -\frac{ar}{e}\underline{i}^T + \frac{r}{2}\underline{j}^T & -r/e \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} m I_2 & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & I_z \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j} & -\frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j} \\ r/e & -r/e \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \dot\theta_1 \\ \hline \dot\theta_2 \end{array}\right]$$

$$[\dot\theta_1 \,|\, \dot\theta_2] \left[\begin{array}{c|c} \frac{ar}{e}\underline{i}^T + \frac{r}{2}\underline{j}^T & r/e \\ \hline -\frac{ar}{e}\underline{i}^T + \frac{r}{2}\underline{j}^T & -r/e \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} m\left(\frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j}\right) & m\left(-\frac{ar}{e}\underline{i} + \frac{r}{2}\underline{j}\right) \\ \hline I_z \frac{r}{e} & -I_z\frac{r}{e} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \dot\theta_1 \\ \hline \dot\theta_2 \end{array}\right]$$

$$[\dot\theta_1 \,|\, \dot\theta_2] \underbrace{\begin{bmatrix} m\left(\frac{a^2r^2}{e^2} + \frac{r^2}{4}\right) + I_z\frac{r^2}{e^2} & m\left(-\frac{a^2r^2}{e^2} + \frac{r^2}{4}\right) - I_z\frac{r^2}{e^2} \\ m\left(-\frac{a^2r^2}{e^2} + \frac{r^2}{4}\right) - I_z\frac{r^2}{e^2} & m\left(\frac{a^2r^2}{e^2} + \frac{r^2}{4}\right) + I_z\frac{r^2}{e^2} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix}$$

Allora l'energia cinetica è data da

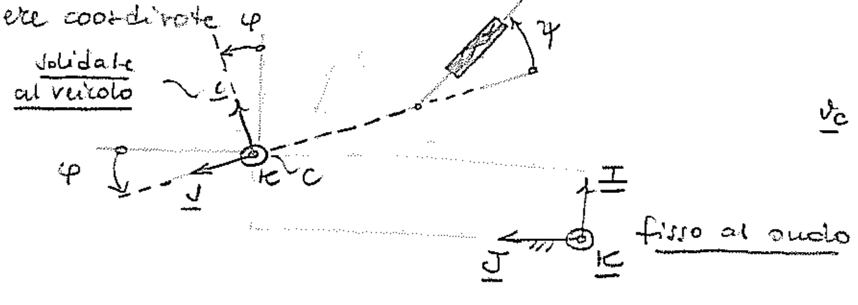
$$T(\dot{\underline{\theta}}_a) = \frac{1}{2}\,\dot{\underline{\theta}}_a^T B\, \dot{\underline{\theta}}_a \qquad \text{con } B = \text{costante (matrice)}$$

La componente Lagrangiana delle forze attive associate a $\underline{\theta}_a$ è $\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$ (banalmente)

Allora eq.ne della dinamica associata alle 2 coordinate Lagrangiane indipendenti θ_1 e θ_2 risulta $\underline{\theta}_a = [\theta_1 \;\; \theta_2]^T$

$$\boxed{B\,\ddot{\underline{\theta}}_a = \underline{\tau}}$$

Se uno poi volesse descrivere la traiettoria del baricentro C, ossia quella la curva che descrive quando il veicolo si muove, basta scrivere $\underline{v}_c$ in fine di vere coordinate φ



$$\underline{v}_c = \dot{x}\,\underline{I} + \dot{y}\,\underline{J}$$

$$\underline{v}_c = \frac{ar}{e}\,\underline{i}\,(\dot\theta_1 - \dot\theta_2) + \frac{r}{2}\,\underline{j}\,(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)$$

Da cui, essendo $\underline{i} = \cos\varphi\, \underline{I} + \sin\varphi\, \underline{J}$

$\underline{j} = -\sin\varphi\, \underline{I} + \cos\varphi\, \underline{J}$

$$\frac{ar}{e}(\dot\theta_1 - \dot\theta_2)\left[\cos\varphi\, \underline{I} + \sin\varphi\, \underline{J}\right] + \frac{r}{2}(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\left[-\sin\varphi\, \underline{I} + \cos\varphi\, \underline{J}\right] = \dot x\, \underline{I} + \dot y\, \underline{J}$$

allora

$$\begin{cases} \dot x = \frac{ar}{e}(\dot\theta_1 - \dot\theta_2)\cos\varphi - \frac{r}{2}(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\sin\varphi = \left(\frac{ar}{e}\cos\varphi - \frac{r}{2}\sin\varphi\right)\dot\theta_1 + \left(-\frac{ar}{e}\cos\varphi - \frac{r}{2}\sin\varphi\right)\dot\theta_2 \\ \dot y = \frac{ar}{e}(\dot\theta_1 - \dot\theta_2)\sin\varphi + \frac{r}{2}(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\cos\varphi = \left(\frac{ar}{e}\sin\varphi + \frac{r}{2}\cos\varphi\right)\dot\theta_1 + \left(-\frac{ar}{e}\sin\varphi + \frac{r}{2}\cos\varphi\right)\dot\theta_2 \end{cases}$$

insieme a $\omega_z^4 = \dot\varphi$ e la sua espressione

$$\omega_z^4 = \dot\varphi = \frac{r}{e}(\dot\theta_1 - \dot\theta_2) = \frac{r}{e}\dot\theta_1 - \frac{r}{e}\dot\theta_2$$

allora le equazioni che consentono di determinare posizione ed orientazione del veicolo sono:

$$\begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot\varphi \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{ar}{e}\cos\varphi - \frac{r}{2}\sin\varphi & -\frac{ar}{e}\cos\varphi - \frac{r}{2}\sin\varphi \\ \frac{ar}{e}\sin\varphi + \frac{r}{2}\cos\varphi & -\frac{ar}{e}\sin\varphi + \frac{r}{2}\cos\varphi \\ r/e & -r/e \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \hline \dot\theta_2 \end{bmatrix}$$

<u>Esercizio 2</u> : standard, vedere teoria di Denavit-Hartenberg ed esercitazioni sulle dispense e slide del corso.