Descrizione dei moti rigidi

Robotica I

M. Gabiccini

A.A. 2009/2010 LS Ing. Meccanica ed Automazione

Descrizione di moti rigidi

Consideriamo uno spazio a 3 dimensioni Euclideo, cioè lo spazio delle terne di numeri di $\mathbb{R}^3$ con punti $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_1, q_2, q_3)$ dove $p, q \in \mathbb{R}^3$ e $p_i, q_i \in \mathbb{R}$ per i quali è definita una distanza (Euclidea)

$$d(p,q) = ||p-q|| = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + (p_3-q_3)^3}$$

Due punti dello spazio definiscono un vettore $v := p - q$ anch'esso rappresentabile da una terna $v = (v_1, v_2, v_3) = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)$ che, convenzionalmente, rappresenteremo come vettore colonna

$$v = \begin{bmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \\ p_3 - q_3 \end{bmatrix}$$

Tra i vettori v, w di questo spazio sono definite le operazioni di:

prodotto scalare: $v^T w =< v, w >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$v^T v = ||v||^2;$$

$$v^T w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3;$$

$$v^T w = ||v||\,||w|| \cos \widehat{vw};$$

prodotto vettoriale: $v \times w : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$v \times w = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Il prodotto vettoriale può essere anche scritto, in forma matriciale, come:

$$v \times w := S(v)\, w := \widehat{v}\, w \qquad \widehat{v} = S(v) = -S^T(v) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sui punti di $\mathbb{R}^3$ possono agire trasformazioni $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di natura diversa.
Una trasformazione che sia continua, differenziabile con continuità un numero illimitato di volte, invertibile con inversa anch'essa C^∞, si dice un diffeomorfismo.

Una trasformazione $g(\cdot)$ definita sui punti di $\mathbb{R}^3$, viene applicata ai vettori mediante la loro definizione. In questo caso, si usa più propriamente la notazione con la "g stella", definita anche trasformazione *aggiunta*, seguente:

$$g_*(v) = g_*(p - q) := g(p) - g(q)$$

Se una trasformazione lascia inalterato il prodotto scalare tra vettori, cioè se

$$g_*(v)^T g_*(w) = v^T w$$

la trasformazione viene detta isometrica.
Una isometria mantiene invariate le lunghezze dei vettori e gli angoli tra i vettori: ciò discende direttamente dal fatto che

$$||g_*(v)||^2 = g_*(v)^T g_*(v) = v^T v = ||v||^2 \quad \Rightarrow \quad ||g_*(v)|| = ||v||$$

$$\cos \widehat{g_*(v)\, g_*(w)} = \frac{g_*(v)^T g_*(w)}{||g_*(v)||\,||g_*(w)||} = \frac{v^T w}{||v||\,||w||} = \cos \widehat{v\, w}$$

Si definisce rigida una trasformazione $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

- mantiene invariate le distanze tra i punti, ovvero:

$$d(g(p), g(q)) = d(p, q) \quad \text{cioè}$$

$$||g(p) - g(q)|| = ||p - q||, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^3$$

- mantiene invariato il prodotto vettoriale:

$$g_*(v \times w) = g_*(v) \times g_*(w)$$

Le trasformazioni rigide sono isometrie*. Tra le isometrie, la seconda condizione esclude quelle che potrebbero trasformare una terna destrorsa in una sinistrorsa.

Una terna di riferimento Cartesiana, con origine in un punto O e versori degli assi coordinati $\{i, j, k\}$ è detta destrorsa se $i \times j = k$, sinistrorsa se $i \times j = -k$
Un versore è un vettore di lunghezza unitaria, $i^T i = j^T j = k^T k = 1;$
Una terna Cartesiana ha assi ortogonali, $i^T j = j^T k = k^T i = 0;$

(*) Dimostrazione: si dimostra che il prodotto scalare si preserva in trasf. rigide.
Noto che: $||g_*(v_1) + g_*(v_2)|| = ||v_1 + v_2||, \quad ||g_*(v_1) - g_*(v_2)|| = ||v_1 - v_2||$

$$v^T w = \frac{1}{4}\left(||v + w||^2 - ||v - w||^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(||g_*(v) + g_*(w)||^2 - ||g_*(v) - g_*(w)||^2\right) = g_*(v)^T g_*(w)$$

Notazione per punti e vettori

Incontreremo ed useremo la seguente notazione:

${}^{i}p_j^k$
- coordinata $j-$esima del punto p^k
- il punto è solidale al sistema di riferimento Cartesiano $\{S_k\} = \{O_k; i_1^k, i_2^k, i_3^k\}$
- il sistema di riferimento in cui si proiettano le coordinate è $\{S_i\} = \{O_i; i_1^i, i_2^i, i_3^i\}$

${}^{i}v_j^k$
- componente $j-$esima del vettore v^k
- il vettore è solidale al sistema di riferimento Cartesiano $\{S_k\} = \{O_k; i_1^k, i_2^k, i_3^k\}$
- il sistema di riferimento in cui si proiettano le coordinate è $\{S_i\} = \{O_i; i_1^i, i_2^i, i_3^i\}$

Si ribadisce il concetto:

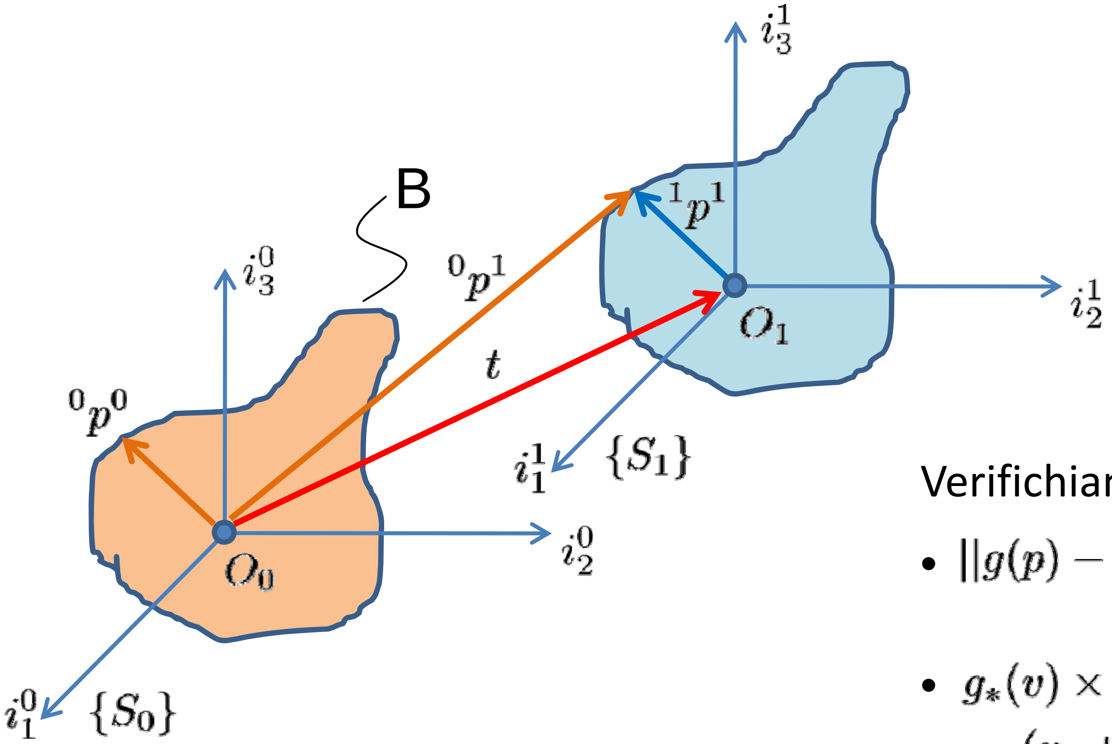
le componenti sono nel frame $\{S_i\}$

il punto è solidale al frame $\{S_k\}$

${}^{i}p_j^k$

indice della componente

Moti rigidi: Traslazioni (esempio)



Legge di trasformazione:

$$\boxed{g(p) := p + t}$$

In dettaglio:

$$ {}^0p^1 = g({}^0p^0) = {}^0p^0 + t $$

Verifichiamo che è in effetti un moto rigido:

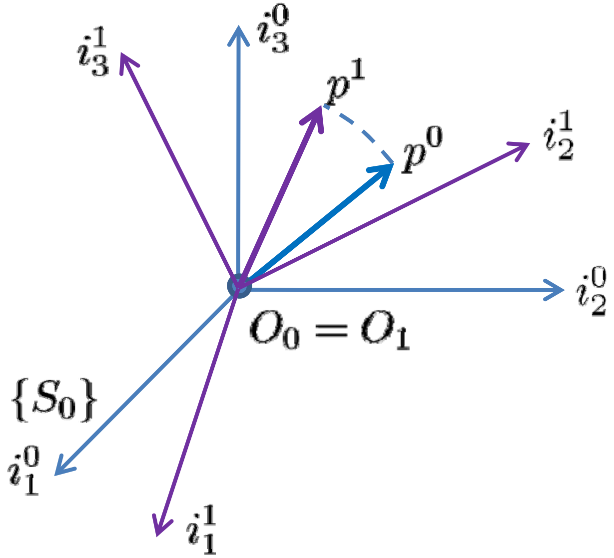
- $||g(p) - g(q)|| = ||p + t - q - t|| = ||p - q||$
- $g_*(v) \times g_*(w) = g_*(v_1 - v_0) \times g_*(w_1 - w_0)$
  $= (v_1 + t - v_0 - t) \times (w_1 + t - w_0 - t)$
  $= v \times w = g_*(v \times w)$

Nota: mentre sui punti $g(p) = p + t$ sui vettori $g_*(v) = v$.

La trasformazione di traslazione esprime anche le coordinate ${}^1p$ di un punto inizialmente espresso nel riferimento $\{S_1\}$ quando il riferimento trasla in $\{S_0\}$ mediante la legge:

$$ {}^0p = g({}^1p) = {}^1p + t $$

Moti rigidi: Rotazioni



Che relazione c'è tra le coordinate ${}^0p^0$ prima della rotazione rigida e quelle ${}^0p^1$ dello stesso punto che si sposta solidale ad $\{S_1\}$ (dopo la rotazione), espresse nel frame di partenza $\{S_0\}$?

Dato che le componenti nel riferimento solidale rimangono costanti, si può scrivere:

$$ {}^0p_j^0 = {}^1p_j^1 = p_j, \quad \forall j = 1, \dots, 3 $$
$$ p^0 = i_1^0 p_1 + i_2^0 p_2 + i_3^0 p_3 $$
$$ p^1 = i_1^1 p_1 + i_2^1 p_2 + i_3^1 p_3 $$

Nei rispettivi sistemi di riferimento le componenti dei versori base sono:

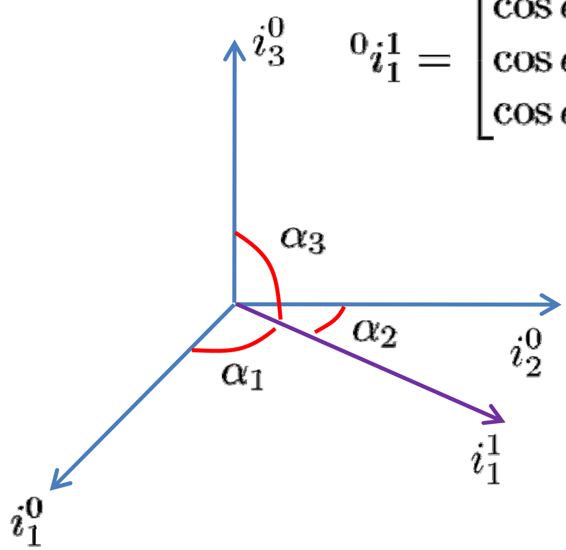
$$ {}^k i_1^k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^k i_2^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^k i_3^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

E quindi, per le coordinate del nuovo punto p^1 in $\{S_0\}$ vale:

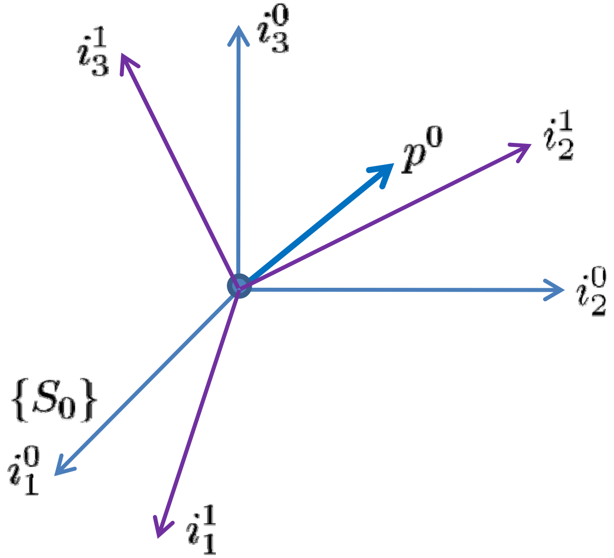
$$ {}^0p^1 = {}^0i_1^1 p_1 + {}^0i_2^1 p_2 + {}^0i_3^1 p_3 = [{}^0i_1^1 \ {}^0i_2^1 \ {}^0i_3^1] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} := {}^0R^{(1 \leftarrow 0)}\, {}^0p^0 $$

$$ \boxed{{}^0p^1 = {}^0R^{(1 \leftarrow 0)}\, {}^0p^0} $$

$$ {}^0i_1^1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \end{bmatrix} $$



Trasformazione di coordinate per rotazione



Fissato un punto p^0 fisso nello spazio, che relazione c'è fra le sue coordinate nella terna fissa $\{S_0\}$ ed in quella ruotata $\{S_1\}$?

Si ha:

$${}^0p^0 = {}^0i_1^1\,{}^1p_1^0 + {}^0i_2^1\,{}^1p_2^0 + {}^0i_3^1\,{}^1p_3^0 = [{}^0i_1^1\ {}^0i_2^1\ {}^0i_3^1]\ {}^1p^0$$

Dunque le coordinate di uno stesso punto si trasformano per cambiamento di coordinate fra $\{S_1\}$ ed $\{S_0\}$ secondo la legge:

$$\boxed{{}^0p^0 = [{}^0i_1^1\ {}^0i_2^1\ {}^0i_3^1]\ {}^1p^0 := {}^0R_1\ {}^1p^0}$$

Si riportano insieme i due notevoli risultati appena trovati

$$\boxed{{}^0p^1 = [{}^0i_1^1\ {}^0i_2^1\ {}^0i_3^1]{}^0p^0 := {}^0R^{(1\leftarrow 0)}{}^0p^0}$$ (rotazione rigida da config. di $\{S_0\}$ a quella di $\{S_1\}$)

$$\boxed{{}^0p^0 = [{}^0i_1^1\ {}^0i_2^1\ {}^0i_3^1]\ {}^1p^0 := {}^0R_1\ {}^1p^0}$$ (trasf. di coords da $\{S_1\}$ a $\{S_0\}$)

Una rotazione trasforma un punto mediante una trasformazione lineare (basta osservare la forma matriciale). Interessantemente, la stessa matrice di rotazione esprime anche il cambiamento di coordinate inverso. $\boxed{{}^0R^{(1\leftarrow 0)} = {}^0R_1}$

Rotazione 3D come matrice di rotazione

Nota 1: come abbiamo visto, una rotazione trasforma un punto mediante una applicazione lineare (osservare forma matriciale).

Nota 2: il cambiamento di coordinate da $\{S_1\}$ a $\{S_0\}$ è realizzato dalla stessa matrice che realizza la rotazione da una configurazione identificata da $\{S_0\}$ a quella identificata da $\{S_1\}$. Perciò si può scrivere:

$$\boxed{{}^0R^{(1\leftarrow 0)} = {}^0R_1}$$

Nota 3: dalla definizione precedentemente fornita, la ${}^0R_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ha come colonne le componenti dei versori base del frame $\{S_1\}$ rispetto al frame $\{S_0\}$, ossia:

$$\boxed{{}^0R_1 = [{}^0i_1^1 \ {}^0i_2^1 \ {}^0i_3^1]}$$

Nota 4: Ogni rotazione è associata ad una matrice 3x3 a 9 parametri (gli elementi della matrice). Questi non sono però indipendenti, dovendo valere:

$$\begin{cases} i_1^T i_1 = i_2^T i_2 = i_3^T i_3 = 1 \\ i_1^T i_2 = i_2^T i_3 = i_3^T i_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1^T \\ i_2^T \\ i_3^T \end{bmatrix} [i_1 \ i_2 \ i_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T R = I$$

Dalle 6 condizioni precedenti discende direttamente che R è una matrice ortogonale, ossia $R^{-1} = R^T$. Inoltre si ha che $i_1 \times i_2 = \pm i_3$.

La scelta del segno positivo è obbligata dalla necessità di mantenere l'orientamento delle terne. Dunque ulteriore condizione è che: $i_1 \times i_2 = +i_3$

Rotazione 3D come matrice di rotazione (continua)

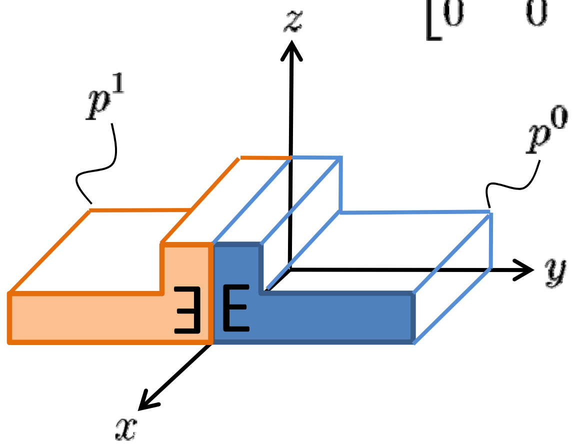
Dalla condizione $i_1 \times i_2 = +i_3$, moltiplicando scalarmente tale equazione per i_3, e ricordando che: (1) la matrice di rotazione $R = [i_1 \; i_2 \; i_3]$; (2) il prodotto misto (scalare - vettore) è calcolabile come sviluppo del determinante della matrice che impila i vettori in colonna, si ha:

$$(i_1 \times i_2) \cdot i_3 = \det([i_1 \; i_2 \; i_3]) = \det(R) = +i_3 \cdot i_3 = 1$$

$$\boxed{\det(R) = 1}$$ (determinante di mat. rotaz. = +1)

Se una matrice verifica solo $R^T R = I$ ma $\det(R) = -1$, allora non è una rotazione bensì una riflessione.

Esempio: $g(p) = Sp$ con $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, applicata a tutti i vertici di questo solido da:



$$p^1 = Sp^0$$

Globalmente:

$$P^1 = SP^0$$

dove:

$$P^0 = \left[p^0_{(1)} \cdots p^0_{(n)}\right] ; \; P^1 = \left[p^1_{(1)} \cdots p^1_{(n)}\right]$$

Caratteristiche delle matrici ortogonali O(n)

L'insieme delle matrici ortogonali di ordine n è detto $O(n)$.
Questo insieme, con la legge di composizione data dal prodotto matriciale, è un *gruppo*.
Infatti per le matrici $Q \in O(n)$ valgono le seguenti proprietà:

- **chiusura** $Q_1 Q_2 \in O(3), \ \forall Q_1, \ Q_2 \in O(3)$
- **identità** $I \in O(3), \ QI = Q$
- **inversa** $QX = I \iff X = Q^T \in O(3)$
- **associatività** $Q_1(Q_2 Q_3) = (Q_1 Q_2) Q_3$

N.B.: tale gruppo non è abeliano (commutativo): $Q_1 Q_2 \neq Q_2 Q_1$

L'insieme delle matrici per cui vale la ulteriore condizione $\det(Q) = 1$ (ossia delle sole rotazioni) è detto Speciale Ortogonale $SO(n)$. Anche questo è un gruppo.

Verifica che rotazione = trasformazione rigida

Una rotazione $g_R(p) = Rp,\ R \in SO(3)$ è una trasformazione rigida.

Verifica:

$$g_{R^*}(v) = Rv_1 - Rv_2 = R(v_1 - v_2) = Rv$$

- $||g_{R^*}(v)|| = ||Rv|| = (v^T R^T R v)^{\frac{1}{2}} = (v^T v)^{\frac{1}{2}} = ||v||$

- $g_{R^*}(v \times w) = R(v \times w) = R(v) \times R(w)$

N.B.: vale solo se $R \in SO(3)$

Per dimostrare la seconda proprietà si può usare la seguente proprietà:

$(Rv)^\wedge = R(v)^\wedge R^T$ (dim.)

Da cui:

$$R(v) \times R(w) = (Rv)^\wedge (Rw) = R(v)^\wedge R^T R w = R((v)^\wedge w) = R(v \times w)$$

(dim.) $\forall b \in \mathbb{R}^3, \quad R(v)^\wedge R^T b = R(v \times R^T b) = (Rv) \times (RR^T b)$

$$= (Rv) \times b = (Rv)^\wedge b$$

Rotazioni elementari

Si considerino tre esempi particolarmente semplici di rotazioni, effettuate attorno a ciascuno degli assi del sistema di riferimento.

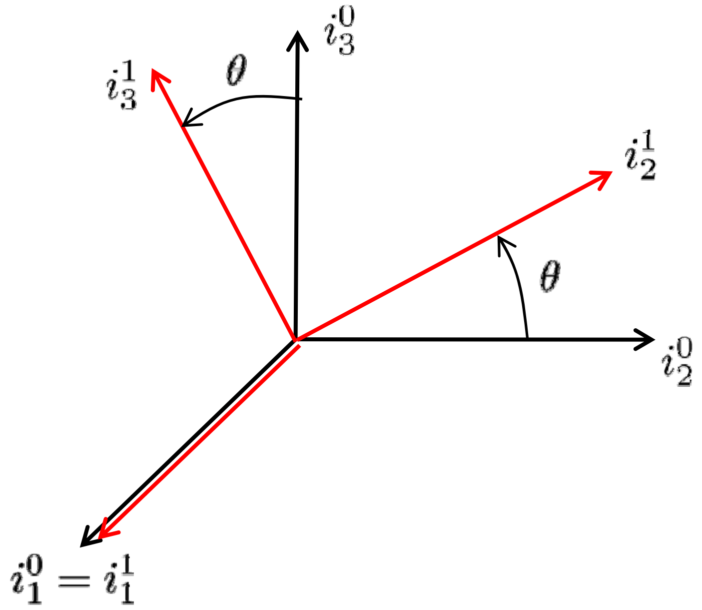
In generale il calcolo della matrice di rotazione viene svolto nel modo seguente:

$$ {}^0R_1 = \begin{bmatrix} (i_1^0)^T \\ (i_2^0)^T \\ (i_3^0)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^1 & i_2^1 & i_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (i_1^0)^T i_1^1 & (i_1^0)^T i_2^1 & (i_1^0)^T i_3^1 \\ (i_2^0)^T i_1^1 & (i_2^0)^T i_2^1 & (i_2^0)^T i_3^1 \\ (i_3^0)^T i_1^1 & (i_3^0)^T i_2^1 & (i_3^0)^T i_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0i_1^1 & {}^0i_2^1 & {}^0i_3^1 \end{bmatrix} $$

Si indicano: $S_\theta = \sin\theta \quad C_\theta = \cos\theta$

Per rotazione attorno al primo asse, x_1 si ha immediatamente:

$$ {}^0R_1 = Rot(x_1, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta \\ 0 & S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} $$



Ricorda doppio ruolo svolto da ${}^0R_1$

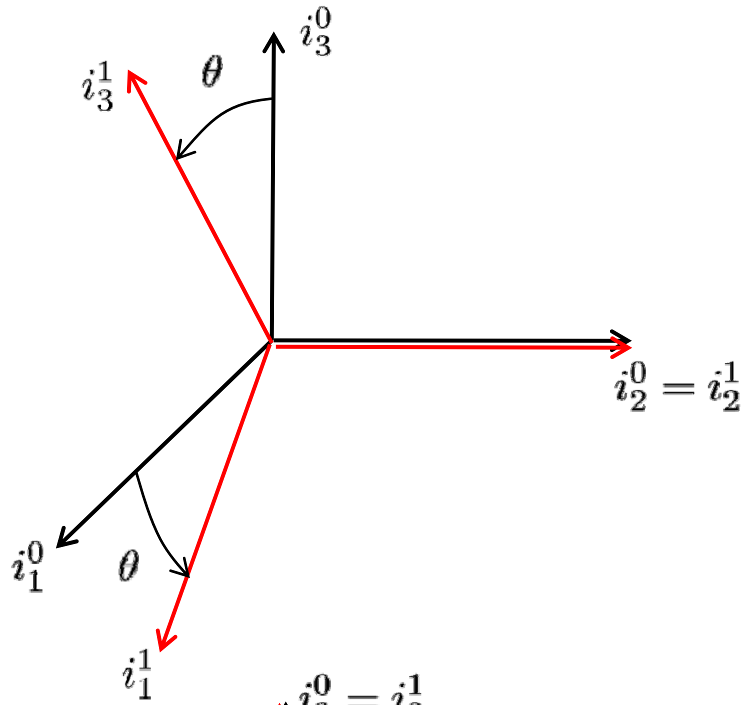
$$ {}^0p = {}^0R_1\, {}^1p $$

$$ p^1 = {}^0R_1\, p^0 $$

Rotazioni elementari

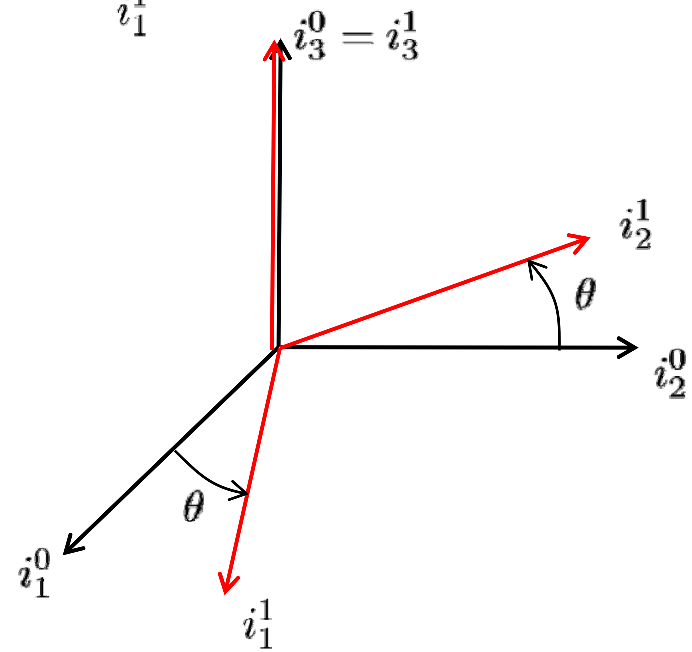
Per rotazione attorno al secondo asse, x_2 :

$$^0R_1 = Rot(x_2,\theta) = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix}$$



Per rotazione attorno al terzo asse, x_3 :

$$^0R_1 = Rot(x_3,\theta) = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Composizione di rotazioni in assi fissi

Si consideri un corpo rigido solidale ad una terna $S = \{O; i_1, i_2, i_3\}$.
A partire da una configurazione in cui S coincide con $S_0 = \{O_0; i_1^0, i_2^0, i_3^0\}$, lo si ruoti in modo che S si sovrapponga a $S_1 = \{O_1; i_1^1, i_2^1, i_3^1\}$
Per il generico punto si ha:

$$ {}^0p^1 = {}^0R^{(1 \leftarrow 0)}\, {}^0p^0 $$

Se il corpo viene ruotato ulteriormente fino a portarlo su $S_2 = \{O_2; i_1^2, i_2^2, i_3^2\}$ e tale rotazione è espressa da una matrice con componenti ancora in $S_0 = \{O_0; i_1^0, i_2^0, i_3^0\}$

$$ {}^0p^2 = {}^0R^{(2 \leftarrow 1)}\, {}^0p^1 = {}^0R^{(2 \leftarrow 1)}\, {}^0R^{(1 \leftarrow 0)}\, {}^0p^0 = {}^0R^{(2 \leftarrow 0)}\, {}^0p^0 $$

Perciò la rotazione per portare la configurazione S_0 in S_2 è data da:

$$ {}^0R^{(2 \leftarrow 0)} = \overleftarrow{{}^0R^{(2 \leftarrow 1)}\, {}^0R^{(1 \leftarrow 0)}} $$

Regola:
Le rotazioni rigide di un corpo si compongono per <u>premoltiplicazione</u> delle matrici di rotazione scritte in componenti in assi fissi, ossia nel riferimento iniziale.
Quindi, pensandole come rotazioni in assi fissi, si compongono moltiplicandole da destra verso sinistra.

Composizione di rotazioni in assi fissi (esempio)

Le rotazioni di $\pi/2$, prima attorno all'asse x_2 e successivamente all'asse x_3 (ancora del vecchio sistema di riferimento) sono date dalle matrici

$$ {}^0R^{(1\leftarrow 0)} = Rot(x_2, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^0R^{(2\leftarrow 1)} = Rot(x_3, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Composte nel seguente modo:

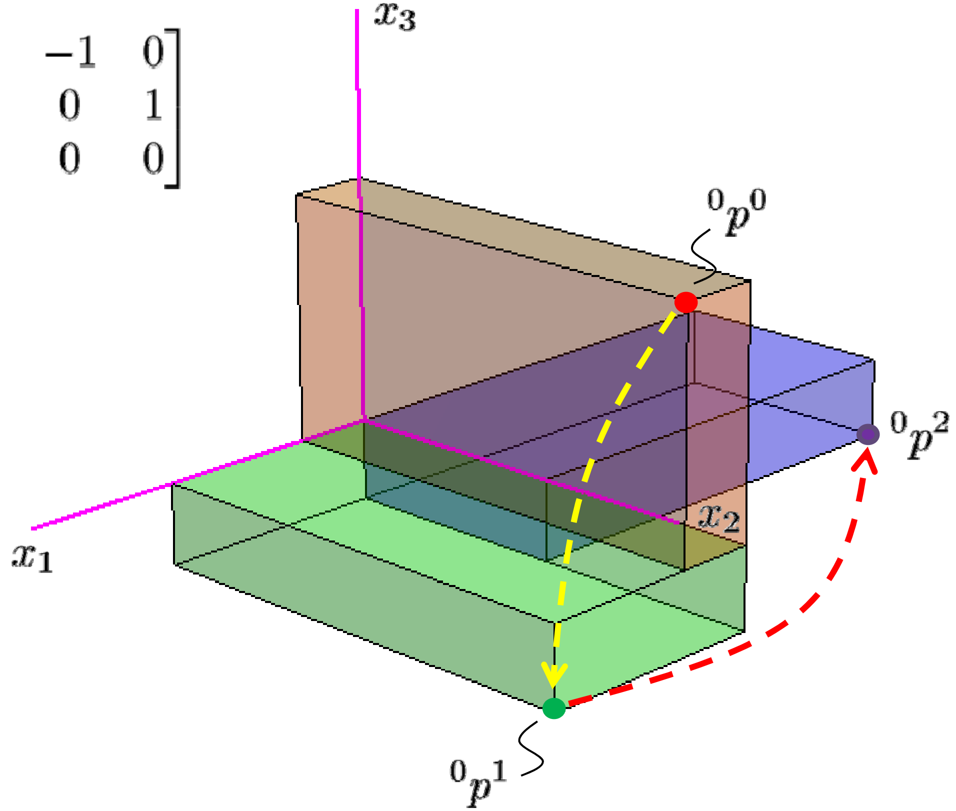
$$ {}^0R^{(2\leftarrow 0)} = Rot(x_3, \pi/2)Rot(x_2, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

Coordinate nella config. iniziale (p.to rosso)

$$ {}^0p^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} $$

Coordinate nella config. finale (p.to viola)

$$ {}^0p^2 = {}^0R^{(2\leftarrow 0)}\,{}^0p^0 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} $$

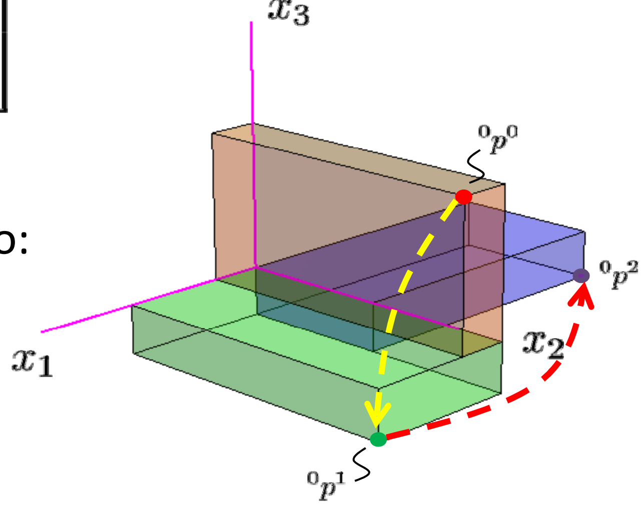


Le rotazioni non commutano! (con esempio)

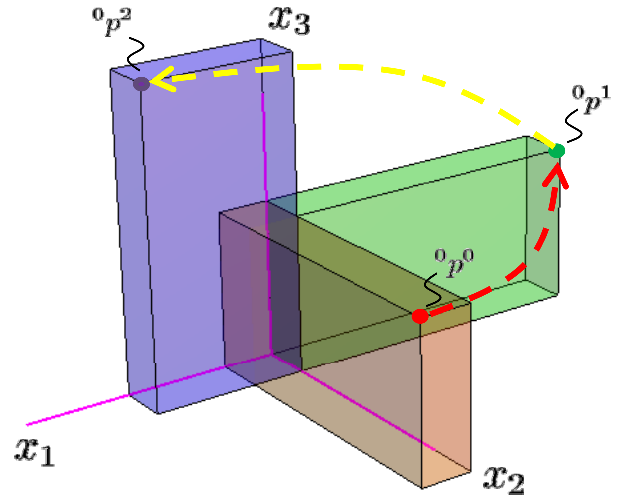
Le rotazioni di $\pi/2$, prima attorno all'asse x_2 e successivamente all'asse x_3 (ancora del vecchio sistema di riferimento) sono date dalle matrici

$$Rot(x_2, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Rot(x_3, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composte così $Rot(x_3, \pi/2)Rot(x_2, \pi/2)$ (come prima) danno:



Composte così $Rot(x_2, \pi/2)Rot(x_3, \pi/2)$ (nuovo) danno:



Le configurazioni finali raggiunte (viola) sono diverse nei due casi!

Composizione di rotazioni in assi mobili

Si consideri un corpo rigido solidale ad una terna $S = \{O; i_1, i_2, i_3\}$.

A partire da una configurazione in cui S coincide con $S_0 = \{O_0; i_1^0, i_2^0, i_3^0\}$, lo si ruoti in modo che S si sovrapponga a $S_1 = \{O_1; i_1^1, i_2^1, i_3^1\}$

Per il generico punto si ha:

$$ {}^0p^1 = {}^0R^{(1\leftarrow 0)}\, {}^0p^0 $$

Se il corpo viene ruotato ulteriormente fino a portarlo su $S_2 = \{O_2; i_1^2, i_2^2, i_3^2\}$ e tale rotazione è espressa, questa volta, da una matrice con componenti nella terna corrente $S_1 = \{O_1; i_1^1, i_2^1, i_3^1\}$, ossia ${}^1R^{(2\leftarrow 1)}$, occorre:

1) Portare ${}^0p^1$ in componenti in S_1, ossia ${}^1p^1 = {}^1R_0\, {}^0p^1$;

2) Applicare la rotazione ${}^1R^{(2\leftarrow 1)}$ in queste componenti, ossia ${}^1p^2 = {}^1R^{(2\leftarrow 1)}\, {}^1p^1$;

3) Riportare il risultato in componenti in S_0, ossia ${}^0p^2 = {}^0R_1\, {}^1p^2$

Ricordandosi che ${}^0R^{(1\leftarrow 0)} = {}^0R_1, \quad {}^1R_0\, {}^0R_1 = I, \quad {}^1R^{(2\leftarrow 1)} = {}^1R_2$ e svolgendo i calcoli:

$$ {}^0p^2 = {}^0R_1\, {}^1p^2 = {}^0R_1\, {}^1R^{(2\leftarrow 1)}\, {}^1p^1 = {}^0R_1\, {}^1R^{(2\leftarrow 1)}\, {}^1R_0\, {}^0p^1 = {}^0R_1\, {}^1R^{(2\leftarrow 1)}\, {}^1R_0\, {}^0R^{(1\leftarrow 0)}\, {}^0p^0 $$
$$ = {}^0R^{(1\leftarrow 0)}\, {}^1R^{(2\leftarrow 1)}\, {}^0p^0 $$

Regola:

Le rotazioni rigide di un corpo si compongono per <u>post-moltiplicazione</u> delle matrici di rotazione scritte in componenti in assi locali, ossia nel riferimento corrente.

Composizione di rotazioni in assi mobili (2)

Osservazioni sul penultimo passaggio:

$$ {}^{0}p^{2} = \left({}^{0}R_{1}\, {}^{1}R^{(2\leftarrow 1)}\, {}^{0}R_{1}^{T} \right) {}^{0}R^{(1\leftarrow 0)}\, {}^{0}p^{0} = {}^{0}R^{(2\leftarrow 1)}\, {}^{0}R^{(1\leftarrow 0)}\, {}^{0}p^{0} $$

Il primo blocco di matrici rappresenta la trasformazione per similitudine della ${}^{1}R^{(2\leftarrow 1)}$ dal frame S_1 al frame S_0 secondo il classico diagramma commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
S_0 \arrow[r, "{}^{0}R^{(2\leftarrow 1)}"] \arrow[d, "{}^{0}R_{1}"'] & S_0 \arrow[d, "{}^{0}R_{1}"'] \\
S_1 \arrow[r, "{}^{1}R^{(2\leftarrow 1)}"] & S_1
\end{tikzcd}
$$

Questa interpretazione corrisponde ancora alla composizione in assi fissi.
Notare che è stato necessario riportare la ${}^{1}R^{(2\leftarrow 1)}$ dalle componenti S_1 alle componenti S_0, ossia trasformarla per congruenza nella ${}^{0}R^{(2\leftarrow 1)} = {}^{0}R_{1}\, {}^{1}R^{(2\leftarrow 1)}\, {}^{0}R_{1}^{T}$

Composizione di rotazioni in assi correnti (esempio)

Le rotazioni di $\pi/2$, prima attorno all'asse x_3^0 e successivamente all'asse corrente x_2^1 sono date dalle matrici

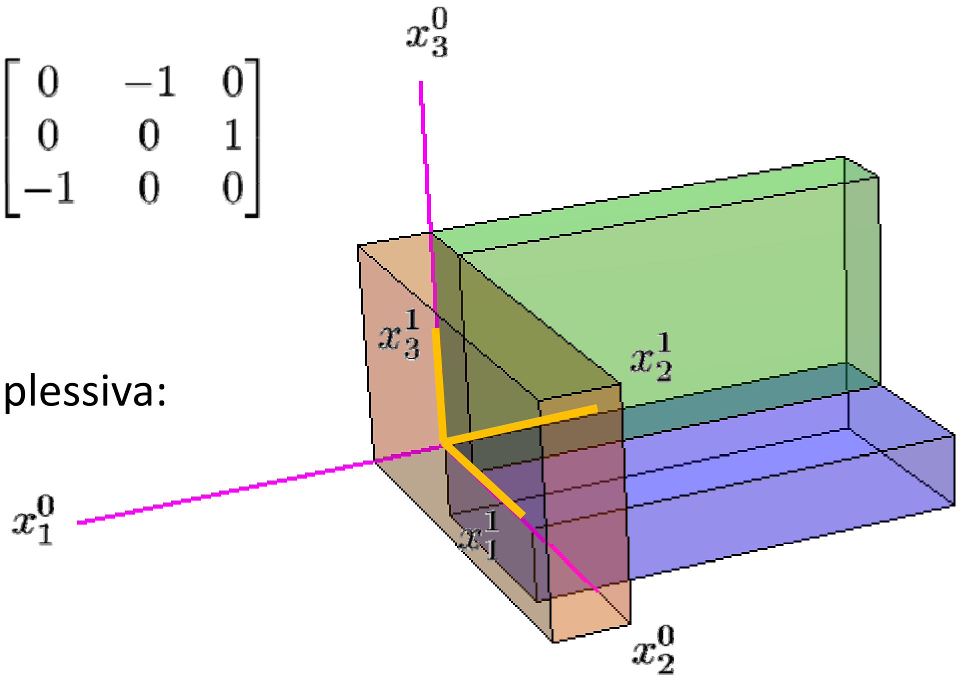
$$Rot(x_3^0,\pi/2)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad Rot(x_2^1,\pi/2)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Composte nel seguente modo:

$$^0R^{(2\leftarrow 0)}={}^0R^{(1\leftarrow 0)}\,{}^1R^{(2\leftarrow 1)}=$$

$$=Rot(x_3^0,\pi/2)Rot(x_2^1,\pi/2)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Comportano la seguente rotazione complessiva:

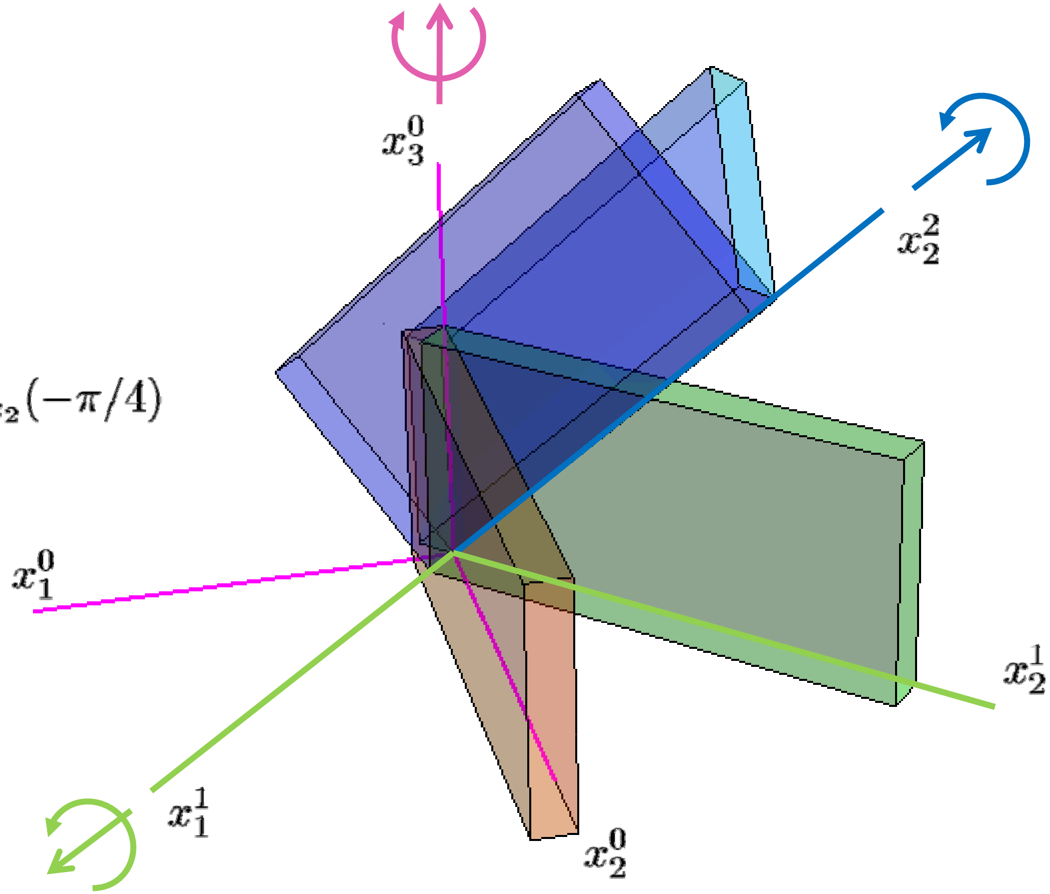


Esercizio su composizione di rotazioni

Consideriamo il punto di coordinate $^0p^0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

Determinare le corrispondenti coordinate in seguito alle seguenti tre rotazioni successive effettuate in assi correnti:

- $Rot(x_3^0, \pi/4)$
- $Rot(x_1^1, \pi/4)$
- $Rot(x_2^2, -\pi/4)$



Risultato:

$$^0R^{2\leftarrow 0} = R_{x_3}(\pi/4)\, R_{x_1}(\pi/4)\, R_{x_2}(-\pi/4)$$

$$^0p^2 = {}^0R^{2\leftarrow 0}\, {}^0p^0$$

$$^0p^2 = \begin{bmatrix} -3.01256 \\ 0.512563 \\ 5.99264 \end{bmatrix}$$

Punto della situazione e commenti finali

La matrice di rotazione ${}^{i}R_j$ ha la duplice veste di indicare:

1) La rotazione, espressa nel rif. S_i, che permette di passare dalla configurazione di S_i alla configurazione di S_j. In base al significato degli apici si ha infatti

$$ {}^{i}p^{j} = {}^{i}R_j \, {}^{i}p^{i} $$

2) La trasformazione di coordinate dal riferimento S_j al riferimento S_i.

$$ {}^{i}p^{k} = {}^{i}R_j \, {}^{j}p^{k} $$

Rotazioni successive si compongono per moltiplicazione delle corrispondenti matrici:
a) da destra verso sinistra se si pensa di effettuarle in assi fissi ;
b) da sinistra verso destra se si pensa di effettuarle in assi correnti

La rappresentazione matriciale tuttavia, utilizzando nove parametri non indipendenti, può presentare degli inconvenienti, tra cui:

- non è molto intuitiva, dovendo ricorrere alle espressioni in coordinate dei verso degli assi delle terne;
- non è molto robusta numericamente (una procedura numerica che debba calcolare l'evoluzione dei valori di una matrice di rotazione può produrre lievi errori che fanno sì che il risultato non sia più in $SO(3)$, introducendo quindi deformazioni dei corpi)