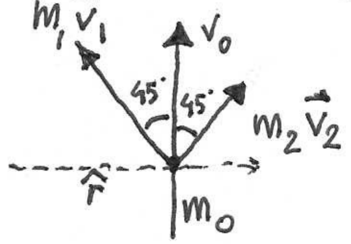
PER LA FORZA DI GRAVITÀ ALLA SUPERFICIE TERRESTRE $\frac{GM\cancel{m}}{R^2} = g\cancel{m}$ E quindi $GM = gR^2$ ① PER UN SATELLITE IN ORBITA CIRCOLARE $\frac{GMm}{d^2} = \frac{mV_0^2}{d} \rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{GM}{d}}$ E USANDO LA ①: $V_0 = \sqrt{\frac{g}{d}}\, R$ ②



PER CONSERVAZIONE DI $\vec{P}$, SE m_1 E m_2 SONO LE MASSE DEI DUE FRAMMENTI E $\vec{V}_1$ E $\vec{V}_2$ LE LORO VELOCITÀ, SCOMPONENDO QUESTE ULTIME IN DIREZIONE RADIALE E TANGENZIALE SI HA:

$$\begin{cases} m_0V_0 = m_1V_1\cos(45°) + m_2V_2\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(m_1V_1 + m_2V_2) \\ 0 = m_1V_1\cancel{\sin(45°)} - m_2V_2\cancel{\sin(45°)} \end{cases}$$

DALLA SECONDA EQ SI OTTIENE $V_2 = m_1V_1/m_2$ CHE SOSTITUITA NELLA PRIMA DÀ

$$m_0V_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(m_1V_1 + \cancel{m_2}\frac{m_1V_1}{\cancel{m_2}}\right) = \sqrt{2}\,m_1V_1 \rightarrow V_1 = \frac{m_0V_0}{\sqrt{2}\,m_1} \quad ③$$

IL FRAMMENTO SI ALLONTANA INDEFINITAMENTE DALLA TERRA SE LA SUA ENERGIA MECCANICA È POSITIVA. SCRIVIAMO $E_1 > 0$:

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 - \frac{GMm_1}{d} > 0 \xrightarrow{①③} \frac{1}{2}\cancel{m_1}\frac{m_0^2V_0^2}{2m_1^2} > \frac{gR^2\cancel{m_1}}{d} \xrightarrow{②}$$

$$\rightarrow \frac{m_0^2}{4m_1^2}\frac{g\cancel{R^2}}{\cancel{d}} > \frac{g\cancel{R^2}}{\cancel{d}} \rightarrow m_1^2 < \frac{m_0^2}{4}$$ MA m_1 DEVE ESSERE POSITIVA $\rightarrow \boxed{a)\ 0 < m_1 < \frac{m_0}{2}}$

PER QUESTI VALORI m_1 SFUGGE ALLA GRAVITÀ TERRESTRE.

NEL SEGUITO POTREMO UTILIZZARE IL DATO DEL TESTO $m_1 = 1{,}5\,\frac{m_0}{2} = \frac{3m_0}{4}$ ④

- SIA V_M LA VELOCITÀ DI m_1 AL PERIGEO E R_M LA SUA DISTANZA DAL CENTRO DELLA TERRA IN QUEL MOMENTO.
- IMPONIAMO LA CONSERVAZIONE DI $\vec{L}$ E DI E TRA UN ISTANTE APPENA SUCCESSIVO ALLO SCOPPIO E IL PASSAGGIO AL PERIGEO

$$L_z = \cancel{m_1}V_1\cos(45°)\cdot d = \cancel{m_1}V_MR_M \longrightarrow V_M = \frac{V_1 d}{\sqrt{2}R_M} \quad ⑤$$

$$E = \frac{1}{2}\cancel{m_1}V_1^2 - \frac{GM\cancel{m_1}}{d} = \frac{1}{2}\cancel{m_1}V_M^2 - \frac{GM\cancel{m_1}}{R_M}$$ SOSTITUIAMO V_1, GM E V_M ③ ① ⑤

$$\frac{1}{2}\frac{m_0^2V_0^2}{2m_1^2} - \frac{gR^2}{d} = \frac{1}{2}\frac{m_0V_0^2}{2m_1^2}\frac{d^2}{2R_M^2} - \frac{gR^2}{R_M}$$ ORA SOSTITUIAMO ANCHE V_0 ②

$$\frac{1}{4}\frac{m_0^2}{m_1^2}\frac{\cancel{gR^2}}{d} - \frac{\cancel{gR^2}}{d} = \frac{1}{8}\frac{m_0^2}{m_1^2}\frac{d^2}{R_M^2}\frac{\cancel{gR^2}}{d} - \frac{\cancel{gR^2}}{R_M}$$

$$\frac{m_0^2 - 4m_1^2}{\cancel{4}\cancel{m_1^2}\cancel{d}} = \frac{m_0^2d^2 - 8m_1^2R_Md}{2\cancel{8}\cancel{m_1^2}R_M^2\cancel{d}}$$ CAMBIAMO SEGNO A TUTTO

$$2R_M^2(4m_1^2 - m_0^2) - 8m_1^2R_Md + m_0^2d^2 = 0$$ MA ORA USIAMO LA ④ $m_1 = \frac{3}{4}m_0$

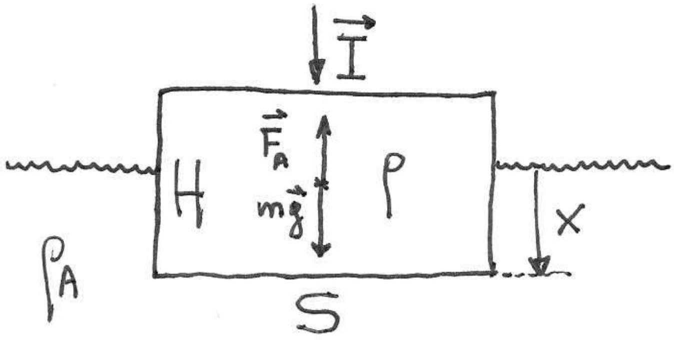
$$2R_M\left(4\cdot\frac{9}{16}\cancel{m_0^2} - \cancel{m_0^2}\right) - 8\cdot\frac{9}{16}\cancel{m_0^2}d\,R_M + \cancel{m_0^2}d^2 = 0 \rightarrow 5R_M^2 - 9dR_M + 2d^2 = 0$$

$$R_M = \frac{9d - \sqrt{81d^2 - 40d^2}}{10}$$ LA SOLUZIONE COL + È L'AFELIO

$$R_M = d\left(\frac{9 - \sqrt{41}}{10}\right)$$

INSERENDO I NUMERI $R_M \simeq 1706$ Km CHE È BEN MINORE DEL RAGGIO DELLA TERRA

QUINDI $\boxed{b)\ \text{PRECIPITA SULLA TERRA}}$



TROVIAMO LA X DI EQUILIBRIO. ABBIAMO 2 FORZE: PESO E ARCHIMEDE

$m = SH\rho \quad F_A = Sx_{eq}\rho_A g$

$m = F_A$ (EQUILIBRIO) $\cancel{S}H\rho \cancel{g} = \cancel{S}x_{eq}\rho_A \cancel{g}$

$x_{eq} = H\frac{\rho}{\rho_A}$ CHE È ANCHE LA X INIZIALE PER $t=0$ QUINDI $x(0) = H\frac{\rho}{\rho_A}$ ①

PER $t>0$ $F_x = m\ddot{x} \rightarrow \cancel{S}H\rho g - \cancel{S}x\rho_A g = \cancel{S}H\rho\ddot{x}$ CIOÈ

$\ddot{x} + \frac{\rho_A g}{\rho H}x = g$ EQUAZIONE DELL'OSCILLATORE ARMONICO CON $\omega^2 = \frac{\rho_A g}{\rho H}$

LA SOLUZIONE È DELLA FORMA $x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + H\frac{\rho}{\rho_A}$ ②. PER DETERMINARE A E ϕ SERVONO LE CONDIZIONI INIZIALI. ① GIÀ CE LA ABBIAMO. PER $\dot{x}(0) = V_0$ USIAMO IL TEOREMA DELL'IMPULSO IN $t=0$

$\vec{I} = m\vec{V}_0 \rightarrow \vec{V}_0 = \vec{I}/m \rightarrow \dot{x}(0) = I/\rho SH$. IMPONIAMO $x(0)$ E $\dot{x}(0)$ IN ②

$\rightarrow x(0) = H\frac{\rho}{\rho_A} = A\cos(\phi) + H\frac{\rho}{\rho_A} \rightarrow A\cos\phi = 0$ $\rightarrow A=0$ IMPOSSIBILE; $\rightarrow \phi = \pm\pi/2$ OK

$\rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$; $\rightarrow \dot{x}(0) = \frac{I}{\rho SH} = -A\omega\sin\phi$ ③

ORA SE $\phi = \pm\pi/2 \rightarrow \sin\phi = \pm 1$ PER AVERE UNA EQ ③ TUTTA POSITIVA

$\sin\phi = -1 \rightarrow \phi = -\pi/2$ ④ E $A = \frac{I}{\rho SH\omega} = \frac{I}{\rho SH}\sqrt{\frac{\rho H}{\rho_A g}} \rightarrow$

$A = \frac{I}{S\sqrt{\rho\rho_A Hg}}$ ⑤ PER CUI $\xrightarrow{④⑤} x(t) = \frac{I}{S\sqrt{\rho\rho_A Hg}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + H\frac{\rho}{\rho_A}$

a) $\boxed{x(t) = \frac{I}{S\sqrt{\rho\rho_A Hg}}\sin\left(\sqrt{\frac{\rho_A g}{\rho H}}\,t\right) + H\frac{\rho}{\rho_A}}$

SICCOME $-1 < \sin\theta < 1$ SI HA $x_{MIN} = -\frac{I}{S\sqrt{\rho\rho_A Hg}} + H\frac{\rho}{\rho_A}$ $x_{MAX} = \frac{I}{S\sqrt{\rho\rho_A Hg}} + H\frac{\rho}{\rho_A}$

IMPONIAMO I LIMITI DEL TESTO

$x_{MIN} > 0 \quad -\frac{I}{S\sqrt{\rho\rho_A Hg}} + H\frac{\rho}{\rho_A} > 0 \rightarrow I < S\sqrt{\rho\rho_A Hg}\,H\,\rho/\rho_A$ ⑥

$x_{MAX} < H \quad \frac{I}{S\sqrt{\rho\rho_A Hg}} + H\frac{\rho}{\rho_A} < H \rightarrow I < S\sqrt{\rho\rho_A Hg}\,H\left(1 - \rho/\rho_A\right)$ ⑦

RIMANE DA CAPIRE QUALE CONDIZIONE È PIÙ STRINGENTE. LA ⑥ È PIÙ STRINGENTE DI ⑦ SE $\rho/\rho_A < (1 - \rho/\rho_A) \rightarrow 2\rho/\rho_A < 1 \rightarrow \rho < \rho_A/2$

PER CUI

b)
- PER $\rho < \rho_A/2$ IL VALORE MASSIMO DI I È DATO DALLA ⑥
- PER $\rho_A/2 < \rho < \rho_A$ IL VALORE MASSIMO DI I È DATO DALLA ⑦

CHIAMO V_{A0} e V_{B0} i volumi iniziali, n IL NUMERO DELLE MOLI SIA IN A CHE IN B, T_0 LA TEMPERATURA INIZIALE. P_A, P_B, V_B E T SONO PRESSIONI, VOLUMI E TEMPERATURA (UGUALE PER A E B) IN UN ISTANTE GENERICO SUCCESSIVO.

IL VOLUME DI A È FISSO ED È UGUALE A V_{A0}. INDICO COL PEDICE f I VALORI FINALI DI TUTTE LE VARIABILI.

- $V_{A0} = \dfrac{nRT_0}{P_{A0}}$, $V_A = V_{Af} = V_{A0}$. $V_{B0} = \dfrac{nRT_0}{P_{B0}}$, $V_{Bf} = \dfrac{nRT_f}{P_f} = V_{Af} = V_{A0}$ (1)

APPLICHIAMO IL 1° PRINCIPIO A TUTTO IL SISTEMA A+B

$$dU_{A+B} = \cancel{dQ_{A+B}} + dW_{A+B} \rightarrow dU_A + dU_B = -\cancel{P_A dV_A} - P_B dV_B$$

$$(\cancel{n}c_{v_A} + \cancel{n}c_{v_B})\, dT = -\frac{\cancel{n}RT}{V_B} dV_B \rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{R}{(c_{v_A} + c_{v_B})} \frac{dV_B}{V_B} \quad (2)$$

$$\text{MA } c_{v_A} = c_v(He) = \frac{3}{2}R \text{ , } c_{v_B} = c_v(N_2) = \frac{5}{2}R \rightarrow \frac{R}{(c_{v_A} + c_{v_B})} = \frac{R}{\frac{3}{2}R + \frac{5}{2}R} = \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$(2)+(3) \quad \frac{dT}{T} = -\frac{1}{4}\frac{dV_B}{V_B} \rightarrow \ln(T) = -\frac{1}{4}\ln(V_B) + \text{cost} \rightarrow \ln\left(T V_B^{\frac{1}{4}}\right) = \text{cost}$$

CIOÈ $T V_B^{\frac{1}{4}} = \text{cost}$, ED USANDO $PV = nRT$ QUINDI $T = \dfrac{PV}{nR}$

$$P_B V_B V_B^{\frac{1}{4}} = \text{cost} \cdot nR = \text{cost}' \rightarrow P_B V_B^{\frac{5}{4}} = \text{cost}'$$

PER CUI $P_{B0} V_{B0}^{5/4} = P_f V_{Bf}^{5/4}$; DALLE (1) $V_{B0} = \dfrac{nRT_0}{P_{B0}}$, $V_{Bf} = \dfrac{nRT_0}{P_{A0}}$

E METTENDO TUTTO INSIEME;

$$P_f = P_{B0}\left(\frac{V_{B0}}{V_{Bf}}\right)^{5/4} = P_{B0}\left(\frac{\cancel{nRT_0}}{P_{B0}}\frac{P_{A0}}{\cancel{nRT_0}}\right)^{5/4} = P_{B0}\sqrt[4]{\left(\frac{P_{A0}}{P_{B0}}\right)^5} = \sqrt[4]{\frac{P_{A0}^5}{P_{B0}}}$$