

IL MOMENTO D'INERZIA DEL DISCO RISPETTO AL PERNO CENTRALE VALE:

$$I_D = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} ML^2 \quad \textcircled{1} \quad \text{CALCOLIAMO IL MOMENTO D'INERZIA DELLA SBARRA:}$$

$$I_S = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \frac{dm}{dx} dx = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \cdot k \left(x + \frac{L}{2} \right) dx = k \int_{-L/2}^{+L/2} \left(x^3 + \frac{L}{2} x^2 \right) dx =$$

$$= k \left[\frac{x^4}{4} + \frac{L}{2} \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{+L/2} = k \left(\frac{L^4}{64} + \frac{L^4}{48} - \frac{L^4}{64} + \frac{L^4}{48} \right) = \frac{KL^4}{24}$$

DATA L'ASSENZA DI MOMENTI MECCANICI ESTERNI IMPONIAMO LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE PRIMA E DOPO L'AGGIUNTA DELLA SBARRETTA

$$I_D \omega_0 = (I_D + I_S) \omega \rightarrow \frac{1}{8} ML^2 \omega_0 = \left(\frac{1}{8} ML^2 + \frac{KL^4}{24} \right) \omega \rightarrow 3M\omega_0 = (3M + KL^2) \omega$$

$$a) \quad \omega = \omega_0 \frac{3M}{(3M + KL^2)}$$

CALCOLIAMO ENERGIA CINETICA INIZIALE E FINALE

$$K_I = \frac{1}{2} I_D \omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} ML^2 \omega_0^2 = \frac{ML^2}{16} \omega_0^2$$

$$K_F = \frac{1}{2} (I_D + I_S) \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{24} (3M + KL^2) \cdot L^2 \cdot \omega_0^2 \frac{9M^2}{(3M + KL^2)^2} = \frac{3}{16} \frac{M^2 L^2 \omega_0^2}{(3M + KL^2)}$$

FACCIAMO IL RAPPORTO

$$\frac{K}{K_F} = \frac{\cancel{ML^2} \omega_0^2}{\cancel{16}} \cdot \frac{\cancel{16} (3M + KL^2)}{3 \cancel{M^2 L^2} \omega_0^2} = \frac{3M + KL^2}{3M} \rightarrow b) \quad \frac{K_I}{K_F} = 1 + \frac{KL^2}{3M}$$

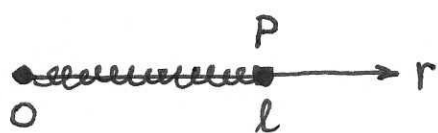
CHE È CERTAMENTE MAGGIORE DI 1 - LA FORZA CENTRIFUGA È DOVUTA SOLO ALLA SBARRA, ESSENDO IL DISCO SIMMETRICO. CALCOLIAMOLA

PARTENDO DALLA FORMULA $d\vec{F}_c = \omega^2 \vec{r} dm$

$$F_{c_x} = \int dF_{c_x} = \int \omega^2 x dm = \int_{-L/2}^{+L/2} \omega^2 x \frac{dm}{dx} dx = \omega^2 k \int_{-L/2}^{+L/2} \left(x^2 + \frac{L}{2} x \right) dx =$$

$$= \omega^2 k \left[\frac{x^3}{3} + \frac{L}{2} \frac{x^2}{2} \right]_{-L/2}^{+L/2} = \omega^2 k \left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{16} + \frac{L^3}{24} - \frac{L^3}{16} \right) = \frac{L^3}{12} \omega^2 k =$$

$$= \frac{L^3}{12} \frac{9M^2}{(3M + KL^2)^2} \omega_0^2 k \rightarrow c) \quad F_{c_x} = \frac{3KM^2 \omega_0^2 L^3}{4(3M + KL^2)^2} > 0$$



USIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO RUOTANTE CON LA STESSA ω DELLA SBARRA E SIA l LA COORDINATA RADIALE (LUNGO LA SBARRA) DEL PUNTO P. l COINCIDE CON LA LUNGHEZZA DELLA MOLLA.

SE m È LA MASSA DI P E K LA COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA, SU P AGISCONO ① LA FORZA ELASTICA $F_{e,r} = -K(l - l_0)$ E VISTO CHE IL S.R. È RUOTANTE, ② LA FORZA CENTRIFUGA $F_{c,r} = m\omega^2 l$. TROVIAMO K . SE $\omega = \omega_0$ E $l = nl_0$ SI HA EQUILIBRIO, CHE VOGL DIRE $F_{TOT,r} = 0$, QUINDI:

$$-K(nl_0 - l_0) + m\omega_0^2 nl_0 = 0 \rightarrow -K(n-1)l_0 + m\omega_0^2 nl_0 = 0$$

PER CUI $K = m\omega_0^2 \frac{n}{n-1}$ E L'EQ. DEL MOTO $F_{TOT,r} = m\ddot{l}$ DIVENTA:

$$-m\omega_0^2 \frac{n}{n-1} (l - l_0) + m\omega^2 l = m\ddot{l}$$

$$-\omega_0^2 \frac{n}{n-1} l + \omega_0^2 \frac{n}{n-1} l_0 + \omega^2 l = \ddot{l}$$

$$\ddot{l} + \left[\omega_0^2 \frac{n}{n-1} - \omega^2 \right] l = \omega_0^2 \frac{n}{n-1} l_0 \quad (3)$$

PERCHÈ QUESTA SIA L'EQUAZIONE DI UN OSCILLATORE ARMONICO È NECESSARIO CHE IL COEFFICIENTE DI l IN PARENTESI QUADRA SIA POSITIVO:

$$\omega_0^2 \frac{n}{n-1} - \omega^2 > 0 \rightarrow a) \quad \omega < \omega_0 \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$b) \quad \frac{\omega_0}{\sqrt{n-1}} < \omega_0 \sqrt{\frac{n}{n-1}} \rightarrow \sqrt{n} > 1$$

CHÈ È VERIFICATA PERCHÈ IL TESTO DELL'ESERCIZIO GARANTISCE CHE $n > 1$

CON LA CONDIZIONE $\omega = \omega_0 / \sqrt{n-1}$ L'EQ (3) DIVENTA:

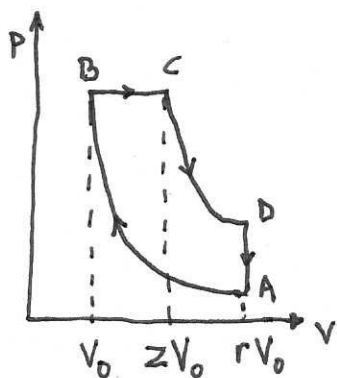
$$\ddot{l} + \left[\omega_0^2 \frac{n}{n-1} - \omega_0^2 \frac{1}{n-1} \right] l = \omega_0^2 \frac{n}{n-1} l_0 \rightarrow \ddot{l} + \omega_0^2 l = \omega_0^2 \frac{n}{n-1} l_0$$

CHÈ HA COME SOLUZIONE GENERALE

$$l = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{n}{n-1} l_0$$

PER CUI

$$c) \Delta l_{EQ} = l_{EQ} - l_0 = \frac{n}{n-1} l_0 - l_0 = \frac{l_0}{n-1} \quad E \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



$Q_{AB} = Q_{CD} = 0$ PERCHÉ ADIABATICHE

$$Q_{BC} = nC_p(T_C - T_B) > 0 ; Q_{DA} = nC_v(T_A - T_D) < 0$$

QUINDI $Q_C = Q_{BC} = nC_p(T_C - T_B)$; $Q_F = -Q_{DA} = nC_v(T_D - T_A)$

E PER IL RENDIMENTO

$$\varepsilon = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{nC_v(T_D - T_A)}{nC_p(T_C - T_B)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)}$$

USIAMO IL FATTO CHE $A \rightarrow B$ E $C \rightarrow D$ SONO ADIABATICHE E SCRIVIAMO TUTTE LE TEMPERATURE IN FUNZIONE DI T_B

$$A \rightarrow B \quad T_A (rV_0)^{\gamma-1} = T_B V_0^{\gamma-1} \rightarrow T_A = \frac{1}{r^{\gamma-1}} T_B$$

$$B \rightarrow C \text{ ISOBARA} \rightarrow P_C = P_B \rightarrow \frac{nRT_C}{zV_0} = \frac{nRT_B}{V_0} \rightarrow T_C = z T_B$$

$$C \rightarrow D \quad T_D (rV_0)^{\gamma-1} = T_C (zV_0)^{\gamma-1} \rightarrow T_D = \frac{z^{\gamma-1}}{r^{\gamma-1}} T_C = \frac{z^{\gamma}}{r^{\gamma-1}} T_B$$

QUINDI

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_B \left(\frac{z^{\gamma}}{r^{\gamma-1}} - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \right)}{T_B (z - 1)} = 1 - \frac{(z^{\gamma} - 1)}{\gamma r^{\gamma-1} (z - 1)}$$