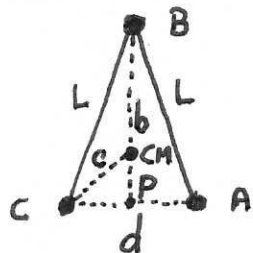


NELLO STATO INIZIALE $E = \frac{1}{2} m v^2$ AVENDO CHIAMATO m LA MASSA DI OGNUNA DELLE TRE. IL MOMENTO ANGOLARE RISPETTO AL C.M. VALE (VERSO ORARIO POSITIVO) $L_{CM} = m v L$. LA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA $\vec{P} = m \vec{v}$ È VISTO CHE SEMPRE $\vec{P}_{SIG} = m_{TOT} \vec{v}_{CM}$ ALLORA $m \vec{v} = 3m \vec{v}_{CM} \rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{1}{3} \vec{v}$

DURANTE IL MOTO SUCCESSIVO QUANDO LA DISTANZA TRA A E C ASSUME IL SUO VALORE MINIMO, CHE CHIAMIAMO d , LA VELOCITÀ RELATIVA DI A RISPETTO A C VALE ZERO, DUNQUE SI POSSONO TRATTARE LE TRE MASSE IN QUEL MOMENTO COME SE FOSSE UN CORPO RIGIDO. SIA P IL PUNTO DI MEZZO DI $\overline{CA}$. SIA h L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO ISOSCELE $\triangle CBA$, CIOÈ LA LUNGHEZZA DI $\overline{BP}$. IL C.M. STA COME NOTO AD $\frac{1}{3}$ DELL'ALTEZZA h ①. CHIAMIAMO b LA DISTANZA DI B DAL C.M., CHIAMIAMO



c LA DISTANZA DI C DAL C.M.

- PER PITAGORA $h^2 = L^2 - \frac{d^2}{4}$; PER ① $b = \frac{2}{3}h \rightarrow b^2 = \frac{4}{9}h^2 = \frac{4}{9}L^2 - \frac{1}{9}d^2$ ②
- PER PITAGORA + ① $c^2 = \left(\frac{1}{3}h\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{9}h^2 + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{9}L^2 - \frac{1}{36}d^2 + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{9}L^2 + \frac{2}{9}d^2$

QUINDI IL MOMENTO D'INERZIA VALE

$$I_{CM} = m b^2 + 2 \cdot m c^2 = \frac{m}{9} (4L^2 - d^2 + 2L^2 + 4d^2) = \frac{m}{9} (6L^2 + 3d^2) = \frac{m}{3} (2L^2 + d^2)$$

SCRIVIAMO IL 2° TEOREMA DI KOENIG:

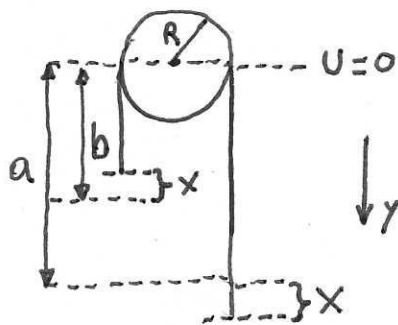
$$E = \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

NEL QUALE POSSIAMO SOSTITUIRE $E = E_{INIZIALE} = \frac{1}{2} m v^2$ PER CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA; $m_{TOT} = 3m$; $v_{CM} = v_{CM INIZIALE} = v/3$ PER CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO; I_{CM} APPENA TROVATO; $\omega^2 = (L_{CM}/I_{CM})^2$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 3m \frac{v^2}{9} + \frac{1}{2} \frac{L_{CM}^2}{I_{CM}} \quad \text{CON } L_{CM} = L_{CM INIZIALE} \text{ PER CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE} = m v L$$

$$m v^2 = \frac{m v^2}{3} + \frac{3m v^2 L^2}{m(2L^2 + d^2)}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{3L^2}{2L^2 + d^2} \rightarrow 4L^2 + 2d^2 = 9L^2 \rightarrow d^2 = \frac{5}{2} L^2 \rightarrow d = \sqrt{\frac{5}{2}} L$$



SE LA CORDA SI SPOSTA DI x I DUE RAMI PENDENTI AVRANNO LUNGHEZZE: $b-x$ E $a+x$

LA DENSITÀ DI MASSA LINEARE DELLA CORDA VALE λ E QUINDI LE MASSE DEI RAMI SINISTRO E DESTRO VALGONO RISPETTIVAMENTE $m_s = \lambda(b-x)$, $m_D = \lambda(a+x)$ ED I LORO CENTRI DI MASSA STANNO A QUOTA:

$$y_s = \frac{(b-x)}{2} \text{ E } y_D = \frac{(a+x)}{2}$$

DETTA m LA MASSA DELLA CORDA, CON $m = \lambda(a+b+\pi R)$ POSSIAMO SCRIVERE L'ENERGIA MECCANICA DEL SISTEMA, A PARTE COSTANTI

$$E = U + K = -m_s g y_s - m_D g y_D + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2$$

$$E = -\lambda g (b-x) \frac{(b-x)}{2} - \lambda g (a+x) \frac{(a+x)}{2} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} M \dot{x}^2$$

$$E = -\frac{\lambda g}{2} (b^2 + x^2 - 2bx + a^2 + x^2 + 2ax) + \frac{1}{2} (m + \frac{M}{2}) \dot{x}^2$$

COST. COST.

$$E = -\lambda g (x^2 + (a-b)x) + \frac{1}{2} (m + \frac{M}{2}) \dot{x}^2$$

VISTO CHE L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA IMPONIAMO $\frac{dE}{dt} = 0$

$$-2\lambda g x \dot{x} - \lambda g (a-b) \dot{x} + \frac{1}{2} (m + \frac{M}{2}) 2\dot{x} \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{2\lambda g x}{[\lambda(a+b+\pi R) + \frac{M}{2}]} = \frac{\lambda g (a-b)}{[\lambda(a+b+\pi R) + \frac{M}{2}]}$$

CHE È DEL TIPO PROPOSTO NEL TESTO, CON

$$\alpha^2 = \frac{2\lambda g}{[\lambda(a+b+\pi R) + \frac{M}{2}]} \text{ E } \beta = \frac{\lambda g (a-b)}{[\lambda(a+b+\pi R) + \frac{M}{2}]}$$

IMPONIAMO LE CONDIZIONI INIZIALI

$$x(0) = 0 \rightarrow A + B - \frac{a-b}{2} = 0 \rightarrow A = B = \frac{a-b}{4}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \rightarrow A - B = 0$$

ED INFINE

$$x(t) = \frac{(a-b)}{4} e^{\alpha t} + \frac{(a-b)}{4} e^{-\alpha t} - \frac{(a-b)}{2}$$

CON $\alpha = \sqrt{\frac{2\lambda g}{[\lambda(a+b+\pi R) + M/2]}}$

USIAMO IL TEOREMA DI TORRICELLI: $P_0 = P_{Hg} \cdot g \cdot \gamma_0 \rightarrow P_{Hg} = \frac{P_0}{g \gamma_0}$ (1)

A) SITUAZIONE INIZIALE. EQUILIBRIO DELLE FORZE VERTICALI SUL SETTO:

SE P_1 È LA PRESSIONE DEL GAS SI HA $P_1 = P_{ESTERNA}$ (ARIA + Hg) $\rightarrow$

$$P_1 = P_0 + P_{Hg} g (h - l_0) \stackrel{(1)}{=} P_0 + \frac{P_0}{g \gamma_0} g (h - l_0) = P_0 + P_0 \frac{(h - l_0)}{\gamma_0} = P_0 + P_0 \frac{(76 \text{ cm})}{(76 \text{ cm})}$$

$P_1 = 2P_0$. IL VOLUME DEL GAS È $V_1 = S l_0$. PER LA LEGGE DEI GAS PERFETTI:

$$n R T_0 = P_1 V_1 = 2 P_0 S l_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \frac{1}{2} \text{ m} = 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 10^3 \text{ J} = 1 \text{ kJ} \quad (2)$$

PER CUI $n = \frac{1000 \text{ J}}{R T_0}$ MA $R T_0 = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300,7 \text{ K} = 2500 \text{ J}$ ED ALLORA:

$$[1.] n = \frac{1000 \text{ J}}{2500 \text{ J}} = 0,4 \text{ MOLI}$$

B) SITUAZIONE FINALE. SIA l (INCIGNITA) LA LUNGHEZZA DELLA MOLLA

SI HA $l < l_0$ (3) [LA PRESSIONE DEL MERCURIO È AUMENTATA] IL VOLUME DEL GAS È:

$$V_2 = l S. \text{ PER LA LEGGE DEI GAS } n R T_0 = P_2 V_2 \rightarrow P_2 = \frac{n R T_0}{l S} \rightarrow P_2 S = \frac{1000 \text{ J}}{l} \quad (4)$$

SCRIVIAMO L'EQUILIBRIO DELLE FORZE VERTICALI SUL SETTO:

$$P_2 S - K(l - l_0) = [P_0 + P_{Hg} g (h - l)] S. \text{ USIAMO LA (2) E LA (1)}$$

$$\frac{1000 \text{ J}}{l} - K l + K l_0 = P_0 S + \frac{P_0}{g \gamma_0} g h S - \frac{P_0}{g \gamma_0} g l S. \text{ MA } \frac{h}{\gamma_0} = \frac{152 \text{ cm}}{76 \text{ cm}} = 2, \text{ QUINDI:}$$

$$\frac{1000 \text{ J}}{l} - K l + K l_0 = 3 P_0 S - \frac{P_0 S}{\gamma_0} l. \quad \text{CI CONVIENE MOLTIPLICARE PER } \frac{l}{K}$$

$$\frac{1000 \text{ J}}{K} - l^2 + l_0 l = \frac{3 P_0 S}{K} l - \frac{P_0 S}{\gamma_0 K} l^2 \quad \text{ORA, } \frac{P_0 S}{K} = \frac{10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}{10^3 \text{ N/m}} = 1 \text{ m}$$

$$\frac{1000 \text{ J}}{K} = \frac{1000 \text{ N} \cdot \text{m}}{1000 \text{ N/m}} = 1 \text{ m}^2 \text{ PER CUI}$$

$$1 \text{ m}^2 - l^2 + \frac{1}{2} \text{ m} l = 3 \text{ m} l - 1,316 l^2$$

$$0,316 l^2 - 2,5 \text{ m} l + 1 \text{ m}^2 = 0 \quad \text{EQ DI 2° GRADO}$$

$$l = \left[\frac{2,5 \pm \sqrt{6,25 - 4 \cdot 0,316}}{2 \cdot 0,316} \right] \text{ m} = \left[\frac{2,5 \pm 2,233}{0,632} \right] \text{ m} \quad \text{TENIAMO CONTO DELLA (3) E SCEGLIAMO LA SOLUZ COL SEGNO MENO}$$

$$l \approx 0,42 \text{ m} \quad \text{E QUINDI } [2.] V_2 = l S \rightarrow V_2 = 0,42 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

LA TRASFORMAZIONE COMPIUTA È UNA ISOTERMA REVERSIBILE

QUINDI PER IL CALORE SI HA:

$$\Delta U = Q + W = 0 \rightarrow Q = -W$$

$$[3.] Q = n R T_0 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \stackrel{(2)}{=} 1000 \text{ J} \ln \left(\frac{42}{50} \right) = -174 \text{ J}$$