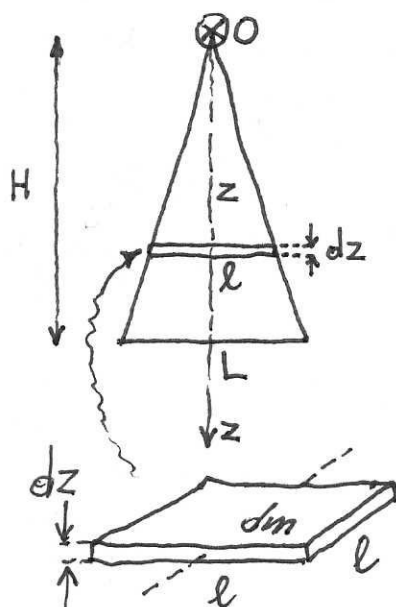
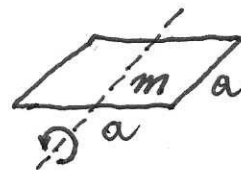




IL VOLUME TOTALE È $V = \frac{1}{3} L^2 H$ PER CUI

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} = \frac{3M}{L^2 H} \quad (1)$$

PER UNA LASTRA SOTTILE QUADRATA DI LATO l E MASSA m IL MOMENTO D'INERZIA RISPETTO AD UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO E DIRETTO COME DUE DEI LATI DELLA LASTRA È UGUALE A QUELLO DI UN'ASTA SOTTILE $I = \frac{1}{12} m l^2$ (2)



PRENDIAMO ORA UNA FETTA

SOTTILE DI PIRAMIDE A QUOTA z E SPESSA dz .

IL LATO l SI PUÒ CALCOLARE CON LA PROPORZIONE $H:L = z:l \rightarrow l = \frac{Lz}{H}$ (3)

PER CUI LA MASSA (INFINITESIMA)

SARÀ $dm = \rho l^2 dz$ CHE USANDO (1) E (3) DIVENTA

$$dm = \frac{3M}{L^2 H} \frac{L^2 z^2}{H^2} dz = \frac{3M}{H^3} z^2 dz$$

PER LA (2) CALCOLIAMO IL MOMENTO D'INERZIA INTORNO ALL'ASSE CHE PASSA PER IL C.M. DELLA FETTA

$$dI' = \frac{1}{12} dm l^2 = \frac{1}{12} \frac{3M}{H^3} z^2 \frac{L^2 z^2}{H^2} = \frac{1}{4} \frac{ML^2}{H^5} z^4 dz$$

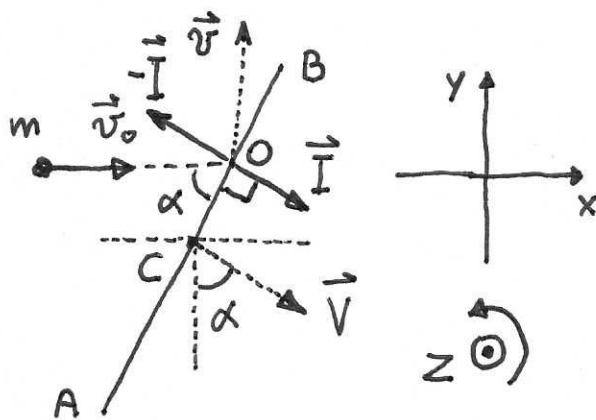
USIAMO ORA IL TH. DI STEINER PER TROVARE IL MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE PARALLELO CHE PASSA PER O

$$dI_o = dm z^2 + dI' = \frac{3M}{H^3} z^4 dz + \frac{1}{4} \frac{ML^2}{H^5} z^4 dz = \frac{M}{4H^3} \left(12 + \frac{L^2}{H^2} \right) z^4 dz$$

E FINALMENTE INTEGRIAMO DA $z=0$ A $z=H$

$$I_o = \int dI_o = \frac{M}{4H^3} \left(12 + \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right) \int_0^H z^4 dz = \frac{M}{4H^3} \left(12 + \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right) \frac{H^5}{5}$$

$$I_o = \frac{MH^2}{20} \left(12 + \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right)$$



VISTO CHE L'URTO È ELASTICO, L'IMPULSO $\vec{I}$ SCAMBIATO TRA m E L'ASTA È PERPENDICOLARE ALL'ASTA STESSA, ESSO FORMA QUINDI UN ANGOLO $90^\circ - \alpha$ CON L'ASSE x . PER IL TEOREMA DELL'IMPULSO, INOLTRE, $\vec{I} = M\vec{V}$ E QUINDI LO STESSO SI PUÒ DIRE DI $\vec{V}$. CIOÈ

$$\begin{cases} V_x = V \sin \alpha \\ V_y = -V \cos \alpha \end{cases} \quad \text{①} \quad \begin{array}{l} \text{SCRIVIAMO} \\ \text{LA CONSERVAZIONE} \\ \text{DELLA QUANTITÀ} \\ \text{DI MOTO} \end{array} \quad \begin{cases} m v_0 = m v_x + M V_x \\ 0 = m v_y + M V_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 - \frac{M}{m} V \sin \alpha \\ v_y = \frac{M}{m} V \cos \alpha \end{cases} \quad \text{②}$$

USIAMO ORA LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE. SCEGLIAMO O COME POLO IN MODO CHE m NON ABBA NESSUN MOMENTO NÈ PRIMA NÈ DOPO L'URTO. PER L'ASTA SCRIVIAMO L_z USANDO IL 1° TEOREMA DI KOENIG:

$$L_{z \text{ INIZ}} = L_{z \text{ FIN}} \rightarrow 0 = \frac{1}{4} M V + \frac{1}{12} M L^2 \omega_z \rightarrow \omega_z = -\frac{3V}{L} \quad \text{③}$$

SCRIVIAMO QUINDI LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA

$$E_{\text{INIZ}} = E_{\text{FIN}} \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega_z^2$$

USIAMO ② E ③

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \left(\frac{M}{m} \right)^2 V^2 \sin^2 \alpha - 2 \frac{M}{m} v_0 V \sin \alpha + \left(\frac{M}{m} \right)^2 V^2 \cos^2 \alpha \right) + \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \frac{M L^2}{12} \cdot \frac{9 V^2}{L^2}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{m} V^2 - M v_0 V \sin \alpha + \frac{1}{2} M V^2 + \frac{3}{8} M V^2$$

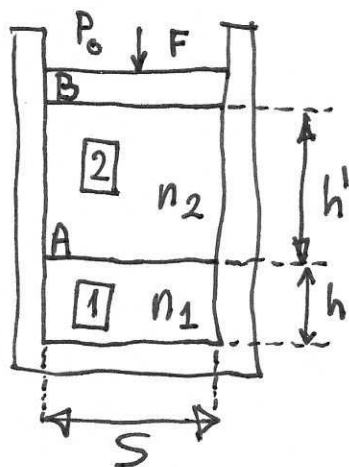
$$\left(\frac{4M + 4m + 3m}{8m} \right) V = v_0 \sin \alpha \rightarrow V = \frac{8m}{(4M + 7m)} v_0 \sin \alpha$$

ED USANDO LE ① E LA ③

$$V_x = \frac{8m}{(4M + 7m)} v_0 \sin^2 \alpha$$

$$V_y = -\frac{8m}{(4M + 7m)} v_0 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\omega_z = -\frac{24}{(4M + 7m)} \frac{v_0}{L} \sin \alpha$$



SIA S L'AREA DI BASE DEL CILINDRO, h L'ALTEZZA FISSA DEL VOLUME [1] ED h' L'ALTEZZA DEL VOLUME [2] CHE VARIA DA $h_i = 2h$ A $h_f = h$

GRAZIE AL FATTO CHE ALL'INIZIO B È IN EQUILIBRIO SAPPIAMO CHE IN [2] LA PRESSIONE È QUELLA ATMOSFERICA, QUINDI DALLA LEGGE DEI GAS

$$P_0 \underbrace{2h \cdot S}_{V_i} = n_2 R T_0 \quad h = \frac{n_2 R T_0}{2 P_0 S}$$

INOLTRE PER [2] CONOSCIAMO $V_i = 2h \cdot S$, $V_f = h \cdot S$ $V_f/V_i = 1/2$ (4)

- TROVIAMO L'EQUAZIONE DELLA TRASFORMAZIONE DI [2] DURANTE LA COMPRESSIONE. PREMETTIAMO CHE SI PUÒ PARLARE DI UNA UNICA TEMPERATURA DEL SISTEMA T POICHÉ A È TRASPARENTE AL CALORE.

- IL VOLUME [1] È COSTANTE, PER CUI IL LAVORO $W_1 = 0$ È DAL 1° PRINCIPIO APPLICATO A [1] $dU_1 = dQ_1 = n_1 c_v dT$ (1)

- SICCOME IL SISTEMA [1] + [2] È UN SISTEMA ISOLATO $dQ_1 + dQ_2 = 0$ (2)

$$\text{DA (1) E (2)} \rightarrow dQ_2 = -dQ_1 = -n_1 c_v dT \quad (3)$$

SCRIVIAMO IL 1° PRINCIPIO PER [2] TENENDO CONTO DI (3)

$$dU_2 = dQ_2 + dW_2 \rightarrow n_2 c_v dT = -n_1 c_v dT - P_2 dV = -n_1 c_v dT - \frac{n_2 R T}{V} dV \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{n_1 + n_2}{n_2} c_v \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V} \rightarrow \int_i^f \frac{dT}{T} = -\frac{n_2 R}{(n_1 + n_2) c_v} \int_i^f \frac{dV}{V} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \ln\left[\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{-\frac{n_2 R}{(n_1 + n_2) c_v}}\right] \quad (4) \rightarrow T_f = T_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{n_2 R}{(n_1 + n_2) c_v}} \quad \text{CON } \begin{matrix} n_1 = 2/10 \\ n_2 = 6/10 \\ c_v = 3/2 R \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_f = T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} = T_0 2^{1/2} = \sqrt{2} T_0 \rightarrow \boxed{T_f = \sqrt{2} T_0}$$

PER IL LAVORO DELLA FORZA ESTERNA, TENENDO CONTO ANCHE DEL LAVORO DELLA PRESSIONE ATMOSFERICA, APPLICHIAMO IL 1° PRINCIPIO A TUTTO IL GAS

$$(n_1 + n_2) c_v (T_f - T_i) = -P_0 (V_f - V_i) + W_F \rightarrow \frac{8}{10} \frac{3}{2} R (T_0 \sqrt{2} - T_0) = +P_0 \cdot h \cdot S + W_F \rightarrow$$

$$\rightarrow W_F = \frac{6}{5} R T_0 (\sqrt{2} - 1) - \frac{6}{10} \frac{R T_0}{2} \Rightarrow \boxed{W_F = \frac{(12\sqrt{2} - 15)}{10} R T_0}$$

$$\text{PER LA PRESSIONE, DA } P_f = \frac{n_2 R T_f}{V_f} = \frac{n_2 \cdot R \cdot \sqrt{2} T_0}{h \cdot S} = \frac{\sqrt{2} n_2 R T_0}{n_2 R T_0} \cdot 2 P_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{P_f = 2\sqrt{2} P_0}$$