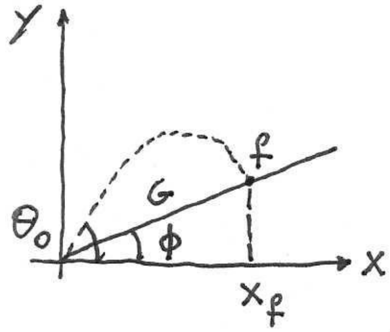


LA TRAIETTORIA PARAMETRICA DEL PROIETTILE È

$$\begin{cases} X = V_0 \cos\theta_0 t \\ Y = V_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (1)$$

TROVIAMO IL TEMPO DI ARRIVO NEL PUNTO f IMPONENDO LA INTERSEZIONE DI (1) COL PIANO, CHE HA EQ $Y = tg\,\phi\, X$.

$$Y = tg\,\phi\, X \rightarrow \cos\phi\, Y = \sin\phi\, X \rightarrow$$

$$\rightarrow V_0 \sin\theta_0 \cos\phi \cancel{t} - \frac{1}{2} g \cos\phi\, t^{\cancel{2}} = V_0 \cos\theta_0 \sin\phi \cancel{t}$$

$$\frac{1}{2} g \cos\phi\, t = V_0 (\sin\theta_0 \cos\phi - \cos\theta_0 \sin\phi) = V_0 \sin(\theta_0 - \phi)$$

$$t^* = \frac{2V_0 \sin(\theta_0 - \phi)}{g \cos\phi} \quad (2)$$

PER CUI, DA (1) E (2)

$$x_f = V_0 \cos\theta_0 t^* = \frac{2V_0^2 \cos\theta_0 \sin(\theta_0 - \phi)}{g \cos\phi}$$

E SICCOME $G = \frac{x_f}{\cos\phi}$ (VEDI FIGURA)

$$G = \frac{2V_0^2}{g} \frac{\cos\theta_0 \sin(\theta_0 - \phi)}{\cos^2\phi}$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE

PER MASSIMIZZARE LA GITTATA CALCOLIAMO $\frac{dG}{d\theta_0} = 0$

$$\left(\frac{2V_0^2}{g\cos^2\phi}\right)\left(-\sin\theta_0 \sin(\theta_0 - \phi) + \cos\theta_0 \cos(\theta_0 - \phi)\right) = 0$$

$$\cos(\theta_0 + (\theta_0 - \phi)) = 0 \rightarrow \cos(2\theta_0 - \phi) = 0$$

CIOÈ $2\theta_0 - \phi = \frac{\pi}{2} (+n\pi) \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \left(+ n\frac{\pi}{2}\right)$ È FACILE VEDERE CHE SI DEVE AVERE $n = 0$ ALTRIMENTI SI OTTERREBBE $\theta_0 < \phi$ OPPURE $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, SOLUZIONI INACCETTABILI. CHE SI TRATTI DI UN MASSIMO DI G È EVIDENTE PONENDO $\phi = 0$. QUINDI

MAX G PER $\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}}$ QUINDI $\theta_0 - \phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ E

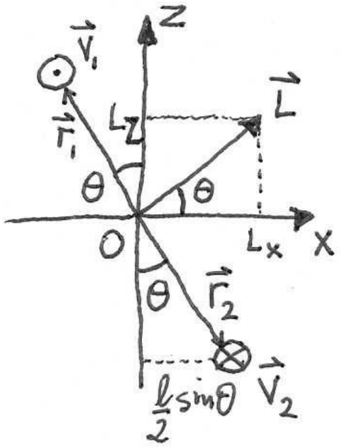
$$\text{MAX } G = \frac{2V_0^2}{g\cos^2\phi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2V_0^2}{g\cos^2\phi} \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\phi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\phi}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\phi}{2}\right)$$

$$= \frac{2V_0^2}{g\cos^2\phi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\right) =$$

$$= \frac{V_0^2}{g\cos^2\phi}\left(\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\right)^2 = \frac{V_0^2}{g\cos^2\phi}\left(\cos^2\frac{\phi}{2} + \sin^2\frac{\phi}{2} - 2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right)$$

QUINDI $\boxed{\text{MAX } G = \frac{V_0^2(1 - \sin\phi)}{g\cos^2\phi} = \frac{V_0^2}{g(1 + \sin\phi)}}$

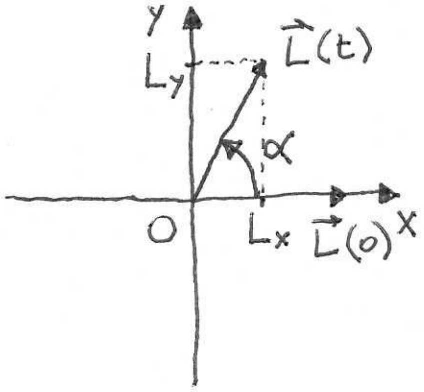


$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = \frac{\ell}{2}$; $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = \omega \frac{\ell}{2} \sin\theta$. NOTIAMO CHE $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$ E $\vec{V}_2 = -\vec{V}_1$, QUESTO SIGNIFICA (VISTO CHE $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$) CHE $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$ E $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 2\vec{L}_1$. SICCOME $\vec{r}_1$ E $\vec{V}_1$ SONO PERPENDICOLARI TRA LORO $|\vec{L}_1| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{V}_1| \cdot \sin 90^\circ = m\omega \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \sin\theta$ E $|\vec{L}| = 2|\vec{L}_1| = 2\, m\omega \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \sin\theta$ MENTRE DIREZIONE E VERSO DI $\vec{L}$ SI TROVANO CON LA REGOLA DELLA MANO DESTRA (VEDI FIGURA)

COMINCIAMO CON LE RISPOSTE: ANCORA PER LA REGOLA DELLA MANO DESTRA

a) L'ASSE Y DEVE ESSERE <u>ENTRANTE</u> NEL PIANO X-Z DEL DISEGNO

b) $L_x = |\vec{L}| \cos\theta = \frac{1}{2} m\omega \ell^2 \sin\theta\cos\theta$, $L_y = 0$, $L_z = |\vec{L}| \sin\theta = \frac{1}{2} m\omega \ell^2 \sin^2\theta$



DISEGNANDO IL SISTEMA VISTO DALL'ALTO, E QUINDI PROIETTATO SUL PIANO X-Y, POSSIAMO VEDERE L'ANGOLO DI ROTAZIONE $\alpha = \omega t$ CHE AUMENTA COL TEMPO. QUINDI LA COMPONENTE "ORIZZONTALE" DI $\vec{L}$ CHE È $L_{xy} = |\vec{L}| \cos\theta$ SI PROIETTA TOTALMENTE SU X PER $t = 0$ MENTRE SI PROIETTA SIA SU X CHE SU Y PER $t > 0$ CON COSENO E SENO DI α.

LA COMPONENTE "VERTICALE" L_z RIMANE INVECE COSTANTE. PER CUI

c) $L_x = \frac{1}{2} m\omega \ell^2 \sin\theta\cos\theta\cos(\omega t)$, $L_y = \frac{1}{2} m\omega \ell^2 \sin\theta\cos\theta\sin(\omega t)$, $L_z = \frac{1}{2} m\omega \ell^2 \sin^2\theta$

ABBIAMO CALCOLATO $\vec{L}_O$, IL MOMENTO ANGOLARE DEL SISTEMA RISPETTO AD O CHE È ANCHE IL C.M. DEL SISTEMA. DETTO P UN ALTRO PUNTO QUALSIASI, IL 1° TEOREMA DI KOENIG DICE CHE:

$\vec{L}_P = \vec{r}_{PO} \times m_{sis} \vec{V}_O + \vec{L}_O$, MA $\vec{V}_O$ (LA VELOCITÀ DELL'ORIGINE) $= 0$, QUINDI

d) $\vec{L}_P = \vec{L}_O$ $\forall$ PUNTO P

PER IL MOMENTO MECCANICO USIAMO $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ VISTO CHE A E B SONO GLI UNICI OGGETTI ESTERNI CHE ESERCITANO FORZE E MOMENTI MECCANICI SUL SISTEMA.

e) $M_x = \frac{dL_x}{dt} = -\frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin\theta\cos\theta\sin(\omega t)$

$M_y = \frac{dL_y}{dt} = \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin\theta\cos\theta\cos(\omega t)$

$M_z = \frac{dL_z}{dt} = 0$

I

SITUAZIONE INIZIALE $P_0, V_0, T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$ ① SITUAZIONE FINALE $P_1 = g P_0, \; V_1 = f V_0, \; T_1 = fg \frac{P_0 V_0}{nR}$ ②

SI HA $\frac{dU}{dW} = K$ ③ MA $dU = n c_v dT$ E $dW = -P dV = -\frac{nRT}{V} dV$ QUINDI

$$-\frac{\cancel{n} c_v V \, dT}{\cancel{n} R T \, dV} = K \rightarrow -c_v \frac{dT}{T} = KR \frac{dV}{V}$$ E ORA INTEGRIAMO DA ① A ②

$$-c_v \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = KR \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} \rightarrow -c_v \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = KR \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$ SOSTITUENDO T_1, T_0, V_1, V_0

$$-c_v \ln(fg) = KR \ln(f) \rightarrow K = -\frac{c_v}{R} \frac{\ln(fg)}{\ln(f)}$$ ④

DA ③ $$\frac{dU}{dW} = K \rightarrow \int_0^1 dW = \frac{1}{K} \int_0^1 dU \rightarrow W = \frac{1}{K} \Delta U = \frac{1}{K} n c_v (T_1 - T_0)$$

SOSTITUENDO K DA ④, T_1 E T_0 DA ① E ②

$$W = -\frac{R}{\cancel{c_v}} \frac{\ln(f)}{\ln(fg)} \cancel{n} \cancel{c_v} \frac{P_0 V_0}{\cancel{nR}} (fg - 1)$$

$$W = -\frac{P_0 V_0 \ln(f)(fg-1)}{\ln(fg)}$$