© 978-88-08-06625-1

Per determinare i valori delle altre funzioni tramite un triangolo rettangolo di questo tipo, si supponga che il cateto opposto all'angolo di 30° abbia lunghezza unitaria. Si ha quindi

$$c = \frac{1}{0{,}5} = 2 \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866 \qquad \mathrm{tg}\ 30° = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

$$\mathrm{sen}\ 60° = \frac{b}{c} = \cos 30° = 0{,}866 \qquad \cos 60° = \frac{a}{c} = \mathrm{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{tg}\ 60° = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1{,}732$$

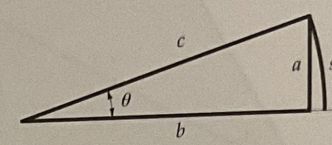


FIGURA **M.18** Per piccoli angoli, sen $\theta = a/c$, tg $\theta = a/b$ e l'angolo $\theta = s/c$ sono approssimativamente uguali.

Approssimazioni per piccoli angoli

Per piccoli angoli, a risulta quasi uguale alla lunghezza s dell'arco, come si può vedere dalla figura M.18. L'angolo $\theta = s/c$ pertanto è quasi uguale a sen $\theta = a/c$:

$$\mathrm{sen}\ \theta \approx \theta \quad \text{per piccoli valori di } \theta \qquad \textbf{M.40}$$

In modo simile, c e b hanno lunghezza quasi uguale, perciò tg $\theta = a/b$ è quasi uguale sia a θ sia a sen θ, per piccoli valori di θ:

$$\mathrm{tg}\ \theta \approx \mathrm{sen}\ \theta \approx \theta \quad \text{per piccoli valori di } \theta \qquad \textbf{M.41}$$

Le equazioni M.40 e M.41 sussistono solo se θ è espresso in radianti. Dato che $\cos\theta = b/c$ e che i valori di b e c sono quasi uguali per piccoli valori di θ, si ha:

$$\cos\theta \approx 1 \quad \text{per piccoli valori di } \theta \qquad \textbf{M.42}$$

La figura M.19 mostra dei grafici delle funzioni θ, sen θ e tg θ per piccoli valori dell'argomento θ. Se è richiesta un'accuratezza dell'ordine dell'1%, si può usare l'approssimazione appena discussa per angoli di circa un quarto di radiante (circa 15°) o minori. Più gli angoli sono piccoli, più l'approssimazione $\theta \approx$ sen $\theta \approx$ tg θ è accurata.

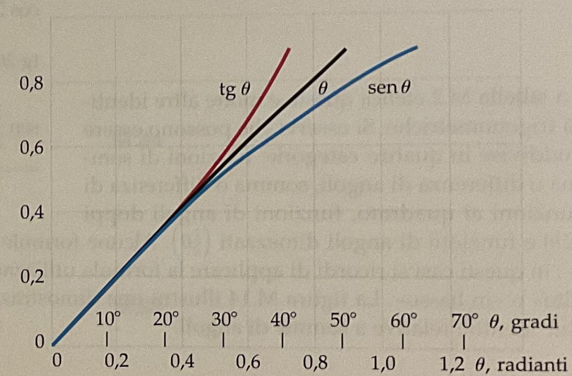


FIGURA **M.19** Grafici che mostrano l'andamento di tg θ, θ e sen θ in funzione di θ per piccoli valori di θ.

Funzioni trigonometriche di numeri reali

Finora le funzioni trigonometriche sono state usate per illustrare le proprietà di angoli. La figura M.20 mostra un angolo ottuso avente il vertice nell'origine e una delle rette che lo formano lungo l'asse x. Le funzioni trigonometriche per un angolo «generico» di questo tipo sono definite da:

$$\mathrm{sen}\ \theta = \frac{y}{c} \qquad \textbf{M.43}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{c} \qquad \textbf{M.44}$$

$$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{y}{x} \qquad \textbf{M.45}$$

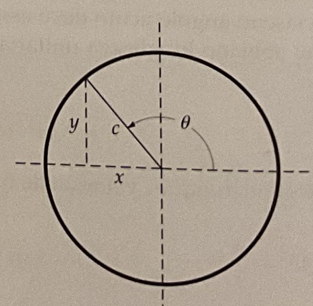


FIGURA **M.20** Diagramma usato per definire le funzioni trigonometriche di angoli ottusi.

È importante ricordare che valori di x a sinistra dell'asse delle ordinate e valori di y al di sotto dell'asse delle ascisse sono negativi; il valore di c indicato in figura si considera sempre positivo. La figura M.21 mostra i grafici delle funzioni generiche seno, coseno e tangente in funzione di θ. La funzione seno è periodica con periodo pari a 2π rad. Quindi, per ciascun valore di θ, sen$(\theta + 2\pi)$ = sen θ. Cioè, quando l'argomento varia di 2π rad, la funzione torna al valore iniziale. La fun-

978-88-08-06625-1

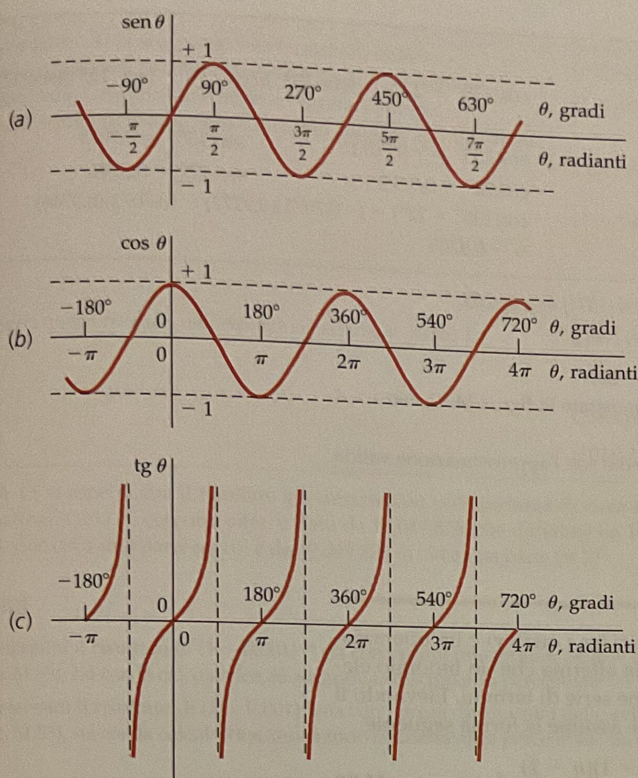


FIGURA **M.21** Grafici delle funzioni trigonometriche sen θ, cos θ e tg θ.

zione tangente è periodica con periodo pari a π rad. Quindi $\text{tg}(\theta + \pi) = \text{tg}\,\theta$. Altre relazioni utili sono le seguenti:

$$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta \qquad \textbf{M.46}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad \textbf{M.47}$$

$$\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \cos\theta \qquad \textbf{M.48}$$

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta \qquad \textbf{M.49}$$

Dato che i radianti sono adimensionali, non è difficile vedere dai grafici di figura M.21 che le funzioni trigonometriche sono definite per tutti i numeri reali. Tali funzioni possono essere anche espresse come serie di potenze di θ. Le serie che esprimono sen θ e cos θ sono:

$$\text{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \qquad \textbf{M.50}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \qquad \textbf{M.51}$$

Per θ piccolo, si ottengono buone approssimazioni usando solo i primi termini delle serie.

Esempio M.9 Coseno di una somma di angoli

Utilizzando l'opportuna identità trigonometrica, tra quelle elencate nella tabella M.2, determinare $\cos(135° + 22°)$. Fornire il risultato con quattro cifre significative.

IMPOSTAZIONE Gli angoli vengono dati in gradi e non c'è bisogno di convertirli in radianti, dato che tutte le operazioni forniscono valori numerici. Ci si assicuri, tuttavia, che la calcolatrice sia nella modalità giusta per eseguire i calcoli in gradi. L'identità da usare è $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$, selezionando i segni «in alto».

© 978-88-08-06625-1

SOLUZIONE

1. Scrivi l'identità trigonometrica che fornisce il coseno di una somma, con $\alpha = 135°$ e $\beta = 22°$: $\cos(135° + 22°) = (\cos 135°)(\cos 22°) - (\operatorname{sen} 135°)(\operatorname{sen} 22°)$
2. Tramite una calcolatrice, calcola i valori di cos 135°, sen 135°, cos 22° e sen 22°: $\cos 135° = -0{,}7071$ $\quad \operatorname{sen} 135° = 0{,}7071$ $\quad \cos 22° = 0{,}9272$ $\quad \operatorname{sen} 22° = 0{,}3746$
3. Inserendo i valori nella formula ricava il valore cercato: $\cos(135° + 22°) = (-0{,}7071)(0{,}9272) - (0{,}7071)(0{,}3746) = -0{,}9205$

VERIFICA La calcolatrice mostra che $\cos(135° + 22°) = \cos(157°) = -0{,}9205$.

Problemi

19. Determinare sen θ e cos θ per il triangolo rettangolo mostrato in figura M.12, con $a = 4$ cm e $b = 7$ cm. Qual è il valore di θ?

20. Determinare sen θ per $\theta = 8{,}2°$. Il risultato è consistente con l'approssimazione valida per piccoli angoli?

M.9 Sviluppo binomiale

Un **binomio** è un'espressione formata da due termini tra i quali vi è un'operazione di somma o di sottrazione. Il **teorema binomiale** afferma che un binomio elevato a potenza può essere scritto, o sviluppato, come serie di termini. Elevando il binomio $(1 + x)$ alla potenza n, il teorema binomiale assume la forma seguente:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad \text{M.52}$$

La serie è valida per ogni valore di n se $|x|$ è minore di 1. Lo sviluppo binomiale è molto utile per approssimare le espressioni algebriche, perché quando $|x| < 1$ i termini di ordine più alto della serie sono piccoli (l'ordine di un termine è la potenza a cui è elevato x in quel termine; i termini esplicitamente mostrati nell'equazione M.52 sono di ordine 0, 1, 2 e 3). La serie è particolarmente utile nelle situazioni in cui $|x|$ è piccolo rispetto a 1; allora ciascun termine è *molto* più piccolo del precedente e possono essere utilizzati solo i primo due o tre termini dello sviluppo. Se $|x|$ è molto minore di 1 si ha:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx, \qquad |x| \ll 1 \qquad \text{M.53}$$

Lo sviluppo in serie binomiale viene usato nella derivazione di molte formule dell'analisi matematica che rivestono una certa importanza in fisica. Una ben nota applicazione dell'equazione M.53 è la dimostrazione che l'espressione per l'energia cinetica relativistica si riduce alla formula classica quando la velocità di una particella è molto piccola rispetto alla velocità della luce c.

Esempio M.10 Un utilizzo dello sviluppo binomiale

Determinare, tramite l'equazione M.53, un valore approssimato per la radice quadrata di 101.

IMPOSTAZIONE Il numero 101 suggerisce immediatamente un binomio e cioè $(100 + 1)$. Per determinare un risultato approssimato applicando lo sviluppo binomiale occorre eseguire alcune operazioni algebriche che portino a un binomio formato dal numero 1 e da un termine minore di 1.

SOLUZIONE

1. Scrivi $(101)^{1/2}$ in modo da ottenere un'espressione del tipo $(1 + x)^n$ con x molto minore di 1: $(101)^{1/2} = (100 + 1)^{1/2} = (100)^{1/2}(1 + 0{,}01)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2}$
2. Applica l'equazione M.53 con $n = \frac{1}{2}$ e $x = 0{,}01$ per ottenere lo sviluppo in serie di $(1 + 0{,}01)^{1/2}$: $(1 + 0{,}01)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(0{,}01) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(0{,}01)^2 + \cdots$

© 978-88-08-06625-1

3. Dato che $|x| \ll 1$, ci si aspetta che i termini di ordine maggiore o uguale a 2 siano trascurabili rispetto al termine di primo ordine. Approssima la serie binomiale prima con i soli termini di ordine zero e uno, poi con i primi tre termini.

Con i primi due termini si ottiene:

$$(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(0{,}01) = 1 + 0{,}005\,000\,0 = 1{,}005\,000\,0$$

Con i primi tre termini si ottiene:

$$(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(0{,}01) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(0{,}01)^2 \approx 1 + 0{,}005\,000\,0 - 0{,}000\,012\,5 = 1{,}004\,987\,5$$

4. Sostituisci questi risultati nell'equazione scritta al punto 1.

Con i primi due termini si ottiene:

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx \boxed{10{,}050\,000}$$

Con i primi tre termini si ottiene:

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx \boxed{10{,}049\,875}$$

VERIFICA Ci si aspetta che il risultato sia corretto con un'incertezza di circa lo 0,001%. Il valore esatto di $(101)^{1/2}$, con otto cifre, è dato da 10,049 876, che differisce da 10,050 000 di 0,000 124, cioè circa una parte su 10^5 e da 10,049 875 di circa una parte su 10^7.

Problemi

21. Si determini il risultato di $(1 + 0{,}001)^{-4}$ sia con i primi due termini dello sviluppo binomiale (eq. M.53), sia con la calcolatrice, mostrando la discrepanza percentuale tra i due valori.

22. Si determini il risultato di $(1 - 0{,}001)^{40}$ sia con i primi due termini dello sviluppo binomiale (eq. M.53), sia con la calcolatrice, mostrando la discrepanza percentuale tra i due valori.

M.10 Numeri complessi

I **numeri reali** sono tutti i numeri compresi tra $-\infty$ e $+\infty$ che possono essere *ordinati*. Vale a dire, dati due numeri reali, uno è sempre uguale, maggiore o minore dell'altro. Per esempio $3 > 2$, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ e $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Un numero che sfugge a questo processo di ordinamento è $\sqrt{-1}$; non si può quantificare questo numero, per cui non ha senso dire, per esempio, che $3 \times \sqrt{-1}$ è maggiore o minore di $2 \times \sqrt{-1}$. I primi matematici alle prese con numeri che contenevano $\sqrt{-1}$ si riferivano a essi con il termine di *numeri immaginari*, perché non potevano essere usati per misurare o contare qualcosa. In matematica il numero $\sqrt{-1}$ viene indicato con il simbolo i.

L'equazione M.5, cioè la formula quadratica, si applica a equazioni che hanno la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Questa formula mostra che non esistono radici reali quando $b^2 < 4ac$. Però ci sono sempre due radici e ciascuna di esse è un numero costituito da due termini: un numero reale e un multiplo di $i = \sqrt{-1}$. Il multiplo di i è detto **numero immaginario**, mentre i è detta **unità immaginaria**.

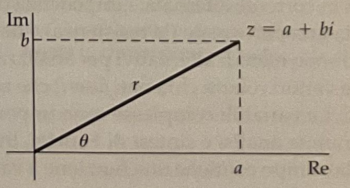
Un generico **numero complesso** z può essere scritto come

$$z = a + bi \qquad \textbf{M.54}$$

dove a e b sono numeri reali. Il numero a è detto *parte reale* di z, o Re(z), mentre il numero b è detto *parte immaginaria*, o Im(z). Un numero complesso z può essere rappresentato come punto in un piano, detto *piano complesso*, come mostrato in figura M.22, dove l'asse x rappresenta l'**asse reale** e l'asse y l'**asse immaginario**. Si possono anche usare le relazioni $a = r\cos\theta$ e $b = r \operatorname{sen}\theta$ (fig. M.22) per scrivere il numero complesso z in coordinate polari (un sistema di coordinate in cui un punto è identificato dall'angolo θ, formato con un asse fisso e percorso in senso antiorario, e dalla distanza r lungo la direzione di θ):

$$z = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{M.55}$$

dove $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ è detta **intensità** di z.



$$z = a + bi = r\cos\theta + (r\operatorname{sen}\theta)i = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

FIGURA **M.22** Rappresentazione di un numero complesso nel piano complesso. La parte reale del numero complesso è rappresentata lungo l'asse orizzontale, mentre la parte immaginaria è rappresentata lungo l'asse verticale.

© 978-88-08-06625-1

Nella somma e nella sottrazione di numeri complessi, le parti reali e immaginarie vanno sommate o sottratte separatamente:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \textbf{M.56}$$

Nella moltiplicazione, invece, ciascuna parte di un numero complesso deve essere moltiplicata per entrambe le parti dell'altro numero:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned} \quad \textbf{M.57}$$

in cui si è sfruttato il fatto che $i^2 = -1$.

Il **complesso coniugato** z^* di un numero complesso z è il numero che si ottiene sostituendo i con $-i$ nel numero z. Se $z = a + ib$ si ha:

$$z^* = (a + ib)^* = a - ib \quad \textbf{M.58}$$

Quando un'equazione di secondo grado ha radici complesse, queste hanno la forma di numeri complessi coniugati, cioè sono del tipo $a \pm ib$. Il prodotto tra un numero complesso e il suo complesso coniugato è uguale al quadrato dell'intensità:

$$zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2 \quad \textbf{M.59}$$

Una funzione particolarmente utile con argomento complesso è la funzione esponenziale avente forma $e^{i\theta}$. Utilizzando lo sviluppo in serie valido per la funzione e^x si ha:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

Sfruttando le relazioni $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ e così via, e separando le parti reali da quelle immaginarie, lo sviluppo in serie si può scrivere nel modo seguente:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right)$$

Dal confronto di questo risultato con le equazioni M.50 e M.51 è evidente che

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \quad \textbf{M.60}$$

Questo consente di esprimere un generico numero complesso z in forma esponenziale:

$$z = a + ib = r\cos\theta + ir \operatorname{sen}\theta = re^{i\theta} \quad \textbf{M.61}$$

Se $z = x + iy$, dove x e y sono variabili reali, z è detta **variabile complessa**.

Variabili complesse in fisica

Le variabili complesse vengono spesso usate nelle formule che descrivono i circuiti in corrente alternata; l'impedenza di una capacità o di un'induttanza è costituita da una parte reale (la resistenza) e da una parte complessa (la reattanza), anche se ci sono metodi alternativi per analizzare circuiti di questo tipo (per esempio, tramite vettori rotanti chiamati *fasori*) che non richiedono l'utilizzo dei numeri complessi. Le variabili complesse sono importanti anche nello studio di onde sinusoidali tramite analisi e sintesi di Fourier. Infine l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo contiene una funzione a valori complessi dello spazio e del tempo.

Esempio M.11 Potenze di numeri complessi

Calcolare $(1 + 3i)^4$ utilizzando lo sviluppo binomiale.

IMPOSTAZIONE L'espressione data ha forma $(1 + x)^n$. Visto che n è un intero positivo, lo sviluppo vale per ogni valore di x, e tutti i termini diversi da quelli di ordine minore o uguale a n sono nulli.

© 978-88-08-06625-1

SOLUZIONE

1. Scrivi lo sviluppo di $(1 + 3i)^4$, che contiene i termini fino al quarto ordine: $1 + 4 \cdot 3i + \frac{4(3)}{2!}(3i)^2 + \frac{4(3)(2)}{3!}(3i)^3 + \frac{4(3)(2)(1)}{4!}(3i)^4$
2. Valuta ciascun termine, ricordando che $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = +1$: $1 + 12i - 54 - 108i + 81$
3. Scrivi il risultato nella forma $a + bi$: $(1 + 3i)^4 = \boxed{28 - 96i}$

VERIFICA Si può risolvere il problema algebricamente per mostrare che il risultato è corretto. Si elevi prima al quadrato $(1 + 3i)$ e quindi si elevi di nuovo al quadrato il risultato:

$$(1 + 3i)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$$

$$(-8 + 6i)^2 = (-8)(-8) + 2(-8)(6i) + (6i)^2 = 64 - 96i - 36 = 28 - 96i$$

Problemi

23. Esprimere il numero complesso $e^{i\pi}$ nella forma $a + bi$.

24. Esprimere il numero complesso $e^{i\pi/2}$ nella forma $a + bi$.

M.11 Calcolo differenziale

L'**analisi** è quella parte della matematica che studia il comportamento locale (cioè corrispondente a variazioni infinitesimali) di funzioni e variabili. Dall'equazione di una funzione (per esempio, un'espressione di x in funzione di t) è sempre possibile determinare x per ogni particolare valore di t, ma i metodi dell'analisi permettono di andare oltre. Si può sapere dove x ha determinate proprietà, per esempio dove assume un valore massimo o minimo, senza dover provare a sostituire tutti i possibili valori di t. Nelle applicazioni, se si hanno a disposizione i dati opportuni, questi metodi permettono di determinare, per esempio, la posizione di sforzo massimo in una trave, o velocità e posizione di un corpo che cade in un certo istante t, o l'energia acquisita da un tale corpo al momento dell'impatto. I princìpi dell'analisi derivano dallo studio delle funzioni a livello infinitesimale, cioè osservando come varia x quando la variazione di t diventa piccola a piacere. Il **calcolo differenziale**, in particolare, ha lo scopo di determinare il *limite* del rapporto tra la variazione di x rispetto a t e la variazione di t, quando questa diventa sempre più vicina a zero.

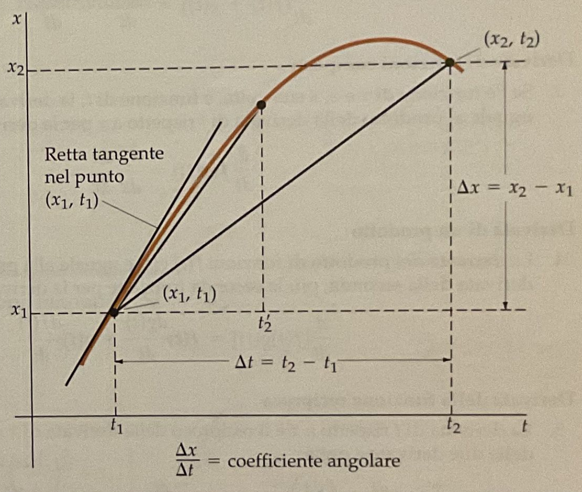


FIGURA **M.23** Grafico di una tipica funzione $x(t)$. È mostrata la retta passante per i punti (t_1, x_1) e (t_2, x_2). Il coefficiente angolare di questa retta vale $\Delta x/\Delta t$. Al diminuire dell'intervallo di tempo che ha inizio in t_1, il coefficiente angolare della retta corrispondente si avvicina al coefficiente angolare della retta tangente alla curva all'istante t_1, che rappresenta la derivata di x rispetto a t.

La figura M.23 mostra un grafico dell'andamento di x in funzione di t per una tipica funzione $x(t)$. In un particolare $t = t_1$, x assume il valore x_1, come indicato. In un altro valore t_2, x assume il valore x_2. La variazione di t, $t_2 - t_1$ si indica con Δt; la corrispondente variazione di x si indica con Δx. Il rapporto $\Delta x/\Delta t$ rappresenta il coefficiente angolare della retta che passa per i punti (t_1, x_1) e (t_2, x_2). Se passiamo al limite per t_2 che tende a t_1, cioè per Δt che tende a zero, il coefficiente angolare di questa retta si avvicina al coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto (t_1, x_1). La pendenza di questa retta tangente è detta **derivata** di x rispetto a t e si indica con dx/dt:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \textbf{M.62}$$

Quando si determina la derivata di una funzione, si dice che si sta **differenziando** (o **derivando**) quella funzione; le quantità elementari dx e dt sono detti, rispettivamente, **differenziali** di x e di t. La derivata di una funzione di t è ancora una funzione di t. Se x è costante (non varia con t), il grafico di x in funzione di t è rappresentato da una linea retta orizzontale con coefficiente angolare nullo.

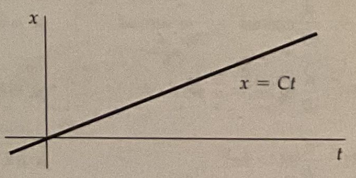


FIGURA **M.24** Grafico della funzione lineare $x = Ct$. Questa funzione ha coefficiente angolare costante uguale a C.

© 978-88-08-06625-1

Quindi la derivata di una costante è zero. In figura M.24 la funzione x non è costante ma proporzionale a t:

$$x = Ct$$

Questa funzione ha coefficiente angolare costante uguale a C. Perciò la derivata della funzione Ct vale C. La tabella M.3 elenca alcune proprietà delle derivate e le derivate di alcune particolari funzioni che si incontrano spesso nello studio della fisica. Sono accompagnate da osservazioni che servono a chiarire queste proprietà e regole. Per una trattazione più dettagliata si veda un testo di analisi matematica.

Tabella M.3 Proprietà delle derivate e derivate di funzioni particolari

Linearità

1. La derivata del prodotto di una costante C per una funzione $f(t)$ è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione:

$$\frac{d}{dt}[Cf(t)] = C\frac{df(t)}{dt}$$

2. La derivata della somma di funzioni è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni:

$$\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

Derivata di funzioni composte

3. Se f è funzione di x e x, a sua volta, è funzione di t, la derivata di f rispetto a t è uguale al prodotto della derivata di f rispetto a x per la derivata di x rispetto a t:

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Derivata di un prodotto

4. La derivata del prodotto di funzioni $f(t)\,g(t)$ è uguale alla prima funzione per la derivata della seconda, più la seconda funzione per la derivata della prima:

$$\frac{d}{dt}[f(t)g(t)] = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

Derivata della funzione reciproca

5. La derivata di t rispetto a x è il reciproco della derivata di x rispetto a t, se nessuna delle due derivate è nulla:

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} \quad \text{se} \quad \frac{dt}{dx} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Derivate di funzioni particolari

6. Se C è costante, $dC/dt = 0$

7. $\dfrac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}$ se n è costante

8. $\dfrac{d}{dt}\,\text{sen}\,\omega t = \omega \cos \omega t$ se ω è costante

9. $\dfrac{d}{dt}\cos \omega t = -\omega\,\text{sen}\,\omega t$ se ω è costante

10. $\dfrac{d}{dt}\,\text{tg}\,\omega t = \omega\,\text{sen}^2\,\omega t$ se ω è costante

11. $\dfrac{d}{dt}e^{bt} = be^{bt}$ se b è costante

12. $\dfrac{d}{dt}\ln bt = \dfrac{1}{t}$ se b è costante

© 978-88-08-06625-1

Osservazioni sulle regole dalla 1 alla 5

Le regole 1 e 2 seguono dal fatto che l'operazione di limite è lineare. La regola 3 per le funzioni composte può essere derivata moltiplicando $\Delta f/\Delta t$ per $\Delta x/\Delta x$, tenendo presente che quando Δt tende a zero, anche Δx tende a zero. Vale a dire:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta t} \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

dove si è sfruttato il fatto che il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti.

La regola 4 non è immediatamente evidente. La derivata del prodotto di funzioni è data dal limite del rapporto

$$\frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t)g(t)}{\Delta t}$$

Sommando e sottraendo la quantità $f(t + \Delta t)\, g(t)$ a numeratore, questo rapporto può essere scritto come

$$\frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t + \Delta t)g(t) + f(t + \Delta t)g(t) - f(t)g(t)}{\Delta t}$$

$$= f(t + \Delta t)\left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\right] + g(t)\left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right]$$

Quando Δt tende a zero, i termini tra parentesi quadre diventano, rispettivamente, $dg(t)/dt$ e $df(t)/dt$, e il limite di questa espressione vale

$$f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

La regola 5 segue direttamente dalla definizione:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{-1} = \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-1}$$

Osservazioni sulla regola 7

Questo importante risultato può essere ottenuto usando lo sviluppo binomiale. Si ha infatti:

$$f(t) = t^n$$

$$f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^n = t^n \left(1 + \frac{\Delta t}{t} \right)^n$$

$$= t^n \left[1 + n\frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^3 + \cdots \right]$$

Quindi

$$f(t + \Delta t) - f(t) = t^n \left[n\frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \cdots \right]$$

e

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} t^{n-2}\Delta t + \cdots$$

Il termine successivo in questa somma è proporzionale a $(\Delta t)^2$, il seguente a $(\Delta t)^3$ e così via. Ciascun termine, eccetto il primo, tende a zero quando Δt tende a zero. Pertanto si ha:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1}$$

Osservazioni sulle regole dalla 8 alla 10

Esprimendo sen ωt come sen θ con $\theta = \omega t$ e utilizzando la regola di derivazione per le funzioni composte si ha:

$$\frac{d \operatorname{sen} \theta}{dt} = \frac{d \operatorname{sen} \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d \operatorname{sen} \theta}{d\theta}$$

© 978-88-08-06625-1

Si sfrutti quindi l'identità trigonometrica per il seno della somma di due angoli, rappresentati da θ e $\Delta\theta$:

$$\text{sen}(\theta + \Delta\theta) = \text{sen}\,\Delta\theta \cos\theta + \cos\Delta\theta\,\text{sen}\,\theta$$

Dato che $\Delta\theta$ tende a zero, si può usare l'approssimazione per piccoli angoli:

$$\text{sen}\,\Delta\theta \approx \Delta\theta \qquad \text{e} \qquad \cos\Delta\theta \approx 1$$

Quindi

$$\text{sen}(\theta + \Delta\theta) \approx \Delta\theta \cos\theta + \text{sen}\,\theta$$

e

$$\frac{\text{sen}(\theta + \Delta\theta) - \text{sen}\,\theta}{\Delta\theta} \approx \cos\theta$$

In modo simile si può derivare la regola 9 per la funzione coseno.

La regola 10 si ottiene scrivendo $\text{tg}\,\theta = \text{sen}\,\theta/\cos\theta$ e applicando la regola 4 insieme alle regole 8 e 9:

$$\frac{d}{dt}(\text{tg}\,\theta) = \frac{d}{dt}(\text{sen}\,\theta)(\cos\theta)^{-1} = \text{sen}\,\theta\frac{d}{dt}(\cos\theta)^{-1} + \frac{d(\text{sen}\,\theta)}{dt}(\cos\theta)^{-1}$$
$$= \text{sen}\,\theta(-1)(\cos\theta)^{-2}(-\text{sen}\,\theta) + (\cos\theta)(\cos\theta)^{-1}$$
$$= \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \text{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

Per ottenere la regola 10 basta quindi porre $\theta = \omega t$ e applicare la regola di derivazione delle funzioni composte.

Osservazioni sulla regola 11

Si applichi di nuovo la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{de^\theta}{dt} = \frac{b\,de^\theta}{b\,dt} = b\frac{de^\theta}{d(bt)} = b\frac{de^\theta}{d\theta} \qquad \text{con} \qquad \theta = bt$$

e lo sviluppo in serie della funzione esponenziale:

$$e^{\theta+\Delta\theta} = e^\theta e^{\Delta\theta} = e^\theta\left[1 + \Delta\theta + \frac{(\Delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\Delta\theta)^3}{3!} + \cdots\right]$$

Quindi

$$\frac{e^{\theta+\Delta\theta} - e^\theta}{\Delta\theta} = e^\theta + e^\theta\frac{\Delta\theta}{2!} + e^\theta\frac{(\Delta\theta)^2}{3!} + \cdots$$

Quando $\Delta\theta$ tende a zero, il membro a destra di questa equazione tende a e^θ.

Osservazioni sulla regola 12

Sia

$$y = \ln bt$$

Quindi

$$e^y = bt \Rightarrow t = \frac{1}{b}e^y$$

Applicando la regola 11 si ottiene:

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{b}e^y \therefore \frac{dt}{dy} = t$$

Infine, applicando la regola 5 si ha:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dt}{dy}\right)^{-1} = \frac{1}{t}$$

Derivate di ordine superiore; analisi dimensionale

Dopo aver differenziato una funzione, si può differenziale la derivata ottenuta fino a che rimangono termini da differenziare. Una funzione come $x = e^{bt}$ può essere derivata infinite volte: infatti $dx/dt = be^{bt}$; a sua volta la derivata di questa funzione vale $b^2 e^{bt}$, e così via.

Si considerino i concetti di velocità e accelerazione. La velocità può essere definita come variazione della posizione di un punto materiale nell'unità di tempo, vale a dire come dx/dt, mentre l'accelerazione può essere definita come variazione della velocità nell'unità di tempo, ossia come *derivata seconda* di x rispetto a t, indicata con d^2x/dt^2. Se un punto materiale è in moto con velocità costante, allora dx/dt è costante. L'accelerazione sarà invece nulla; velocità costante e accelerazione nulla sono la stessa cosa, e infatti la derivata di una costante è nulla. Si consideri poi un corpo che cade sotto l'azione dell'accelerazione di gravità costante: la velocità ora dipende dal tempo, mentre sarà la *derivata seconda* della posizione, d^2x/dt^2, a essere costante.

Le *dimensioni fisiche* di una derivata rispetto a una variabile sono quelle che si avrebbero se la funzione originale fosse divisa per un valore della variabile. Per esempio, le dimensioni di una funzione che esprime la variabile x (posizione) sono quelle di una lunghezza (L); le dimensioni della derivata di x rispetto al tempo sono quelle di una velocità (L/T), mentre le dimensioni di d^2x/dt^2 sono quelle di un'accelerazione (L/T^2).

Esempio M.12 Posizione, velocità e accelerazione

Determinare le derivate prima e seconda di $x = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, dove a, b e c sono costanti. Questa funzione dà la posizione (espressa in m), all'istante t, di un punto materiale in moto unidimensionale, dove t è il tempo (espresso in s), a è l'accelerazione (espressa in m/s^2), b è la velocità (espressa in m/s) nell'istante $t = 0$ e c è la posizione (espressa in m) del punto materiale in $t = 0$.

IMPOSTAZIONE Sia per la derivata prima sia per la derivata seconda occorre differenziare somme di termini; si derivi ciascun termine separatamente e si sommino i risultati.

SOLUZIONE

1. Per calcolare la derivata prima, deriva innanzitutto il primo termine:
$$\frac{d(\frac{1}{2}at^2)}{dt} = \left(\frac{1}{2}a\right)2t^1 = at$$
2. Deriva quindi il secondo e il terzo termine:
$$\frac{d(bt)}{dt} = b \qquad \frac{d(c)}{dt} = 0$$
3. Sommando i risultati si ha:
$$\frac{dx}{dt} = at + b$$
4. Per il calcolo della derivata seconda, deriva di nuovo ciascun termine e fai la somma:
$$\frac{d^2x}{dt^2} = a + 0 = a$$

VERIFICA Le dimensioni fisiche dei risultati mostrano che sono plausibili. La funzione di partenza è un'espressione per la posizione; tutti i termini sono in metri, infatti le unità di misura di t^2 e di t si semplificano, rispettivamente, con i s^2 e i s delle costanti a e b. Nella funzione che esprime dx/dt si vede allo stesso modo che tutti i termini sono espressi in m/s; la costante c, derivata, dà zero e l'unità di misura di t si semplifica con i s della costante a. Nella funzione che esprime d^2x/dt^2 rimane solo la costante a; le sue dimensioni sono quindi L/T^2, secondo le aspettative.

Problemi

25. Determinare dy/dx per $y = \frac{5}{8}x^3 - 24x - \frac{5}{8}$.

26. Determinare dy/dt per $y = ate^{bt}$, dove a e b sono costanti.

© 978-88-08-06625-1

Equazioni differenziali e numeri complessi

Un'**equazione differenziale** è un'equazione in cui le derivate di una funzione appaiono come variabili. È un'equazione, cioè, in cui le variabili sono espresse l'una in funzione dell'altra tramite le loro derivate. Si consideri un'equazione avente forma

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = A\cos\omega t \qquad \textbf{M.63}$$

Si tratta di un'equazione che descrive un processo fisico, come un oscillatore armonico smorzato e forzato da una sollecitazione sinusoidale, oppure un circuito *RLC* alimentato da una tensione sinusoidale. Anche se ognuno dei parametri che compare nell'equazione M.63 è un numero reale, il termine dipendente dal tempo contenente il coseno suggerisce una soluzione stazionaria di questa equazione, che può essere determinata con l'introduzione dei numeri complessi. Costruiamo innanzitutto un'equazione «ausiliaria» data da:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = A\,\text{sen}\,\omega t \qquad \textbf{M.64}$$

Questa equazione non ha significato fisico di per sé, e non serve risolverla. Tuttavia può essere d'aiuto nel risolvere l'equazione M.63. Si moltiplichi membro a membro l'equazione M.64 per l'unità immaginaria i e quindi la si sommi all'equazione M.63. Si ottiene:

$$\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + ai\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(b\frac{dx}{dt} + bi\frac{dy}{dt}\right) + (cx + ciy) = A\cos\omega t + Ai\,\text{sen}\,\omega t$$

Riarrangiando i termini si ha:

$$a\frac{d^2(x+iy)}{dt^2} + b\frac{d(x+iy)}{dt} + c(x+iy) = A(\cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t) \qquad \textbf{M.65}$$

dove si è sfruttato il fatto che la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate. Si ponga $z = x + iy$ e si utilizzi l'identità $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t$. Sostituendo nell'equazione M.65 si ottiene:

$$a\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + cz = Ae^{i\omega t} \qquad \text{M.66}$$

che si può risolvere rispetto a z. Una volta ottenuta z, x può essere ricavata come $\text{Re}(z)$.

Dato che si sta cercando una soluzione stazionaria dell'equazione M.65, si può supporre che la sua forma sia del tipo $x = x_0\cos(\omega t - \phi)$, dove ϕ è una costante. Questo equivale ad assumere che la soluzione all'equazione M.66 abbia la forma $z = \eta e^{i\omega t}$, dove η è una costante complessa. Quindi si ha $dz/dt = i\omega z$, $d^2z/dt^2 = -\omega^2 z$ e $e^{i\omega t} = z/\eta$. Sostituendo queste espressioni nell'equazione M.66 si ha:

$$-a\omega^2 z + i\omega bz + cz = A\frac{z}{\eta}$$

Dividendo membro a membro per z e risolvendo rispetto a η si ottiene:

$$\eta = \frac{A}{-a\omega^2 + i\omega b + c}$$

Esprimendo il denominatore in forma polare si ha:

$$(-a\omega^2 + c) + i\omega b = \sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}\,e^{i\phi}$$

dove $\text{tg}\,\phi = \omega^2 b^2/(-a\omega^2 + c)$. Quindi

$$\eta = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}}e^{-i\phi}$$

© 978-88-08-06625-1

Segue che

$$z = \eta e^{i\omega t} = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} [\cos(\omega t - \phi) + i \operatorname{sen}(\omega t - \phi)] \quad \textbf{M.67}$$

Risulta pertanto

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad \textbf{M.68}$$

Funzione esponenziale

Una **funzione esponenziale** è una funzione avente forma a^{bx}, dove $a > 0$ e b sono costanti. La funzione esponenziale più comunemente usata è e^{cx}, dove c è una costante.

Quando la variazione di una quantità (per esempio, nell'unità di tempo) è proporzionale alla quantità stessa, allora questa cresce o decresce esponenzialmente, a seconda del segno della costante di proporzionalità. Un esempio di funzione con *decremento esponenziale* è quella che descrive il decadimento radioattivo. Se N è il numero di nuclei radioattivi in un determinato istante, allora la variazione dN relativa a un intervallo di tempo molto piccolo dt sarà proporzionale a N e a dt:

$$dN = -\lambda N\, dt$$

dove λ è detta *costante di decadimento* (da non confondersi con il tasso di decadimento dN/dt, che è una funzione che decresce esponenzialmente). La funzione N che soddisfa questa equazione è data da:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \textbf{M.69}$$

dove N_0 è il valore di N nell'istante $t = 0$. La figura M.25 mostra l'andamento di N in funzione di t. Una caratteristica del decadimento esponenziale è che N decresce di un fattore costante in un dato intervallo di tempo. L'intervallo di tempo necessario perché N si riduca della metà rispetto al valore originale è detto *tempo di dimezzamento* $t_{1/2}$. Il tempo di dimezzamento si ottiene dall'equazione M.69 ponendo $N = \frac{1}{2}N_0$ e risolvendo rispetto al tempo. Si ha:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} \quad \textbf{M.70}$$

Un esempio di *crescita esponenziale* è fornito dalla crescita di una popolazione. Se N rappresenta il numero di organismi, la variazione di N dopo un intervallo di tempo molto piccolo dt è data da:

$$dN = +\lambda N\, dt$$

dove λ è detta, in questo caso, *costante di crescita*. La funzione N che soddisfa questa equazione è data da:

$$N = N_0 e^{\lambda t} \quad \textbf{M.71}$$

(Si osservi che il segno dell'esponente, in questo caso, è positivo). In figura M.26 è mostrato il grafico di questa funzione. La crescita esponenziale è caratterizzata dal tempo di raddoppio T_2, legato a λ dalla relazione

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} \quad \textbf{M.72}$$

Molto spesso la crescita della popolazione è nota in termini di aumento percentuale annuale e si vuole calcolare il tempo di raddoppio. In questo caso T_2 (in anni) può essere determinato tramite la relazione

$$T_2 = \frac{69{,}3}{r} \quad \textbf{M.73}$$

dove r è la percentuale annua. Per esempio, se la popolazione cresce del 2% all'anno, raddoppia ogni $69{,}3/2 \approx 35$ anni. La tabella M.4 elenca alcune relazioni utili per funzioni esponenziali e logaritmiche.

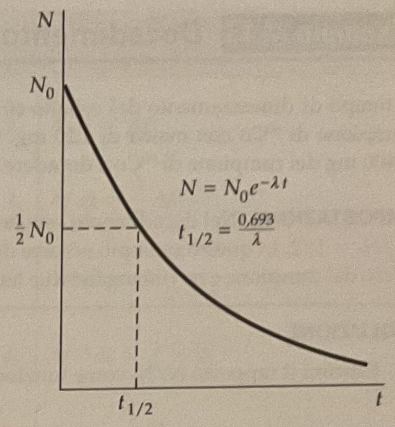


FIGURA **M.25** Grafico di N in funzione di t quando N decresce esponenzialmente. L'istante $t_{1/2}$ rappresenta il tempo che N impiega a dimezzarsi.

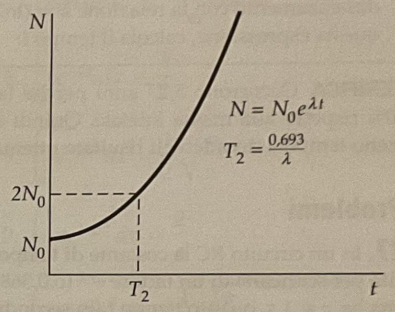


FIGURA **M.26** Grafico di N in funzione di t quando N cresce esponenzialmente. L'istante T_2 rappresenta il tempo che N impiega a raddoppiare.

Tabella M.4 Funzioni esponenziali e logaritmiche

$e = 2{,}718\,28$

$e^0 = 1$

Se $y = e^x$, allora $x = \ln y$

$e^{\ln x} = x$

$e^x e^y = e^{(x+y)}$

$(e^x)^y = e^{xy} = (e^y)^x$

$\ln e = 1; \quad \ln 1 = 0$

$\ln xy = \ln x + \ln y$

$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

$\ln e^x = x; \quad \ln a^x = x \ln a$

$\ln x = (\ln 10) \log x$

$\quad = 2{,}30\,26 \log x$

$\log x = (\log e) \ln x = 0{,}434\,29 \ln x$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \ldots$

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

© 978-88-08-06625-1

Esempio M.13 Decadimento radioattivo del cobalto-60

Il tempo di dimezzamento del cobalto-60 (^{60}Co) vale 5,27 anni. Nell'istante $t = 0$ si ha un campione di ^{60}Co con massa di 1,20 mg. Qual è il tempo impiegato (espresso in anni) da 0,400 mg del campione di ^{60}Co a decadere?

IMPOSTAZIONE Nel decadimento esponenziale il tempo di dimezzamento è quello per cui $N/N_0 = 1/2$. In questo esempio occorre determinare il tempo necessario perché decada un terzo del campione e ne rimangano due terzi. Perciò il rapporto N/N_0 dovrà valere 0,667.

SOLUZIONE

1. Esprimi il rapporto N/N_0 come funzione esponenziale:
$$\frac{N}{N_0} = 0{,}667 = e^{-\lambda t}$$
2. Considera il reciproco di entrambi i membri:
$$\frac{N_0}{N} = 1{,}50 = e^{\lambda t}$$
3. Ricava t:
$$t = \frac{\ln 1{,}50}{\lambda} = \frac{0{,}405}{\lambda}$$
4. La costante di decadimento può essere espressa in termini del tempo di dimezzamento con la relazione $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$ (eq. M.70). Sostituendo questa espressione, calcola il tempo t:
$$t = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} t_{1/2} = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} \times 5{,}27 \text{ anni} = 3{,}08 \text{ anni}$$

VERIFICA Occorrono 5,27 anni perché la massa di un campione di ^{60}Co diminuisca del 50% rispetto alla massa iniziale. Quindi ci si aspetta che il 33,3% del campione impieghi meno tempo a decadere. Il risultato ottenuto di 3,08 anni soddisfa le aspettative.

Problemi

27. In un circuito *RC* la costante di tempo τ di una capacità è il tempo necessario alla capacità per scaricarsi di un fattore e^{-1} (o 0,368) rispetto alla carica iniziale in $t = 0$. Se una capacità ha $\tau = 1$ s, quanto tempo t (in secondi) occorre perché si scarichi del 50,0% rispetto alla carica iniziale?

28. Se la popolazione dei coyote in uno stato aumenta dell'8,0% ogni 10 anni e continua ad aumentare con lo stesso tasso indefinitamente, quanti anni occorrono perché raggiunga un numero pari a 1,5 volte quello attuale?

M.12 Calcolo integrale

L'**integrazione** può essere considerata il processo inverso della derivazione. Se la funzione $f(t)$ viene *integrata*, si determina una funzione $F(t)$ tale che $f(t)$ costituisce la derivata di $F(t)$ rispetto a t.

Integrale come area sottesa da una curva; analisi dimensionale

La determinazione dell'area sottesa da una curva illustra il processo di integrazione. La figura M.27 mostra il grafico di una funzione $f(t)$. L'area dell'elemento indicato in grigio è approssimativamente uguale a $f_i \Delta t_i$, dove f_i è il valore della funzione per un qualche valore di t interno all'intervallo Δt_i. Questa approssimazione è tanto più accurata quanto più Δt_i è piccolo. L'area totale sottesa da un determinato tratto di curva può essere determinata sommando tutte le aree elementari sottese e passando al limite per Δt_i che tende a zero. Il valore di questo limite è detto **integrale** di f su t e si indica con

$$\int f\, dt = \text{area}_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i \Delta t_i \qquad \textbf{M.74}$$

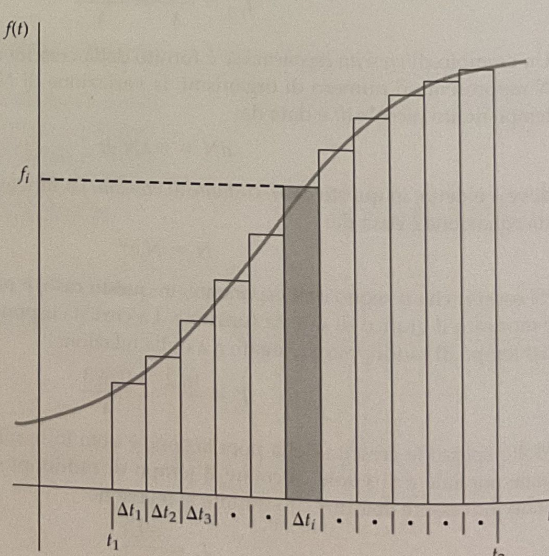


FIGURA **M.27** Generica funzione $f(t)$. L'area dell'elemento indicato in grigio vale grosso modo $f_i \Delta t_i$, dove f_i è il valore assunto dalla funzione in un punto qualsiasi dell'intervallo.

© 978-88-08-06625-1

Le *dimensioni fisiche* dell'integrale di una funzione $f(t)$ si determinano moltiplicando le dimensioni della *funzione integranda* (cioè la funzione da integrare) per quelle della variabile di integrazione t. Per esempio, se la funzione integranda è la velocità $v(t)$ (con dimensioni L/T), e la variabile di integrazione è il tempo t, le dimensioni dell'integrale sono L = (L/T) × T, cioè sono quelle di una velocità per un tempo.

Sia

$$y = \int_{t_1}^{t} f\,dt \qquad \textbf{M.75}$$

La funzione y rappresenta l'area sottesa dalla curva $f(t)$, dall'istante t_1 a un generico istante t. Per un piccolo intervallo Δt la variazione dell'area Δy è data approssimativamente da $f\,\Delta t$:

$$\Delta y \approx f\,\Delta t$$

$$f \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Passando al limite per Δt che tende a zero, si vede che f è proprio la derivata di y:

$$f = \frac{dy}{dt} \qquad \textbf{M.76}$$

Integrali definiti e indefiniti

Quando si scrive

$$y = \int f\,dt \qquad \textbf{M.77}$$

la funzione y è specificata come **integrale indefinito** di f rispetto a t. Per calcolare un integrale indefinito basta determinare la funzione y la cui derivata è data dalla funzione f. Visto che tale funzione potrebbe contenere un termine costante che, derivato, dà zero, occorre sempre aggiungere un termine detto **costante di integrazione** C. Se si integra una funzione su un determinato intervallo noto (per esempio, da t_1 a t_2 come in figura M.27), si calcola un **integrale definito**, e questo permette l'eliminazione della costante C non nota:

$$\int_{t_1}^{t_2} f\,dt = y(t_2) - y(t_1) \qquad \textbf{M.78}$$

La tabella M.5 riporta alcune importanti formule di integrazione. Per un elenco più esteso di formule di integrazione si veda un testo si analisi matematica o si esegua una ricerca sul web con le parole chiave «tavole di integrali».

Tabella M.5 Formule di integrazione (*)

1. $\int A\,dt = At$
2. $\int At\,dt = \frac{1}{2}At^2$
3. $\int At^n\,dt = A\frac{t^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$
4. $\int At^{-1}\,dt = A\ln|t|$
5. $\int e^{bt}\,dt = \frac{1}{b}e^{bt}$
6. $\int \cos\omega t\,dt = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t$
7. $\int \mathrm{sen}\,\omega t\,dt = -\frac{1}{\omega}\cos\omega t$
8. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$
9. $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
10. $\int_0^{\infty} xe^{-ax^2}\,dx = \frac{2}{a}$
11. $\int_0^{\infty} x^2e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$
12. $\int_0^{\infty} x^3e^{-ax^2}\,dx = \frac{4}{a^2}$
13. $\int_0^{\infty} x^4e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$

(*) In queste formule, A, B e ω sono costanti. Nelle formule dalla 1 alla 7 si può aggiungere una costante arbitraria C al membro a destra di ciascuna equazione. La costante a è maggiore di zero.

Esempio M.14 Integrazione delle equazioni di moto

Un punto materiale è in moto con accelerazione costante a. Scrivere un'espressione per la posizione x nell'istante t, sapendo che posizione e velocità nell'istante $t = 0$ valgono x_0 e v_0.

IMPOSTAZIONE La velocità v rappresenta la derivata di x rispetto al tempo t, mentre l'accelerazione rappresenta la derivata di v rispetto a t. Per scrivere la funzione $x(t)$ basta eseguire due operazioni di integrazione.

SOLUZIONE

1. Integra a rispetto a t per determinare v in funzione di t. La costante a può essere portata fuori dal segno di integrazione:

$$v = \int a\,dt = a\int dt$$

$$v = at + C_1$$

dove con C_1 si è indicata la costante a moltiplicata per una costante di integrazione.

2. La velocità vale v_0 in $t = 0$:

$$v_0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0$$

quindi $v = v_0 + at$

© 978-88-08-06625-1

3. Integrando v rispetto a t determini x in funzione di t:

$$x = \int v\,dt = \int (v_0 + at)\,dt = \int v_0\,dt + \int at\,dt$$

$$x = v_0 \int dt + a \int t\,dt = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 + C_2$$

dove con C_2 si è indicato un prodotto tra varie costanti di integrazione.

4. La posizione vale x_0 in $t = 0$:

$$x_0 = 0 + 0 + C_2$$

quindi $x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$

VERIFICA Si derivi due volte il risultato ottenuto, verificando che si ottiene l'accelerazione a:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2) = 0 + v_0 + at$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 + at) = a$$

Problemi

29. Calcolare $\int_3^6 3\,dx$

30. Calcolare $V = \int_5^8 \pi r^2\,dL$

Risposte ai problemi

1	0,24 L	**17**	$V/A = \frac{1}{3}r$
2	31,6 m/s	**18**	$A = \frac{2}{3}\pi L^2$
3	6,0 kg/cm^3		
4	−3	**19**	sen $\theta = 0{,}496$, cos $\theta = 0{,}868$, $\theta = 29{,}7°$
5	1,54 L	**20**	sen 8,2° = 0,1426, 8,2° = 0,1431 rad
6	3,07 L	**21**	0,996, 0,996 00, circa lo 0%
7	Falso	**22**	0,96, 0,960 77, $\ll 1\%$
8	$x = (4{,}5\text{ m/s})t + 3{,}0\text{ m}$	**23**	$-1 + 0i = -1$
9	$x = 8$, $y = 60$	**24**	$0 + i = i$
11	$2(x - y)^2$	**25**	$dy/dx = \frac{5}{24}x^2 - 24$
12	$x^2(2x + 4)(x + 3)$	**26**	$dy/dt = ae^{bt}(bt + 1)$
13	$x^{1/2}$	**27**	0,693 s
14	x^6	**28**	51 anni
15	3	**29**	9
16	− 2,322	**30**	$3\pi r^2$