Compendio di matematica

Questo compendio contiene una breve trattazione di alcuni risultati fondamentali nei campi dell'algebra, della geometria, della trigonometria e dell'analisi matematica. In molti casi, ci si limiterà a enunciare i risultati senza fornire dimostrazione. La tabella M.1 elenca alcuni simboli matematici.

M.1 Cifre significative

In molti casi, nelle discipline scientifiche, i numeri sono il risultato di un processo di misura e sono quindi noti solo entro un certo margine di incertezza sperimentale. Questa incertezza dovrebbe essere indicata dal numero di cifre usate per specificare il numero. Per esempio, se si ha un righello lungo 1 m con tacche distanziate di 1 cm, si può effettuare una misura di lunghezza con una precisione non maggiore, grosso modo, di un quinto di centimetro. Con questo righello si potrebbe determinare che l'altezza di una cassa vale 27 cm. Se la scala ha una spaziatura di 1 mm, si potrebbe ottenere per l'altezza della cassa un valore misurato pari a 27,3 cm. Tuttavia, con una scala millimetrica, non si sarebbe in grado di effettuare la misura con accuratezza maggiore; l'altezza della cassa potrebbe variare di 0,1 cm, o di un valore simile, a seconda se la misura viene effettuata da un lato o dall'altro. Quando si indica un'altezza della cassa pari a 27,3 cm, si sta affermando che la miglior stima per quella lunghezza vale 27,3 cm, non che vale esattamente 27,30000... cm. Le tre cifre di cui è composto il numero 27,3 sono dette **cifre significative**. Si dice che la lunghezza misurata, 0,273 m, ha tre cifre significative.

Il numero di cifre significative del risultato di un calcolo dipende dal numero di cifre significative dei dati forniti. Quando si lavora con numeri che hanno un'incertezza, occorre fare attenzione a non usare più cifre significative di quelle garantite dall'accuratezza della misura. I calcoli *approssimati* (stime di ordini di grandezza) forniscono sempre risultati che hanno una sola cifra significativa (o nessuna). Quando si moltiplicano, dividono, sommano o sottraggono numeri, occorre controllare l'accuratezza dei risultati. Qui sono elencate alcune regole con cui si può determinare il numero di cifre significative dei risultati di un calcolo.

1. Il numero di cifre significative nel risultato di una moltiplicazione o divisione non è maggiore del numero minimo di cifre significative in ognuno dei numeri di partenza.
2. Il risultato di una somma o sottrazione di due numeri non ha cifre significative oltre l'ultima posizione decimale in cui entrambi i numeri di partenza avevano cifre significative.
3. I valori esatti hanno un numero infinito di cifre significative. Per esempio, un valore determinato con processo di conteggio, come «2 tavoli»,

Tabella M.1 Simboli matematici

$=$	uguale a
$\neq$	diverso da
$\approx$	circa uguale a
$\sim$	dell'ordine di
$\propto$	proporzionale a
$>$	maggiore di
$\geq$	maggiore o uguale a
$\gg$	molto maggiore di
$<$	minore di
$\leq$	minore o uguale a
$\ll$	molto minore di
Δx	variazione di x
$\lvert x\rvert$	valore assoluto di x
$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots1$
$\sum$	somma
$\lim$	limite
$\Delta t \to 0$	Δt tende a zero
$\frac{dx}{dt}$	derivata di x rispetto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivata parziale di x rispetto a t
$\int$	integrale

© 978-88-08-06625-1

non ha incertezza ed è un valore esatto. Anche i fattori di conversione, come 0,0254000... m/in, sono valori esatti; infatti 1,000... in è esattamente uguale a 0,0254000... metri (la iarda è, per definizione, esattamente uguale a 0,9144 metri, e 0,9144 diviso 36 è esattamente uguale a 0,0254).

4. Lo zero non sempre rappresenta una cifra significativa. Se uno zero precede una cifra significativa diversa da zero, non è una cifra significativa. Per esempio, il numero 0,00890 ha tre cifre significative. I primi tre zeri non sono cifre significative, ma hanno solo la funzione di localizzare la virgola decimale. L'ultimo zero è invece una cifra significativa.
5. Gli zeri tra cifre diverse da zero rappresentano cifre significative. Per esempio, il numero 5603 ha quattro cifre significative.
6. Il numero di cifre significative di numeri non decimali che terminano per zero è ambiguo. Per esempio, 31 000 potrebbe avere fino a cinque cifre significative, oppure potrebbe averne solo due. Per evitare ambiguità, si dovrebbero sempre esprimere i numeri utilizzando la notazione scientifica o la virgola decimale.

Esempio M.1 Valore medio di tre numeri

Determinare il valore medio dei numeri 19,90, −7,524 e −11,8179.

IMPOSTAZIONE Occorre sommare i tre numeri e poi dividere per 3. Il primo numero ha tre cifre significative, il secondo ne ha quattro e il terzo ne ha cinque.

SOLUZIONE

1. Si sommino i tre numeri.

$$19{,}90 + (-7{,}524) + (-11{,}8179) = 0{,}5581$$

2. Se il problema chiedesse solo la somma dei tre numeri, si potrebbe arrotondare il risultato al numero minimo di posizioni decimali tra quelle dei numeri sommati. Ma occorre dividere questo risultato intermedio per 3, perciò si utilizza questo risultato intermedio con due cifre in più (indicate in rosso).

$$\frac{0{,}5581}{3} = 0{,}1860333\ldots$$

3. Solo due delle cifre del risultato, 0,1860333, sono significative, quindi occorre arrotondare questo numero per ottenere il risultato finale. Il numero 3 a denominatore è un numero intero e ha un numero infinito di cifre significative. Perciò il risultato finale deve avere lo stesso numero di cifre significative del numeratore, cioè 2.

Il risultato finale è $\boxed{0{,}19.}$

VERIFICA La somma eseguita al punto 1 ha due cifre significative dopo la virgola decimale, come l'addendo con il numero minimo di cifre significative dopo la virgola decimale.

Problemi

1. Calcolare $\dfrac{5{,}3\ \text{mol}}{22{,}4\ \text{mol/L}}$

2. Calcolare 57,8 m/s − 26,24 m/s

M.2 Equazioni

Un'equazione è una proposizione scritta usando numeri e simboli per indicare che due quantità, poste da entrambi i lati di un segno di uguaglianza (=), sono uguali tra loro. In ciascun caso, la quantità può essere costituita da un singolo

978-88-08-06625-1

termine, o da una somma o differenza di più **termini**. Per esempio, l'equazione $x = 1 - (ay + b)/(cx - d)$ contiene tre termini: x, 1 e $(ay + b)/(cx - d)$.

Nelle equazioni si possono eseguire le seguenti operazioni.

1. Si può aggiungere o sottrarre la stessa quantità a entrambi i membri, cioè ai termini di ciascun lato.
2. Si può moltiplicare o dividere membro a membro per la stessa quantità.
3. Si può elevare alla stessa potenza ciascun membro dell'equazione.

Queste operazioni si intendono applicate a ciascun lato (*membro*) dell'equazione e non a ciascun termine (visto che la moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma, la seconda operazione, e questa soltanto, vale anche applicata a ciascun termine).

Attenzione: la divisione per zero non è permessa mai nel risolvere un'equazione; un eventuale risultato non sarebbe valido.

Aggiungere o sottrarre la stessa quantità

Per determinare x nell'equazione $x - 3 = 7$, si aggiunga 3 a entrambi i membri: $(x - 3) + 3 = 7 + 3$ e quindi $x = 10$.

Moltiplicare o dividere per la stessa quantità

Nell'equazione $3x = 17$, si ricavi x dividendo entrambi i membri per 3; si ha $x = \frac{17}{3}$ o $x = 5{,}7$.

Esempio M.2 Incognita a denominatore

Si risolva la seguente equazione rispetto a x:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Equazioni che contengono il reciproco dell'incognita si trovano in ottica geometrica e nell'analisi di circuiti elettrici (per esempio quando si vuole determinare la resistenza totale di resistori in parallelo).

IMPOSTAZIONE In questa equazione il termine che contiene l'incognita x è allo stesso membro con un termine noto. Inoltre x si trova a denominatore di una frazione.

SOLUZIONE

1. Sottrai $\frac{1}{4}$ a entrambi i membri: $$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
2. Semplifica il membro a destra dell'equazione utilizzando il minimo comune multiplo dei denominatori: $$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} \quad \text{quindi} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$$
3. Moltiplica membro a membro per 12 x, ricavando x: $$12\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} = \cancel{12}x\frac{1}{\cancel{12}}$$ $$\boxed{12} = x$$

VERIFICA Sostituendo il valore trovato nell'equazione di partenza si ha:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Problemi

3. Risolvere la seguente equazione rispetto a x: $(7{,}0\ \text{cm}^3)x = 18\ \text{kg} + (4{,}0\ \text{cm}^3)x$

4. Risolvere la seguente equazione rispetto a x: $\frac{4}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{x}$

© 978-88-08-06625-1

M.3 Proporzionalità diretta e inversa

Due variabili x e y si dicono **direttamente proporzionali** quando, al variare di y, il rapporto x/y rimane costante. Dire che due variabili sono proporzionali equivale a dire che sono direttamente proporzionali. Due variabili x e y si dicono **inversamente proporzionali** quando, al variare di x e y, la quantità xy rimane costante.

Le relazioni di proporzionalità diretta e inversa sono comuni in fisica. Corpi in moto con uguale velocità hanno quantità di moto direttamente proporzionale alla loro massa. L'equazione di stato dei gas perfetti ($PV = nRT$) afferma che P è direttamente proporzionale alla temperatura (assoluta) T, se il volume V rimane costante, e inversamente proporzionale al volume, se la temperatura rimane costante. La legge di Ohm ($V = IR$) afferma che la differenza di potenziale V ai capi di un resistore è direttamente proporzionale alla corrente elettrica che lo attraversa, se la resistenza R rimane costante.

Costante di proporzionalità

Quando due grandezze sono direttamente proporzionali, tra esse esiste una relazione che contiene una *costante di proporzionalità*. Se, per esempio, una persona è pagata, per lavorare a un ritmo regolare R, in euro al giorno, il denaro d che guadagna è direttamente proporzionale al tempo t di lavoro; il ritmo R è la costante di proporzionalità che lega il denaro guadagnato, espresso in euro, al tempo di lavoro t, espresso in giorni:

$$\frac{m}{t} = R \qquad \text{ossia} \qquad m = Rt$$

Se si guadagnano 400 € in 5 giorni, il valore di R è dato da 400 €/5 giorni = 80 €/giorno. Per determinare il denaro guadagnato in 8 giorni basta eseguire il calcolo

$$m = (80\ \text{€/giorno})\ (8\ \text{giorni}) = 640\ \text{€}$$

A volte si può evitare di usare la costante di proporzionalità nei problemi in cui si ha a che fare con semplici proporzioni. Per esempio, visto che il denaro guadagnato in 8 giorni vale 8/5 rispetto a quello guadagnato in 5 giorni, questo denaro è dato da

$$m = \frac{8}{5}\ (400\ \text{€}) = 640\ \text{€}$$

Esempio M.3 Dipingere cubi

Occorrono 15,4 mL di vernice per dipingere la faccia di un cubo. L'area di una faccia del cubo vale 426 cm^2. Qual è la relazione tra il volume di vernice necessario e l'area da dipingere? Quanta vernice occorre per dipingere la faccia di un cubo avente area di 503 cm^2?

IMPOSTAZIONE Per determinare la quantità di vernice per la faccia avente area di 503 cm^2 occorre impostare una proporzione.

SOLUZIONE

1. Il volume V di vernice necessario aumenta in proporzione all'area A che deve essere dipinta:

   $\boxed{V \text{ e } A \text{ sono direttamente proporzionali.}}$

   Vale a dire $\dfrac{V}{A} = k$ ossia $V = kA$

   dove k è la costante di proporzionalità

2. Determina il valore della costante di proporzionalità utilizzando i valori dati, $V_1 = 15{,}4$ mL e $A_1 = 426$ cm^2:

   $$k = \frac{V_1}{A_1} = \frac{15{,}4\ \text{mL}}{426\ \text{cm}^2} = 0{,}0361\ \text{mL/cm}^2$$

3. Calcola il volume di vernice che occorre per verniciare la faccia di un cubo con area di 503 cm^2 utilizzando la costante di proporzionalità determinata:

   $$V_2 = kA_2 = (0{,}0361\ \text{mL/cm}^2)(503\ \text{cm}^2) = \boxed{18{,}2\ \text{mL}}$$

© 978-88-08-06625-1

VERIFICA Il valore trovato per V_2 è maggiore del valore trovato per V_1, secondo le aspettative. La quantità di vernice che occorre per dipingere un'area di 503 cm³ deve essere maggiore di quella che occorre per un'area più piccola di 426 cm².

Problemi

5. Un recipiente cilindrico può contenere 0,384 L d'acqua quando è pieno. Quanta acqua potrebbe contenere il recipiente se si raddoppiasse il raggio e l'altezza rimanesse invariata? *Suggerimento: il volume di un cilindro circolare retto è dato da $V = \pi r^2 h$, dove r è il raggio e h l'altezza. Pertanto V è direttamente proporzionale a r^2 se h rimane costante.*

6. Quanta acqua potrebbe contenere il recipiente del problema precedente se sia il raggio sia l'altezza raddoppiassero? *Suggerimento: il volume di un cilindro circolare retto è dato da $V = \pi r^2 h$, dove r è il raggio e h l'altezza.*

M.4 Equazioni di primo grado (lineari)

Un'**equazione di primo grado** (o **lineare**) ha forma del tipo $x + 2y - 4z = 3$. Cioè, un'equazione è di primo grado se ciascun termine è costante oppure è il prodotto tra una costante e una variabile elevata alla prima potenza. Equazioni di questo tipo sono anche dette lineari perché i grafici che formano i punti che le soddisfano rappresentano linee rette o piani. Le equazioni che esprimono proporzionalità diretta tra due variabili sono equazioni lineari.

Grafico di una linea retta

Un'equazione lineare nelle variabili x e y può essere sempre posta nella forma

$$y = mx + b \qquad \textbf{M.1}$$

dove m e b sono costanti che possono essere positive o negative. La figura M.1 mostra un grafico dei valori di x e y che soddisfano l'equazione M.1. La costante b, detta **intercetta**, è il valore di y corrispondente a $x = 0$. La costante m, detta **coefficiente angolare** (o **pendenza**) della retta, è uguale al rapporto tra la variazione di y e la corrispondente variazione di x. In figura sono indicati due punti della retta, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), oltre alle variazioni $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = y_2 - y_1$. Il coefficiente angolare m vale allora:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

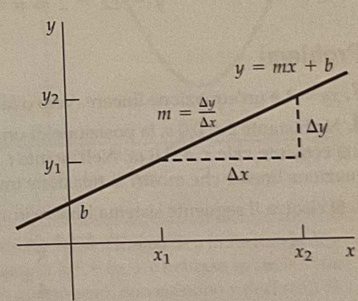

FIGURA **M.1** Grafico dell'equazione lineare $y = mx + b$, dove b rappresenta l'intercetta e $m = \Delta y/\Delta x$ il coefficiente angolare.

Se x e y sono entrambe incognite nell'equazione $y = mx + b$, la coppia di valori x e y che soddisfa l'equazione non è unica. Ogni coppia di valori (x_1, y_1) appartenente alla retta di figura M.1 rappresenta una soluzione dell'equazione. Se si hanno due equazioni, ciascuna nelle stesse due incognite x e y, il sistema lineare da esse formato può essere risolto come mostrato nel seguente esempio.

Esempio M.4 Due equazioni per due incognite

Determinare, se esistono, i valori di x e y che soddisfano contemporaneamente le equazioni

$$3x - 2y = 8 \qquad \textbf{M.2}$$

e

$$y - x = 2 \qquad \textbf{M.3}$$

© 978-88-08-06625-1

IMPOSTAZIONE La figura M.2 mostra un grafico delle rette rappresentate dalle due equazioni. Le coordinate x e y del punto in cui le rette si intersecano sono proprio i valori che soddisfano entrambe le equazioni. Si può risolvere il sistema risolvendo un'equazione rispetto a una variabile, in termini dell'altra, e quindi sostituire il risultato nella seconda equazione.

SOLUZIONE

1. Risolvi l'equazione M.3 rispetto a y: $y = x + 2$
2. Sostituisci questo valore di y nell'equazione M.2: $3x - 2(x + 2) = 8$
3. Semplificando ricavi x: $3x - 2x - 4 = 8$; $x - 4 = 8$; $x = \boxed{12}$
4. Sostituendo il valore di x determinato in una delle due equazioni, ricavi y: $y - x = 2$, dove $x = 12$; $y - 12 = 2$; $y = 2 + 12 = \boxed{14}$

VERIFICA Un metodo alternativo consiste nel moltiplicare una delle due equazioni per una costante tale che uno dei termini incogniti si semplifichi quando le equazioni vengono sommate o sottratte membro a membro. Per esempio, l'equazione M.3 può essere moltiplicata per 2 membro a membro:

$$2(y - x) = 2(2)$$
$$2y - 2x = 4$$

Sommando il risultato all'equazione M.2 si può ricavare x:

$$\begin{array}{l} \cancel{2y} - 2x = 4 \\ 3x - \cancel{2y} = 8 \\ \hline 3x - 2x = 12 \Rightarrow x = 12 \end{array}$$

Sostituendo questo valore in M.3 si può ricavare y:

$$y - 12 = 2 \Rightarrow y = 14$$

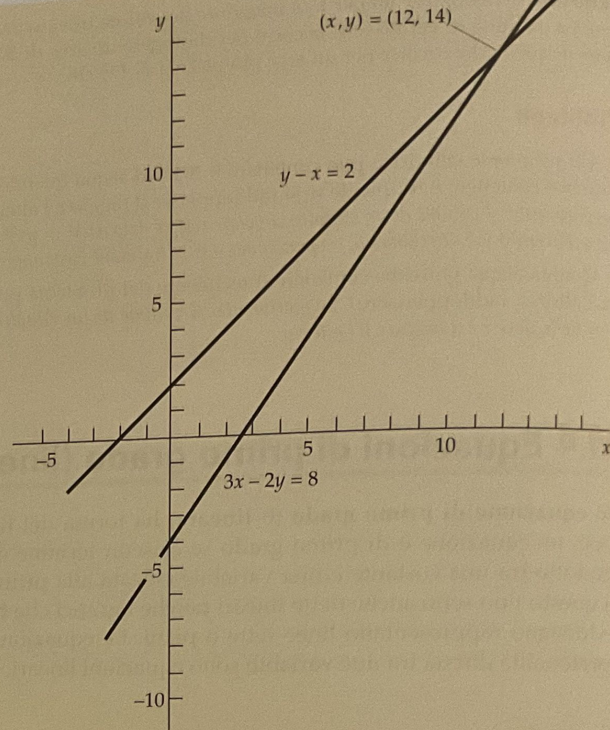

FIGURA **M.2** Grafici delle equazioni M.2 e M.3. Le coordinate x e y del punto in cui le rette si intersecano rappresentano i valori che soddisfano entrambe le equazioni.

Problemi

7. $xy = 4$ è un'equazione lineare. Vero o falso?

8. Nell'istante $t = 0{,}0$ s, la posizione di un punto materiale in moto lungo l'asse x con velocità costante vale $x = 3{,}0$ m. Nell'istante $t = 2{,}0$ s, la posizione è $x = 12{,}0$ m. Scrivere un'equazione lineare che mostri la relazione tra x e t.

9. Si risolva il seguente sistema lineare in x e y:

$$\frac{5}{4}x + \frac{1}{3}y = 30$$
$$y - 5x = 20$$

M.5 Equazioni di secondo grado e fattorizzazione

Un'**equazione di secondo grado** è un'equazione avente forma $ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + g = 0$, dove x e y sono variabili e a, b, c, d, e, f e g sono costanti. In ciascun termine dell'equazione la potenza a cui sono elevate le variabili vale 2, 1 o 0. Tuttavia il termine *equazione di secondo grado* viene di solito usato per indicare un'equazione in una sola variabile che può essere scritta nella forma standard

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \textbf{M.4}$$

dove a, b e c sono costanti. Un'equazione di questo tipo ha due soluzioni, o **radici**, cioè due valori di x per cui risulta soddisfatta.

Fattorizzazione

Alcune equazioni di secondo grado possono essere risolte tramite **fattorizzazione**. Molto spesso, infatti, i termini di un'equazione possono essere raggruppati o riorganizzati in altri termini. Quando si fattorizza, si cercano **fattori** che permettano di scrivere due o più termini in forma di prodotto. Per esempio, le radici dell'equazione di secondo grado $x^2 - 3x + 2 = 0$ possono essere determinate fattorizzando il membro a sinistra e scrivendolo come $(x - 2)(x - 1) = 0$. Le radici sono quindi $x = 2$ e $x = 1$.

La fattorizzazione è utile per semplificare le equazioni e capire le relazioni esistenti tra determinate quantità. Si dovrebbe avere già familiarità con il prodotto tra due binomi, avente forma $(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$.

Si dovrebbe inoltre essere in grado di riconoscere immediatamente alcuni tipici termini fattorizzabili (o prodotti notevoli).

1. Fattore comune: $2ax + 3ay = a(2x + 3y)$
2. Quadrato di un binomio: $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$ (se l'espressione al membro a sinistra di un'equazione di secondo grado in forma standard rappresenta il quadrato di un binomio, le due radici risultano uguali).
3. Differenza tra due quadrati: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Inoltre è utile cercare fattori costituiti da numeri primi (2, 5, 7, ...) perché permettono di semplificare velocemente i termini. Per esempio, l'equazione $98x^2 - 140 = 0$ può essere semplificata visto che 98 e 140 hanno 2 come divisore comune. Quindi $98x^2 - 140 = 0$ diventa $2(49x^2 - 70) = 0$, cioè $49x^2 - 70 = 0$.

Questo risultato può essere ulteriormente semplificato fattorizzando 7. Cioè $49x^2 - 70 = 0$ diventa $7(7x^2 - 10) = 0$, perciò si ha $7x^2 - 10 = 0$.

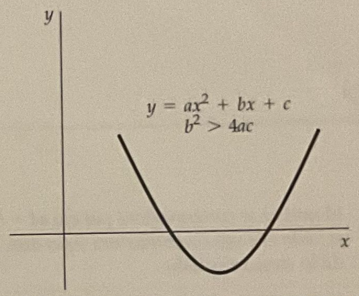

FIGURA **M.3** Grafico di y in funzione di x per $y = ax^2 + bx + c$ nel caso in cui $b^2 > 4ac$. I due valori di x per cui $y = 0$ soddisfano l'equazione di secondo grado M.4.

Formula quadratica

Non tutte le equazioni di secondo grado possono essere risolte per fattorizzazione. Tuttavia, un'*arbitraria* equazione quadratica in forma standard $ax^2 + bx + c = 0$ può sempre essere risolta mediante la **formula quadratica**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad \text{M.5}$$

Quando b^2 è maggiore di $4ac$, vi sono due soluzioni, corrispondenti ai segni + e −. La figura M.3 mostra un grafico di y in funzione di x per la funzione $y = ax^2 + bx + c$. La curva, costituita da una **parabola**, interseca l'asse x in due punti (la rappresentazione più semplice di una parabola in coordinate (x, y) è un'equazione avente forma $y = ax^2 + bx + c$). Le due radici di questa equazione sono i valori per cui $y = 0$, cioè le *intercette* sull'asse x della parabola.

Quando b^2 è minore di $4ac$, il grafico di y in funzione di x è una parabola che non interseca l'asse x, come mostrato in figura M.4; vi sono sempre due radici, ma non sono costituite da numeri reali (si veda la trattazione sui numeri complessi al paragrafo M.10). Quando $b^2 = 4ac$, il grafico di y in funzione di x risulta tangente all'asse x nel punto $x = -b/2a$; le due radici sono pertanto uguali a $-b/2a$.

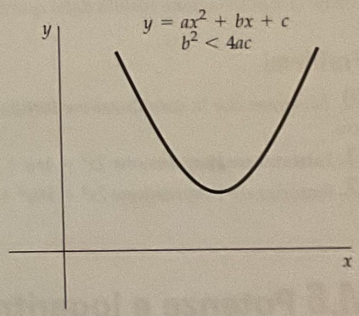

FIGURA **M.4** Grafico di y in funzione di x per $y = ax^2 + bx + c$ nel caso in cui $b^2 < 4ac$. In questo caso, non esistono valori reali di x per cui $y = 0$.

Esempio M.5 Fattorizzazione di un polinomio di secondo grado

Fattorizzare l'espressione $6x^2 + 19xy + 10y^2$.

IMPOSTAZIONE Si osservino i coefficienti di ciascun termine per vedere se l'espressione può essere fattorizzata senza ricorrere a tecniche più avanzate. Si ricordi la forma del prodotto tra due binomi $(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc) + bdy^2$.

SOLUZIONE

1. Il coefficiente di x^2 è 6, che può essere fattorizzato in due modi:
$$ac = 6$$
$$3 \cdot 2 = 6 \quad \text{oppure} \quad 6 \cdot 1 = 6$$
2. Il coefficiente di y^2 è 10, che può essere fattorizzato in due modi:
$$bd = 10$$
$$5 \cdot 2 = 10 \quad \text{oppure} \quad 10 \cdot 1 = 10$$

© 978-88-08-06625-1

3. Elenca in una tabella tutte le possibilità per i valori di a, b, c e d, aggiungendo una colonna per il valore assunto in ciascun caso da $ad + bc$. Se $a = 3$, allora $c = 2$ e viceversa. Per ciascun valore di a vi sono quattro valori di b.

a	b	c	d	$ad + bc$
3	5	2	2	16
3	2	2	5	19
3	10	2	1	23
3	1	2	10	32
2	5	3	2	19
2	2	3	5	16
2	10	3	1	32
2	1	3	10	23
6	5	1	2	17
6	2	1	5	32
6	10	1	1	16
6	1	1	10	61
1	5	6	2	32
1	2	6	5	17
1	10	6	1	61
1	1	6	10	16

4. Identifica le combinazioni per cui $ad + bc = 19$. Dalla tabella si vede che tali combinazioni sono due, ma ognuna di esse dà lo stesso risultato:

$$ad + bc = 19$$
$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$$

5. Utilizzi la combinazione data dalla seconda riga della tabella per fattorizzare l'espressione data:

$$6x^2 + 19xy + 10y^2 = (3x + 2y)(2x + 5y)$$

VERIFICA Come verifica, si sviluppi il prodotto $(3x + 2y)(2x + 5y)$:

$$(3x + 2y)(2x + 5y) = 6x^2 + 15xy + 4xy + 10y^2 = 6x^2 + 19xy + 10y^2$$

Anche la combinazione fornita dalla quinta riga della tabella porta allo stesso risultato.

Problemi

10. Mostrare che la combinazione fornita dalla quinta riga della tabella dà lo stesso risultato.

11. Fattorizzare l'espressione $2x^2 - 4xy + 2y^2$.

12. Fattorizzare l'espressione $2x^4 + 10x^3 + 12x^2$.

M.6 Potenze e logaritmi

Potenze

La quantità x^n denota la quantità ottenuta moltiplicando x per se stesso n volte. Per esempio, $x^2 = x \cdot x$ e $x^3 = x \cdot x \cdot x$. La quantità n è detta **potenza** (o **esponente**) di x (detto **base**). Di seguito sono elencate alcune regole per semplificare termini contenenti potenze.

1. Nella moltiplicazione di due potenze di x, gli esponenti si sommano:

$$(x^m)(x^n) = x^{m+n} \qquad \textbf{M.6}$$

Esempio: $x^2x^3 = x^{2+3} = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$

2. Qualsiasi numero (tranne 0) elevato alla potenza 0 vale 1 per definizione:

$$x^0 = 1 \qquad \textbf{M.7}$$

3. In base alle regola precedente:

$$x^n x^{-n} = x^0 = 1$$
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \textbf{M.8}$$

© 978-88-08-06625-1

4. Nel rapporto tra due potenze di x gli esponenti si sottraggono:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n x^{-m} = x^{n-m} \qquad \textbf{M.9}$$

5. Quando una potenza è elevata a potenza, gli esponenti si moltiplicano:

$$(x^n)^m = x^{nm} \qquad \textbf{M.10}$$

6. Quando gli esponenti sono costituiti da frazioni, rappresentano un'estrazione di radice della base. Per esempio:

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x$$

quindi

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad (x > 0)$$

Esempio M.6 Semplificazione di potenze

Semplificare l'espressione $\dfrac{x^4x^7}{x^8}$.

IMPOSTAZIONE Secondo la regola 1, moltiplicando due potenze di x, gli esponenti si sommano. Inoltre la regola 4 afferma che nel rapporto tra due potenze, gli esponenti si sottraggono.

SOLUZIONE

1. Semplifica il numeratore con la regola 1: $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$
2. Semplifica $\dfrac{x^{11}}{x^8}$ con la regola 4: $\dfrac{x^{11}}{x^8} = x^{11} x^{-8} = x^{11-8} = x^3$

VERIFICA Si utilizzi il valore $x = 2$ per verificare che il risultato è corretto:

$$\frac{2^4 2^7}{2^8} = 2^3 = 8$$

$$\frac{2^4 2^7}{2^8} = \frac{(16)(128)}{256} = \frac{2048}{256} = 8$$

Problemi

13. $(x^{1/18})^9 =$

14. $x^6 x^0 =$

Logaritmi

Un arbitrario numero positivo può essere espresso come una qualche potenza di un altro arbitrario numero positivo che non sia 1. Se y è esprimibile in funzione di x come $y = a^x$, si dice che il numero x è il **logaritmo** di y in **base** a e tale relazione si esprime come

$$x = \log_a y$$

Quindi i logaritmi sono *esponenti* di potenze, e le regole che permettono di eseguire operazioni con i logaritmi corrispondono a quelle valide per le potenze. Di seguito sono elencate alcune regole per semplificare espressioni che contengono logaritmi.

1. Se $y_1 = a^n$ e $y_2 = a^m$, allora

$$y_1 y_2 = a^n a^m = a^{n+m}$$

e, corrispondentemente,

$$\log_a y_1 y_2 = \log_a a^{n+m} = n + m = \log_a a^n + \log_a a^m = \log_a y_1 + \log_a y_2 \qquad \textbf{M.11}$$

© 978-88-08-06625-1

Ne consegue che

$$\log_a y^n = n \log_a y \quad \textbf{M.12}$$

2. Dato che $a^1 = a$ e $a^0 = 1$,

$$\log_a a = 1 \quad \textbf{M.13}$$

e

$$\log_a 1 = 0 \quad \textbf{M.14}$$

In pratica, si considerano i logaritmi con due numeri come base: i logaritmi in base 10, che vengono detti **logaritmi decimali** (o **comuni**), e i logaritmi in base e (con e = 2,718...), che sono detti **logaritmi naturali** (o **neperiani**). I logaritmi naturali sono indicati con il simbolo «ln», mentre i logaritmi decimali con «log», senza il pedice che specifica la base, cioè:

$$\log_e x = \ln x \quad \text{e} \quad \log_{10} x = \log x \quad \textbf{M.15}$$

e $y = \ln x$ implica che

$$x = e^y \quad \textbf{M.16}$$

I logaritmi possono essere convertiti da una base all'altra. Si supponga che

$$z = \log x \quad \textbf{M.17}$$

Allora si ha:

$$10^z = 10^{\log x} = x \quad \textbf{M.18}$$

Considerando il logaritmo naturale di entrambi i membri dell'equazione M.18 si ottiene:

$$z \ln 10 = \ln x$$

Sostituendo z con $\log x$ (eq. M.17) risulta:

$$\ln x = (\ln 10)\log x \quad \textbf{M.19}$$

Esempio M.7 Conversione tra logaritmi decimali e naturali

I passaggi che portano all'equazione M.19 mostrano che, in generale, $\log_b x = (\log_b a) \log_a x$. Quindi la conversione di logaritmi da una base all'altra richiede solo la moltiplicazione per una costante. Si descriva la relazione matematica tra la costante per la conversione di logaritmi decimali in naturali e la costante per la conversione di logaritmi naturali in decimali.

IMPOSTAZIONE Esiste una formula matematica di validità generale per convertire logaritmi dalla base a alla base b. Si osservi cosa accade quando nella formula si scambiano i ruoli di a e b.

SOLUZIONE

1. La formula per la conversione dei logaritmi dalla base a alla base b è:
$$\log_b x = (\log_b a)\log_a x$$
2. Per la conversione dalla base b alla base a la formula è pertanto:
$$\log_a x = (\log_a b)\log_b x$$
3. Dividendo entrambi i membri dell'equazione scritta al punto 1 per $\log_a x$ si ha:
$$\frac{\log_b x}{\log_a x} = \log_b a$$
4. Dividendo entrambi i membri dell'equazione scritta al punto 2 per $(\log_a b) \log_a x$ si ha:
$$\frac{1}{\log_a b} = \frac{\log_b x}{\log_a x}$$
5. Il risultato mostra che i fattori di conversione $\log_b a$ e $\log_a b$ sono uno il reciproco dell'altro:
$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

VERIFICA Una calcolatrice fornirà il valore 0,43429 per $\log_{10} e$, mentre darà 2,3026 per ln 10. Moltiplicando questi due numeri si ottiene 1,0000.

Problemi

15. Calcolare $\log_{10} 1000$.

16. Calcolare $\log_2 5$.

© 978-88-08-06625-1

M.7 Geometria

Le proprietà delle più comuni figure geometriche (figure delimitate, in due o tre dimensioni, per le quali le lunghezze, le aree e i volumi sono governati da rapporti ben precisi) sono uno strumento analitico fondamentale in fisica. Per esempio, le proprietà caratteristiche dei triangoli danno luogo alle leggi della *trigonometria* (si veda il prossimo paragrafo), che a sua volta dà origine alla teoria dei vettori, essenziale nell'analizzare il moto in due e tre dimensioni. Circonferenze e sfere sono essenziali per la comprensione, per esempio, di concetti come il momento angolare e la densità di probabilità in meccanica quantistica.

Formule geometriche di base

Cerchio Il rapporto tra la lunghezza della circonferenza di un cerchio e il suo diametro è dato dal numero π, il cui valore approssimato è

$$\pi = 3{,}141\,592$$

La lunghezza C di una circonferenza è quindi esprimibile in termini del diametro d o del raggio r mediante le relazioni:

$$C = \pi d = 2\pi r \qquad \text{M.20}$$

L'area di un cerchio è data da (fig. M.5):

$$A = \pi r^2 \qquad \text{M.21}$$

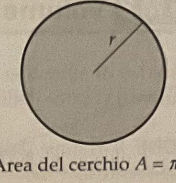

FIGURA **M.5** Area di un cerchio.

Parallelogramma L'area di un parallelogramma è data dal prodotto della base b per l'altezza h (fig. M.6):

$$A = bh$$

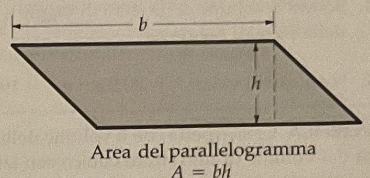

FIGURA **M.6** Area di un parallelogramma.

L'area di un triangolo è data dal prodotto di base per altezza diviso due (fig. M.7):

$$A = \frac{1}{2}bh$$

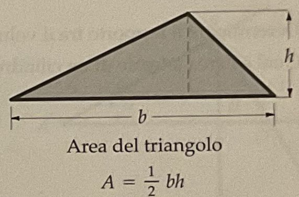

FIGURA **M.7** Area di un triangolo.

Sfera L'area della superficie di una sfera di raggio r (fig. M.8) è data da:

$$A = 4\pi r^2 \qquad \text{M.22}$$

mentre il volume è dato da:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{M.23}$$

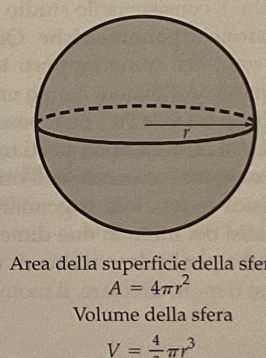

FIGURA **M.8** Area della superficie e volume di una sfera.

Cilindro L'area della superficie laterale di un cilindro di raggio r e altezza L (fig. M.9) è data da:

$$A = 2\pi rL \qquad \text{M.24}$$

mentre il volume è dato da:

$$V = \pi r^2 L \qquad \text{M.25}$$

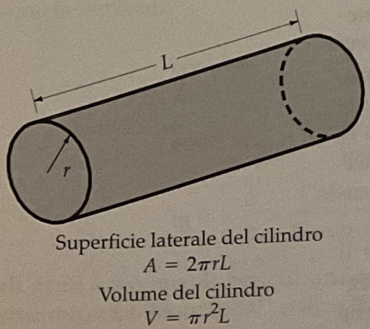

FIGURA **M.9** Area della superficie laterale e volume di un cilindro.

© 978-88-08-06625-1

Esempio M.8 Volume di uno strato sferico

Uno strato sferico di alluminio ha diametro esterno di 40,0 cm e diametro interno di 39,0 cm. Determinare il volume dello strato di alluminio.

IMPOSTAZIONE Il volume dello strato di alluminio si ottiene sottraendo il volume della sfera interna, avente $d_i = 2r_i = 39{,}0$ cm, dal volume della sfera esterna avente $d_e = 2r_e = 40{,}0$ cm.

SOLUZIONE

1. Sottrai il volume della sfera di raggio r_i dal volume della sfera di raggio r_e: $V = \frac{4}{3}\pi r_e^3 - \frac{4}{3}\pi r_i^3 = \frac{4}{3}\pi(r_e^3 - r_i^3)$
2. Sostituisci i valori $r_e = 20{,}0$ cm e $r_i = 19{,}5$ cm: $V = \frac{4}{3}\pi[(20{,}0\ \text{cm})^3 - (19{,}5\ \text{cm})^3] = \boxed{2{,}45 \times 10^3\ \text{cm}^3}$

VERIFICA Ci si aspetta che il volume dello strato sferico sia dello stesso ordine di grandezza del volume di uno strato cubico con lato esterno di 40,0 cm e lato interno di 39,0 cm. Il volume di tale strato è dato da $(40{,}0\ \text{cm})^3 - (39{,}0\ \text{cm})^3 = 4{,}68 \times 10^3\ \text{cm}^3$. L'ordine di grandezza è lo stesso del risultato ottenuto per lo strato sferico, che è quindi attendibile.

Problemi

17. Determinare il rapporto tra il volume V e l'area della superficie A di una sfera di raggio r.

18. Qual è l'area laterale di un cilindro che ha raggio pari a 1/3 dell'altezza?

M.8 Trigonometria

La **trigonometria**, il cui nome deriva dal greco *trígonon* («triangolo») e *métron* («misura»), consiste nello studio di alcune importanti funzioni matematiche, dette **funzioni trigonometriche**. Queste funzioni possono essere definite in modo molto semplice come rapporti tra i lati di triangoli rettangoli. Così formulate, però, queste definizioni hanno un utilizzo limitato, essendo valide solo per angoli compresi tra 0° e 90°. Esse possono essere estese definendo le funzioni trigonometriche in termini di rapporti tra le coordinate dei punti di una circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine del piano xy.

In fisica le funzioni trigonometriche si incontrano quando si usano i vettori nell'analisi del moto in due dimensioni. Le funzioni trigonometriche sono essenziali anche per la descrizione di una qualunque tipo di comportamento periodico, come il moto circolare, il moto oscillatorio e le onde meccaniche.

Angoli e loro misura: gradi e radianti

L'ampiezza di un angolo formato da due rette che si intersecano rappresenta la sua **misura**. Il metodo più comune per determinare la misura di un angolo è quello di disporlo in modo che il suo **vertice**, cioè il punto di intersezione delle rette, corrisponda al centro di una circonferenza centrata nell'origine di un sistema di assi cartesiani, e in modo che una delle rette si estenda lungo la direzione positiva dell'asse x. La distanza percorsa in *senso antiorario*, sulla circonferenza, dal semiasse x positivo fino al punto di intersezione della circonferenza con la seconda retta che forma l'angolo, definisce la misura dell'angolo (percorrendo la distanza in senso orario si otterrebbe semplicemente una misura negativa dell'angolo; per illustrare i concetti di base, si disporrà l'angolo in modo che la rotazione minore sia quella in senso antiorario).

L'unità di misura più familiare per esprimere la misura di un angolo è il **grado**, che è uguale a 1/360 dell'intera lunghezza della circonferenza. Per maggiore precisione, o per esprimere la misura di angoli molto piccoli, si usano anche i primi (′) e i secondi (″), dove $1' = 1°/60$ e $1'' = 1'/60 = 1°/3600$; oppure si esprimono i gradi come comuni numeri decimali.

In ambito scientifico, un'unità di misura di angoli molto utile è il **radiante** (rad). Di nuovo, si ponga l'angolo con il vertice al centro di una circonferenza e si misuri in senso antiorario la rotazione lungo la circonferenza. La misura dell'angolo in radianti è definita come il rapporto tra la lunghezza dell'arco circolare che va da una retta all'altra e il raggio della circonferenza (fig. M.10). Se s è la lunghezza dell'arco e r il raggio della circonferenza, l'angolo θ in radianti è dato da:

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{M.26}$$

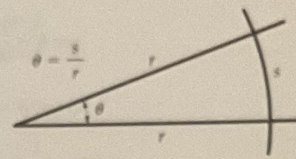

FIGURA **M.10** L'angolo θ in radianti è definito come il rapporto s/r, dove s è la lunghezza dell'arco intercettato su una circonferenza di raggio r.

Dato che l'angolo misurato in radianti è un rapporto tra due lunghezze, si tratta di un numero adimensionale. La relazione tra gradi e radianti è

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

vale a dire

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57{,}3°$$

La figura M.11 mostra alcune relazioni utili tra angoli.

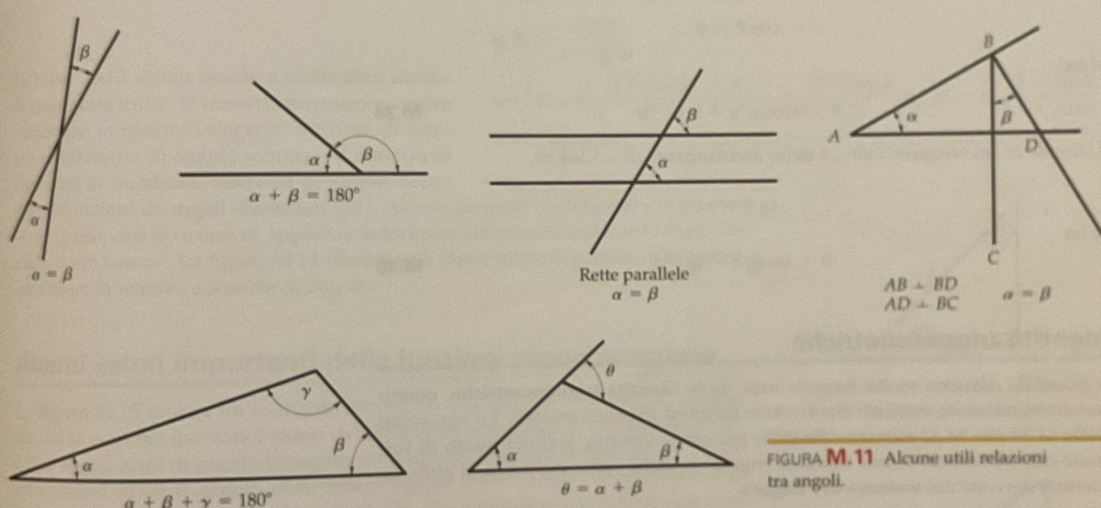

FIGURA **M.11** Alcune utili relazioni tra angoli.

Funzioni trigonometriche

La figura M.12 mostra un triangolo rettangolo formato tracciando il segmento BC perpendicolarmente al segmento AC. La lunghezza dei lati del triangolo è indicata con a, b e c. Le definizioni delle funzioni trigonometriche **seno** (sen), **coseno** (cos) e **tangente** (tg), basate su tale triangolo e aventi come argomento l'angolo acuto θ, sono le seguenti:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Cateto opposto}}{\text{Ipotenusa}} \qquad \text{M.27}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Cateto adiacente}}{\text{Ipotenusa}} \qquad \text{M.28}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{Cateto opposto}}{\text{Cateto adiacente}} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \text{M.29}$$

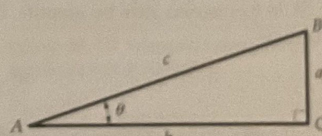

FIGURA **M.12** Triangolo rettangolo con cateti di lunghezza a e b e ipotenusa di lunghezza c.

(gli **angoli acuti** sono angoli per cui una rotazione positiva sulla circonferenza fornisce una misura minore di 90° o di $\pi/2$). Altre tre funzioni trigonometriche,

© 978-88-08-06625-1

secante (sec), **cosecante** (cosec) e **cotangente** (cotg), sono definite come i reciproci delle funzioni precedenti:

$$\sec\theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{M.30}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \text{M.31}$$

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\text{tg}\,\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \qquad \text{M.32}$$

L'angolo θ il cui seno vale x, è detto **arcoseno** di x e si indica con $\text{sen}^{-1}x$. Cioè se

$$\text{sen}\,\theta = x$$

si ha:

$$\theta = \text{arcsen}\,x = \text{sen}^{-1}x \qquad \text{M.33}$$

L'arcoseno è quindi la funzione inversa rispetto al seno. In modo simile si definiscono le funzioni inverse del coseno e della tangente. L'angolo il cui coseno vale y è detto **arcocoseno** di y. Cioè se

$$\cos\theta = y$$

si ha:

$$\theta = \arccos y = \cos^{-1}y \qquad \text{M.34}$$

L'angolo la cui tangente vale z è detto **arcotangente** di z. Cioè se

$$\text{tg}\,\theta = z$$

si ha:

$$\theta = \text{arctg}\,z = \text{tg}^{-1}z \qquad \text{M.35}$$

Identità trigonometriche

È possibile derivare molte formule utili, dette **identità trigonometriche**, esaminando le relazioni esistenti tra le varie funzioni trigonometriche. Le equazioni dalla M.30 alla M.32 elencano tre delle più ovvie identità; si tratta infatti di formule che esprimono alcune funzioni trigonometriche come reciproco di altre. Le identità derivate dal **teorema di Pitagora**

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{M.36}$$

sono quasi altrettanto facili da individuare (la fig. M.13 illustra una dimostrazione grafica del teorema di Pitagora). Semplici operazioni algebriche sull'equazione M.36 forniscono altre tre identità. Dividendo la M.36 membro a membro per c^2 si ottiene

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

che, per le definizioni di sen θ (uguale ad a/c) e di cos θ (uguale a b/c), diventa:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{M.37}$$

In modo simile, dividendo l'equazione M.36 membro a membro per a^2 e b^2, rispettivamente, si ottiene

$$1 + \text{cotg}^2\theta = \text{cosec}^2\theta \qquad \text{M.38}$$

e

$$1 + \text{tg}^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{M.39}$$

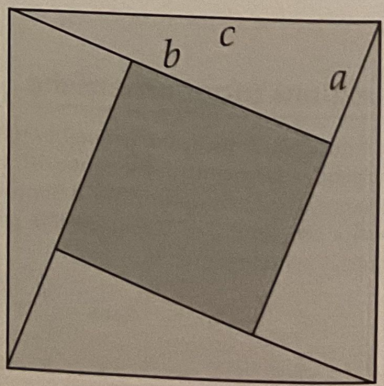

FIGURA **M.13** Quando questa figura fu pubblicata per la prima volta non erano presenti lettere a indicare la lunghezza dei lati del triangolo in alto, ma vi era solo la didascalia «Guarda!». Si derivi il teorema di Pitagora ($a^2 + b^2 = c^2$) usando il disegno.

© 978-88-08-06625-1

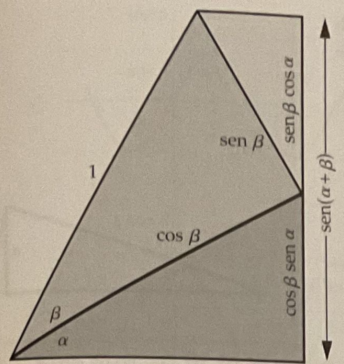

FIGURA **M.14** Usando questo disegno, si derivi l'identità sen $(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$. Lo stesso disegno può essere usato per derivare l'identità $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$.

Tabella M.2 Identità trigonometriche

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta}{1 \mp \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

$$\text{sen}\,\alpha \pm \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)\right]$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right]$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\,\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\right]$$

$$\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1;\ \sec^2\theta - \text{tg}^2\theta = 1;\ \text{cosec}^2\theta - \text{cotg}^2\theta = 1$$

$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$$

$$\text{tg}\,2\theta = \frac{2\,\text{tg}\,\theta}{1 - \text{tg}^2\theta}$$

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}};\ \cos\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}};\ \text{tg}\,\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$$

La tabella M.2 elenca queste e molte altre identità trigonometriche. Si osservi che possono essere suddivise in quattro categorie: funzioni di somma o differenza di angoli, somma o differenza di funzioni al quadrato, funzioni di angoli doppi (2θ) e funzioni di angoli dimezzati $\left(\frac{1}{2}\theta\right)$. Alcune formule contengono i segni $\pm$ e $\mp$; in questi casi si ricordi di applicare la formula utilizzando entrambi i segni «in alto» o «in basso». La figura M.14 illustra una dimostrazione grafica delle prime due identità relative a somme di angoli.

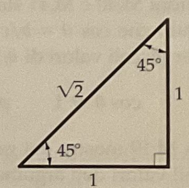

FIGURA **M.15** Triangolo rettangolo isoscele.

Alcuni valori importanti delle funzioni trigonometriche

La figura M.15 mostra un triangolo rettangolo *isoscele* (cioè con due lati uguali), da cui si possono derivare i valori delle funzioni seno, coseno e tangente di 45°. I due angoli acuti di questo triangolo sono uguali. Dato che la somma dei tre angoli interni di un triangolo deve essere uguale a 180° e che l'angolo retto è di 90°, ciascun angolo acuto deve essere di 45°. Per convenienza si assuma che i lati uguali abbiano lunghezza unitaria. Il teorema di Pitagora dà il valore dell'ipotenusa:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Si calcolino dunque i valori delle funzioni trigonometriche:

$$\text{sen}\,45° = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \quad \cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \quad \text{tg}\,45° = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$$

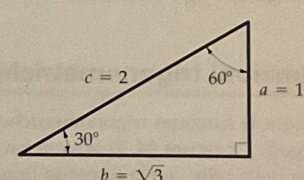

FIGURA **M.16** Triangolo rettangolo con angoli opposti di 30° e 60°.

Un altro triangolo spesso utilizzato, mostrato in figura M.16, ha angoli opposti di 30° e 60°. Questo triangolo costituisce infatti la metà di un *triangolo equilatero* (un triangolo avente i tre lati uguali, o equivalentemente, avente i tre angoli interni uguali a 60°) e quindi si vede facilmente che il seno di 30° deve valere esattamente 0,5 (fig. M.17). Il triangolo equilatero deve avere tutti i lati uguali a c, ipotenusa del triangolo rettangolo con angoli opposti di 30° e 60°. Pertanto il cateto a vale la metà dell'ipotenusa e quindi

$$\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$$

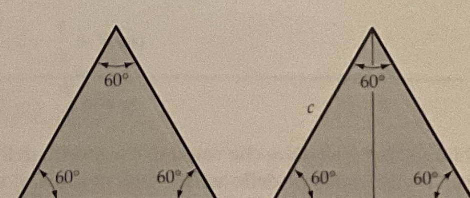

FIGURA **M.17** (*a*) Triangolo equilatero. (*b*) La bisettrice di un triangolo equilatero va a formare due triangoli rettangoli con angoli opposti di 30° e 60°.