Esercizio 1

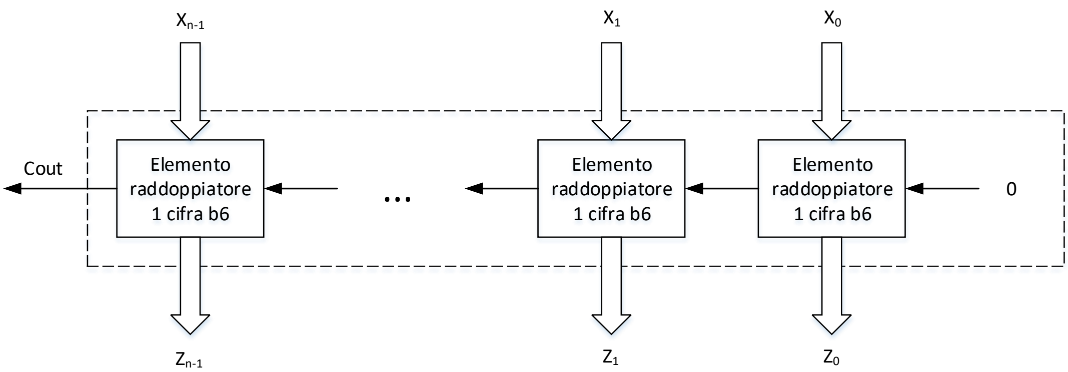
Sintetizzare, fino al livello delle porte logiche elementari:

1) una rete combinatoria che *raddoppia numeri naturali in base 6 su n cifre*. La rete ha in ingresso un numero in base 6 ad n cifre, e come uscite un numero in base 6 ad n cifre ed un *carry*, che vale 1 se il risultato dell'operazione non è rappresentabile su n cifre.
2) Una rete combinatoria che prende in ingresso un numero naturale in base 6 su n cifre e lo moltiplica per 72, producendo un'uscita su $n+2$ cifre ed un carry che vale 1 se il risultato dell'operazione non è rappresentabile su $n+2$ cifre.

Attenzione: verrà considerata nulla una sintesi che non si spinga fino al livello delle porte logiche elementari.

Soluzione

1) La rete ad n cifre può essere scomposta in n elementi raddoppiatori in montaggio ripple carry, come in figura.



Ciascuno degli elementi ha in ingresso un carry ed una cifra in base 6, codificata su tre variabili binarie, ed in uscita una cifra in base 6 ed un carry. Un elemento è descritto dalla seguente tabella di verità:

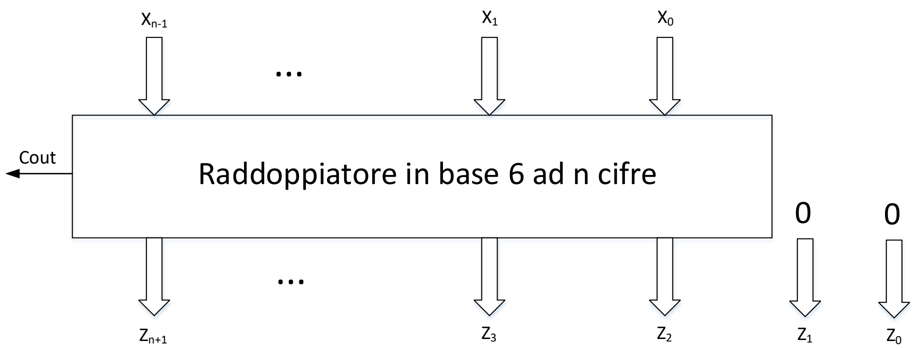
Cin	x2	x1	x0	z2	z1	z0	Cout
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	-	-	-	-
0	1	1	1	-	-	-	-
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	-	-	-	-
1	1	1	1	-	-	-	-

x_0C_{in} \ x_2x_1 ($z_2z_1z_0C_{out}$)	00	01	11	10
00	0000	1000	-	0101
01	0010	1010	-	0111
11	0110	0011	-	1011
10	0100	0001	-	1001

Una sintesi in forma SP per l'elemento raddoppiatore è:

$$z_2 = x_1 \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot x_0$$
$$z_1 = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + x_2 \cdot \overline{x_0}$$
$$z_0 = C_{in}$$
$$C_{out} = x_2 + x_1 \cdot x_0$$

2) Visto che $72 = 2 \cdot 6^2$, e la moltiplicazione per una potenza della base si fa aggiungendo zeri in coda, la rete richiesta è la seguente:



Esercizio 2

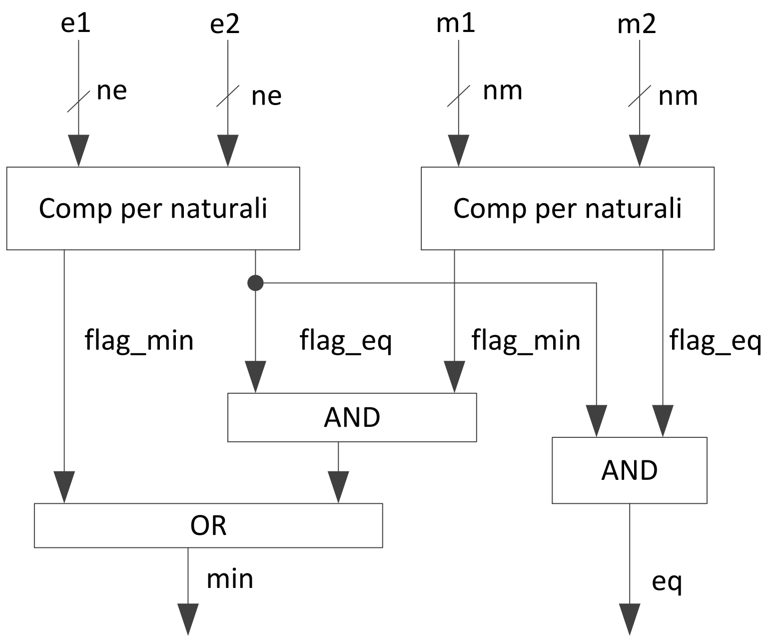
Si consideri un insieme di numeri *naturali* rappresentati secondo la seguente rappresentazione: $x \leftrightarrow (e, m)$, cioè il numero naturale *x* è rappresentato dalla coppia di numeri *naturali* e ed m, rappresentati in base due su n_e, n_m bit, rispettivamente, ed è:

a) $x = m \cdot 2^e$
b) Il bit più significativo di *m* **vale 1**.

1) Individuare l'intervallo di numeri rappresentabili per un dato un valore di e. Determinare se gli intervalli di numeri rappresentabili con due valori di e consecutivi sono disgiunti o meno.
2) Sintetizzare un comparatore per i numeri naturali così rappresentati, che abbia due uscite: eq, che vale 1 se i due numeri in ingresso x_1, x_2 sono uguali e 0 altrimenti, e min, che vale 1 se $x_1 < x_2$ e 0 altrimenti.

Esercizio 2 - Soluzione

1) L'insieme di numeri rappresentabili con esponente e è $[2^{e+n_m-1}; 2^{e+n_m} - 2^e]$. Due intervalli consecutivi sono sovrapposti se l'estremo superiore del primo è maggiore o uguale dell'estremo inferiore del secondo, cioè se $2^{e+n_m} - 2^e \geq 2^{(e+1)} \cdot 2^{n_m-1}$. Tale disequazione è falsa per qualunque valore di *e*, e quindi gli intervalli sono tutti mutuamente disgiunti.
2) Per quanto appena dimostrato al punto 1), la rappresentazione è unica. Pertanto il test $x_1 = x_2$ equivale a $(e_1 = e_2)\text{AND}(m_1 = m_2)$. Inoltre, dato che gli intervalli sono disgiunti, il test $x_1 < x_2$ equivale a $(e_1 < e_2)\text{OR}[(e_1 = e_2)\text{AND}(m_1 < m_2)]$. La rete che compie le operazioni richieste è quella in figura.



Esercizio 3

Sintetizzare una rete combinatoria che prende in ingresso le rappresentazioni ***in traslazione*** X, Y degli interi x, y, su n cifre in base β (pari), e produce in uscita le seguenti variabili:

1. *flag_eq*, che vale 1 se $x = y$ e 0 altrimenti
2. *flag_min*, che vale 1 se $x < y$ e 0 altrimenti
3. *flag_ov*, che vale 1 se $x + y$ non è un numero rappresentabile e 0 altrimenti

Esercizio 3 - Soluzione

1. visto che la rappresentazione è unica, il flag è l'uscita di un comparatore di uguaglianza per naturali avente in ingresso X e Y;
2. visto che la rappresentazione in traslazione è monotona, il flag è l'uscita di un comparatore di minoranza per naturali avente in ingresso X e Y;
3. la condizione di rappresentabilità è che $-\frac{\beta^n}{2} \leq x + y \leq \frac{\beta^n}{2} - 1$. Visto che $X = x + \frac{\beta^n}{2}$ in traslazione, allora abbiamo che:

$$-\frac{\beta^n}{2} \leq x + y \leq \frac{\beta^n}{2} - 1,$$
$$\beta^n - \frac{\beta^n}{2} \leq X + Y \leq \beta^n + \frac{\beta^n}{2} - 1$$
$$\beta^n \cdot 0 + \beta^{n-1} \cdot \frac{\beta}{2} \leq X + Y \leq \beta^n \cdot 1 + \beta^{n-1} \frac{\cdot \beta}{2} - 1$$

Dato $Z = X + Y$ (che sta su $n + 1$ cifre), avremo che il numero *x+y non* è rappresentabile se

$$\left[z_n = 0 \wedge z_{n-1} < \frac{\beta}{2}\right] \vee \left[z_n = 1 \wedge z_{n-1} \geq \frac{\beta}{2}\right]$$

Le condizioni scritte sopra sono tutte facilmente testabili con un comparatore di minoranza per naturali in base 2 su $\lceil log_2 \beta \rceil$, e poche porte AND/OR.

Esercizio 4

Sia *x* un intero in base β = dieci su $n = 1$ cifra e sia X la sua rappresentazione secondo la codifica BCD (8421).

1) <u>Descrivere e sintetizzare</u> in forma PS la rete combinatoria che ha in ingresso la rappresentazione X di x e produce in uscita la rappresentazione Y di $-x$.

2) Calcolare le uscite della rete (istanziando le espressioni algebriche della sintesi) quando x assume il *minimo* ed il *massimo* valore rappresentabile.

Soluzione

Per i numeri in oggetto, l'essere $a \leftrightarrow A$ su una cifra in base dieci significa $-5 \leq a < +5$, e

$$A = \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ 10 + a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

cioè

a	A
−5	5
−4	6
−3	7
−2	8
−1	9
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

Il risultato $y = -x$ è rappresentabile se e solo se $x > -5$. In accordo alla codifica 8421, si ha $X = (x_3x_2x_1x_0)_2$ e $Y = (y_3y_2y_1y_0)_2$, e la rete è descritta dalla seguente tabella di verità:

x	y = -x
0	0
1	−1
2	−2
3	−3
4	−4
−4	4
−3	3
−2	2
−1	1

cioè

X	Y
0	0
1	9
2	8
3	7
4	6
6	4
7	3
7	2
9	1
others	----

cioè

$x_3 \dots x_0$	$y_3 \dots y_0$
0000	0000
0001	1001
0010	1000
0011	0111
0100	0110
0110	0100
0111	0011
1000	0010
1001	0001
others	----

cui corrispondono le mappe di Karnaugh:

x_1x_0 \ x_3x_2	00	01	11	10
00	00	01	--	00
01	10	--	--	00
11	01	00	--	--
10	10	01	--	--

y_3y_2

x_1x_0 \ x_3x_2	00	01	11	10
00	00	10	--	10
01	01	--	--	01
11	11	11	--	--
10	00	00	--	--

y_1y_0

Una possibile realizzazione a costo minimo di tipo PS è la seguente:

$y_3 = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot (x_1 + x_0) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_0)$,

$y_2 = (x_2 + x_0) \cdot (x_1 + \bar{x}_0) \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_0)$,

$y_1 = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_0 + x_1) \cdot (x_0 + \bar{x}_1)$,

$y_0 = x_0$.

La rete ha un'uscita di overflow, che va ad 1 quando $X = 5 = (0101)_2$. Dalla sintesi PS si ottiene immediatamente: $ow = x_1 + \overline{x}_0 + \overline{x}_3$.