FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 14 settembre 2018

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1
Un condensatore piano nel vuoto ha le armature di area $A=1cm^2$, poste a distanza $d=1mm$, ed è riempito di un materiale di costante dieletttrica $\varepsilon_r = 4$. Le armature del condensatore sono connesse tramite un interruttore ai capi di una batteria che eroga una tensione costante $V_o = 100V$. L'interruttore è aperto per $t<0$; viene chiuso al tempo $t=0$, ed infine nuovamente aperto al tempo $t = \tau = 100ns$.

1.1 Si costruisca il grafico della carica su una armatura del condensatore in funzione del tempo t $(-\infty < t < +\infty)$ riportando le coordinate numeriche dei punti significativi.

1.2 Si calcoli il lavoro effettuato dalla batteria e la variazione di energia immagazzinata nel condensatore fra $t=0^-$ e $t=0^+$; si commenti - alla luce della legge di conservazione dell'energia - il risultato ottenuto.

Per i seguenti punti (**1.3 e 1.4**) si ipotizzi che in serie al condensatore sia presente una induttanza (parassita) $L=50nH$.

1.3 Si calcoli la carica su una armatura del condensatore in funzione del tempo t (limitandosi a $-\infty < t < \tau$) e la si riporti in un grafico, calcolando poi il valore medio di tale carica fra $t=0^+$ e $t=\tau^-$.

1.4 Si calcoli, fra $t=0^+$ e $t=\tau^-$: i) il lavoro della batteria, ii) la variazione di energia magnetica nell'induttanza, iii) la variazione di energia elettrica nel condensatore; si commentino - alla luce della legge di conservazione dell'energia - i risultati ottenuti.

Esercizio 2 Nel vuoto, in un sistema di coordinate cartesiane *Oxyz* dato, il campo di induzione magnetica di un'onda e.m. piana di frequenza $f=1\ GHz$ vale $\vec{B} = \left(0,\ B_y,\ 0 \right)$ con

$B_y = B_o \cos\left(\frac{kx}{2} - \frac{kz\sqrt{3}}{2} - \omega t\right)$ e $B_o = 5nT$.

2.1 Si calcolino i *valori numerici* di ω e k, ed il valore delle tre componenti del vettore d'onda $\vec{k}$.

2.2 Si calcolino le tre componenti del campo elettrico in ogni punto dello spazio al tempo t.

2.3 Si calcolino le tre componenti del vettore di Poynting in ogni punto dello spazio al tempo t ed il loro *valore numerico mediato nel tempo*.

2.4 Si calcoli, in funzione del tempo t, la forza totale esercitata dall'onda su un sistema composti da due elettroni, vincolati il primo nel punto O ed il secondo nel punto $A = \left(\frac{\pi}{k},\ 0,\ 0 \right)$; e si calcoli infine il valore *numerico massimo del modulo* di tale forza.

FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 14 settembre 2018
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Alla chiusura dell'interruttore il condensatore si carica istantaneamente alla tensione $V_o = 100V$, ed alla sua riapertura resta comunque carico, poichè non ci sono altri elementi circuitali volutamente inseriti oppure parassiti. La capacità del condensatore vale $C = \varepsilon_r \varepsilon_o \frac{A}{d} = 3.54 pF$

e si ha $Q = \begin{cases} 0 & per \quad t < 0 \\ CV_o = 354 pC & \quad t > 0 \end{cases}$, con il grafico riportato in rosso in figura.

1.2 Il lavoro del generatore vale $L_{gen} = \int_{0^-}^{0^+} i\, dt = QV_o = CV_o^2 = 35.4 nJ$; la variazione di energia immagazzinata nel condensatore vale $\Delta U_{el} = U_{el}(0^+) - U_{el}(0^-) = \frac{CV_o^2}{2} - 0 = \frac{CV_o^2}{2} = 17.7 nJ$.
Commento: solo la metà dell'energia erogata viene accumulata nel condensatore, la parte restante deve essere dissipata. La dissipazione, se non avviene tramite una resistenza parassita, può avvenire solo per irraggiamento di onde e.m.

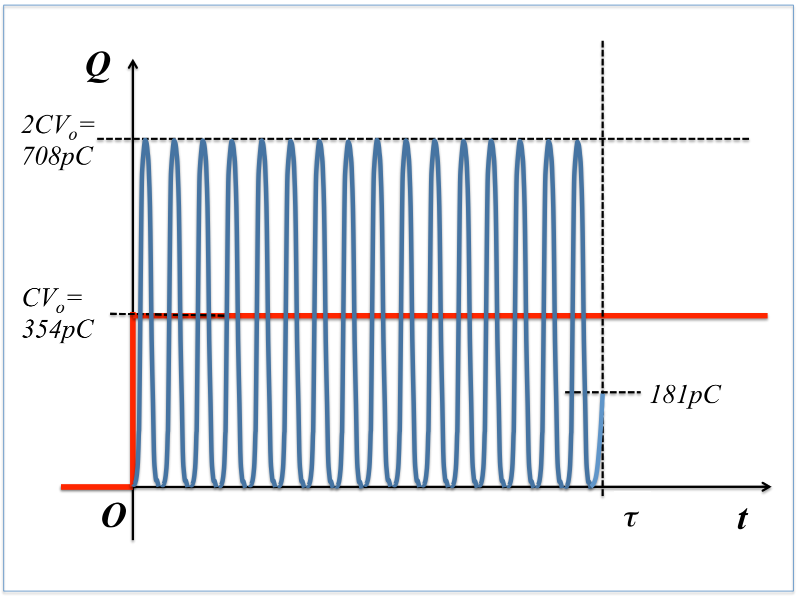
1.3 È un circuito LC, in cui al tempo $t=0$ il condensatore è scarico e la corrente è nulla, per $0<t<\tau$:

l'equazione del circuito con le relative condizioni al contorno è $\begin{cases} L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = V_o \\ Q(0) = 0 \\ \dot{Q}(0) = 0 \end{cases}$. Risolvendo:

$Q(t) = CV_o(1 - \cos\omega t)$ con $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.4x10^9 rad/s$ e $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} = 2.64 ns$, come riportato in blu in figura. Poichè $\omega\tau = 237.7$, $Q(\tau) = CV_o(1 - \cos\omega\tau) \approx 181 pC$. Il valore medio è $< Q >= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau CV_o(1 - \cos\omega t) = CV_o\left(1 - \frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau}\right) \cong CV_o$, in quanto $\omega\tau >> 1$: notiamo che questo valore medio coincide proprio con la carica che si otterrebbe senza induttanza parassita.

1.4 $L_{gen} = \int_0^\tau \dot{Q} V_o\, dt = Q(\tau)V_o = CV_o^2(1 - \cos\omega\tau)$, $\Delta U_{el} = U_{el}(\tau) - U_{el}(0) = \frac{Q^2(\tau)}{2C} - 0 = \frac{CV_o^2}{2}(1 - \cos\omega\tau)^2$,

$\Delta U_m = U_m(\tau) - U_m(0) = \frac{L}{2}\dot{Q}^2(\tau) - 0 = \frac{L}{2}(\omega CV_o \sin\omega\tau)^2 = \frac{CV_o^2}{2}\sin^2\omega\tau$. Notiamo che l'energia erogata dalla batteria non si dissipa ma viene tutta immagazzinata nell'induttanza e nel condensatore: $\Delta U_{el} + \Delta U_m = L_{gen}$.



Esercizio 2

2.1 $\omega = 2\pi f = 6.28x10^9 rad/s$, $k = \frac{\omega}{c} = 20.9m^{-1}$, $\vec{k} = \left(\frac{k}{2}, \quad 0, \quad -\frac{k\sqrt{3}}{2} \right)$; definiamo anche

$\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k} = \left(\frac{1}{2}, \quad 0, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

2.2 $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \hat{k} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} cB_o \cos\left(\frac{kx}{2} - \frac{kz\sqrt{3}}{2} - \omega t \right), \quad 0, \quad -\frac{1}{2} cB_o \cos\left(\frac{kx}{2} - \frac{kz\sqrt{3}}{2} - \omega t \right) \right)$

2.3 $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o} = \frac{cB_0^2}{\mu_o} \cos^2\left(\frac{kx}{2} - \frac{kz\sqrt{3}}{2} - \omega t \right) \hat{k}$ e $<\vec{S}> = \frac{cB_0^2}{2\mu_o} \hat{k} = 2.97 \frac{mW}{m^2} \left(-\frac{1}{2}, \quad 0, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

2.4 La forza risultante è la somma delle forze elettriche sui due elettroni (ognuno di carica -*e*); la forza magnetica è nulla perchè gli elettroni sono vincolati in punti fissi:

$$\vec{F} = -e\vec{E}(O,t) - e\vec{E}(A,t) = -e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} cB_o \cos(-\omega t), \quad 0, \quad -\frac{1}{2} cB_o \cos(-\omega t) \right) - e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} cB_o \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right), \quad 0, \quad -\frac{1}{2} cB_o \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right) =$$

$$= \frac{ecB_o}{2}\left[\left(\sqrt{3}\cos(\omega t), \quad 0, \quad \cos(-\omega t) \right) + \left(\sqrt{3}\sin(\omega t), \quad 0, \quad \sin(\omega t) \right) \right] = \frac{ecB_o}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right), \quad 0, \quad \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

La forza ha modulo $\sqrt{2}ecB_o \left| \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right|$ ed il suo valore massimo è $\sqrt{2}ecB_o = 3.4x10^{-19} N$.