FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 20 luglio 2018

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________________

Nota: questo foglio deve essere restituito. Nota: è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte. Nota: sono importanti le valutazioni numeriche.

Esercizio 1

In un sistema di coordinate *Oxyz* si trova un condensatore con le armature di area $A=1mm^2$ poste nei piani $x=0$ ed $x=d=100\mu m$. Il condensatore è riempito di un ipotetico materiale di costante dieletttrica $\varepsilon_r = 10$ e conducibilità $\sigma = \sigma_o \dfrac{d}{d+x}$ con $\sigma_o = 1\ \Omega^{-1} m^{-1}$. Nel dispositivo scorre una corrente di intensità $I=5mA$ con densità uniforme nella direzione $+x$.

1.1 Si calcolino le tre componenti del campo elettrico in ogni punto dello spazio.
1.2 Si calcoli la differenza di potenziale elettrico fra $x=0$ ed $x=d$.
1.3 Si calcoli la densità di volume della carica libera in funzione di x.
1.4 Si calcoli l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.

Esercizio 2 In un sistema di coordinate cartesiane *Oxyz,* nel vuoto, il campo elettrico di un'onda e.m. piana vale $\vec{E} = \left(0,\ 0,\ E_o \cos\left(k\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - ct \right)\right) \right)$ con $E_o=3V/m$ e $k=2m^{-1}$.

2.1 Si calcolino le tre componenti del campo magnetico in ogni punto dello spazio al tempo t ed il valore numerico massimo del modulo del campo magnetico.
2.2 Si calcolino le tre componenti del vettore di Poynting in ogni punto dello spazio al tempo t ed il valore numerico massimo del modulo del vettore di Poynting.
2.3 L'onda incide su una spira circolare di centro *O*, giacente nel piano *xz*, avente raggio $a = 10cm$, resistenza $R=10\Omega$ ed induttanza trascurabile. Si calcoli il valore numerico massimo della corrente elettrica indotta dall'onda e.m. nella spira, ipotizzando che, ad ogni istante di tempo, il campo magnetico sulla spira sia uniforme e pari al valore che esso assume nel centro.
2.4 Si risponda nuovamente alla domanda precedente nell'ipotesi in cui la auto-induttanza della spira non sia trascurabile, ma abbia il valore $L=20nH$. Nota: siamo in una situazione stazionaria, in cui l'onda incide da un tempo molto lungo sulla spira.

FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 20 luglio 2018
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 , $\varepsilon_r = 10$ Il campo elettrico ha solo componente *x*, indicando con $\vec{J}$ la densità di corrente si ha $E_x = \frac{J_x}{\sigma} = \frac{J_x}{\sigma_o}\frac{d+x}{d} = \frac{I}{A\sigma_o}\left(1+\frac{x}{d}\right)$ con $\frac{I}{A\sigma_o} = 5000\frac{V}{m}$.

1.2 $V(0)-V(d) = \int_0^d E_x\,dx = \int_0^d \frac{I}{A\sigma_o}\left(1+\frac{x}{d}\right)E_x\,dx = \frac{3}{2}\frac{Id}{A\sigma_o} = 0.75V$

1.3 Poichè $D_x = \varepsilon_r\varepsilon_0 E_x = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 I}{A\sigma_o}\left(1+\frac{x}{d}\right)$, $\rho_{lib} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 I}{A\sigma_o d} = 4.4x10^{-3}\frac{C}{m^3}$ e la densità di carica non dipende da *x*. Nota: questa non è assolutamente una legge generale, ma solo una conseguenza della [molto] particolare dipendenza della conducibilità dalla coordinata *x*.

1.4 $U = \frac{1}{2}\int_0^d \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{2}\int_0^d \varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{I}{A\sigma_o}\right)^2\left(1+\frac{x}{d}\right)^2 A\,dx = \frac{7}{6}\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 d}{A}\frac{I^2}{\sigma_0^2} = 2.6x10^{-13}J$.

Esercizio 2

2.1 $\vec{k} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}},\ \frac{k}{\sqrt{2}},\ 0\right) \Rightarrow \vec{B} = \hat{k}\wedge\frac{\vec{E}}{c} = \left(\frac{E_o}{c\sqrt{2}}\cos\left(k\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-ct\right)\right),\ -\frac{E_o}{c\sqrt{2}}\cos\left(k\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-ct\right)\right),\ 0\right)$. Il massimo del campo magnetico si ha per valori del coseno pari ad uno, per cui $B_{\max} = \frac{E_o}{c} = 10nT$.

2.2 $\vec{S} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \hat{k}\frac{E_o B_{\max}}{\mu_0}\cos^2\left(\frac{kx}{\sqrt{2}}+\frac{ky}{\sqrt{2}}-kct\right)$, quindi $S_{\max} = \frac{E_o B_{\max}}{\mu_0} \approx 24\frac{mW}{m^2}$.

2.3 Inseriamo la spira con il suo centro nel punto O e nel piano xz , quindi $\hat{n} = (0,\ 1,\ 0)$. Possiamo approssimare il campo magnetico sulla spira come uniforme e pari al valore che esso assume nel centro, perchè la lunghezza d'onda della radiazione incidente è piccola rispetto alle dimensioni della spira: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 314cm >> 2a = 20cm$. La f.e.m. indotta vale $\varepsilon = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\cdot\hat{n})}{dt}\pi a^2 = -\frac{\pi a^2 E_o}{c\sqrt{2}}\frac{d[\cos(-ckt)]}{dt} = -\frac{\pi a^2 E_o k}{\sqrt{2}}\sin(ckt) = -\varepsilon_{\max}\sin(ckt)$, con $\varepsilon_{\max} = \frac{\pi a^2 E_o k}{\sqrt{2}} = 130mV$, per cui $i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\varepsilon_{\max}}{R}\sin(ckt) = -i_{\max}\sin(ckt)$ con $i_{\max} = \frac{\varepsilon_{\max}}{R} = 13mA$.

2.4 Se la auto-induttanza della spira non fosse nulla, la corrente dovrebbe verificare la legge $Ri + L\frac{di}{dt} = -\varepsilon_{\max}\sin(ckt)$ con $L=20nH$. La soluzione più generale è $i = Ae^{-t/\tau} + \tilde{i}$ con

$\tau = \frac{L}{R} = 2ns$ e $\tilde{i}$ soluzione particolare. Poichè siamo in una situazione stazionaria, in cui l'onda incide da un tempo molto lungo (praticamente da $t=-\infty$) sulla spira, si avrà $A=0$. La soluzione possibile è quindi esclusivamente una soluzione particolare, che cerchiamo di tipo armonico con la stessa frequenza dell'onda incidente: $\tilde{i} = D\sin(ckt+\phi)$.
Sostituendo questa espressione nell'equazione del circuito abbiamo $LDck\cos(ckt+\phi) + RD\sin(ckt+\phi) = -\varepsilon_{\max}\sin(ckt)$; sviluppando e dividendo per R:
$\tau Dck\cos(ckt)\cos(\phi) - \tau Dck\sin(ckt)\sin(\phi) + D\sin(ckt)\cos(\phi) + D\cos(ckt)\sin(\phi) = -\frac{\varepsilon_{\max}}{R}\sin(ckt)$.
Uguagliando i termini con la stessa dipendenza temporale otteniamo un sistema $\begin{cases} \tau Dck\cos\phi + D\sin\phi = 0 \\ -\tau Dck\sin\phi + D\cos\phi = -\frac{\varepsilon_{\max}}{R} \end{cases}$; ponendo $\alpha \equiv \tau ck = 1.2$ abbiamo $\begin{cases} \tan\phi = -\alpha = -1.2 \\ D = -\frac{\varepsilon_{\max}}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = -8.3mA \end{cases}$. Il valore assoluto $|D|=8.3mA$ è la corrente massima nella spira; notiamo come l'induttanza abbia attenuato l'ampiezza e sfasato le oscillazioni della corrente indotta rispetto al caso puramente resistivo.