FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 29 giugno 2018

COGNOME ____________________ NOME ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Una spira circolare ha raggio $a=1cm$, resistenza $R=10k\Omega$ e autoinduttanza trascurabile. La spira è bloccata sul piano $z=0$ di un sistema di coordinate ed il suo centro si trova nel punto O. In tutto lo spazio è presente un campo magnetico che forma con l'asse z un angolo $\alpha=30°$, ha ampiezza $B_o=1nT$ ed oscilla con una frequenza $f=100MHz$.

1.1 Si calcoli la corrente indotta nella spira in funzione del tempo (espressione algebrica) ed il valore numerico massimo di tale corrente.

1.2 Si calcoli l'unica componente non nulla del momento magnetico della spira in funzione del tempo ed il valore numerico massimo di tale momento magnetico.

1.3 Si calcoli il valore numerico massimo del momento delle forze sulla spira.

1.4 Si consideri un punto P posto ad una quota z sull'asse della spira. Utilizzando la II legge di Laplace, si calcoli al tempo t il campo magnetico generato dalla sola corrente indotta nella spira nel punto P . Si dica se l'espressione trovata sia una buona approssimazione nei casi $z=1mm$, $z=10cm$, $z=10m$.

Esercizio 2 Due armature metalliche di un condensatore, ciascuna di area S, si trovano in $z=0$ e $z=\delta$ e sono elettricamente isolate. All'interno del condensatore nella regione $\frac{1}{3}\delta < z < \frac{2}{3}\delta$ si trova un dielettrico isolante scarico di costante dielettrica $\varepsilon_r = 2$. Sulla armatura in $z=0$ è depositata una carica $Q_{lib}>0$, mentre una carica opposta ($-Q_{lib}$) è depositata in $z=\delta$.

2.1 Si calcoli la componente E_z del campo elettrico in funzione di z e la si riporti in un grafico in funzione di z.

2.2 Si calcoli la capacità del condensatore.

2.3 Si calcolino: *i)* la componente F_z della forza totale sulla armatura in $z=0$; *ii)* la componente F_z della forza totale sulla superficie del dielettrico in $z=\frac{2}{3}\delta$; *iii)* la componente F_z della forza totale sulla superficie del dielettrico in $z=\frac{1}{3}\delta$.

2.4 Solo per questa domanda si ipotizzi che il dielettrico, se deformato di un tratto Δz (molto minore di δ) rispetto al suo spessore di equilibrio, reagisca con una forza elastica $-K\Delta z$. Si calcoli la deformazione (specificando se allungamento o accorciamento) che il dielettrico subisce quando vi sono sulle armature le cariche libere $\pm Q_{lib}$. [Nota: quando $Q_{lib}=0$, lo spessore del dielettrico è esattamente $\delta/3$ e la sua costante dielettrica è esattamente $\varepsilon_r = 2$; si ipotizzi anche che il dielettrico sia composto da molecole che mantegono la loro forma inalterata durante le deformazioni macroscopiche, mentre varia solamente la distanza intermolecolare]

FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 29 giugno 2018
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Con una opportuna scelta del tempo t=0, la componente *z* del campo magnetico si scrive $B_z = B_o \cos(2\pi ft)\cos\alpha$; utilizzando la legge di Faraday $i(t) = \frac{1}{R} 2\pi^2 a^2 B_o f \sin(2\pi ft)\cos\alpha$, da cui il valore massimo della corrente risulta $i_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{R}\pi^2 a^2 B_o f = 17nA$.

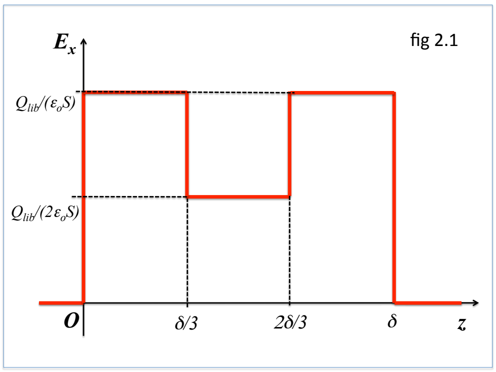
1.2 Il momento magnetico ha solo componente *z*, che vale $\mu_z = \pi a^2 i(t) = \frac{1}{R} 2\pi^3 a^4 B_o f \sin(2\pi ft)\cos\alpha$, da cui il suo valore massimo $\mu_{z,\max} = \frac{1}{R} 2\pi^3 a^4 B_o f \cos\alpha = 5.4x10^{-12} A \cdot m^2$.

1.3 Il momento delle forze magnetiche sulla spira $\vec{\mu} \wedge \vec{B}$ ha solo componente perpendicolare all'asse *z* ed al campo magnetico. Indicando tale asse come asse *y*, si ha
$\tau_y = -\mu_z B_x = -\frac{1}{R} 2\pi^3 a^4 B_0^2 f \sin(2\pi ft)\cos(2\pi ft)\sin\alpha\cos\alpha$, da cui
$\tau_{y,\max} = \frac{1}{R}\pi^3 a^4 B_0^2 f \sin\alpha\cos\alpha = 1.35x10^{-21} N \cdot m$.

1.4 Il campo $\vec{B}'$ sull'asse della spira, utilizzando la II legge di Laplace, ha solo componente *z* e vale $B_z' = \frac{\mu_o i(t) a^2}{2\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}} = -\frac{\pi^2 \mu_o a^4 B_o f \cos\alpha}{R\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}} \sin(2\pi ft)$. Questa espressione non tiene conto del fatto che il campo magnetico induce un campo elettrico, anch'esso variabile nel tempo, che a sua volta induce un campo magnetico, generando quindi delle onde e.m. La nostra soluzione sarà una buona approssimazione solo nella regione $|z| << \lambda = \frac{c}{f} = 3m$, per cui *z=10m* è il solo valore da escludersi. Notiamo inoltre che $\frac{B'_{z,\max}}{B_o} = \frac{\pi^2 \mu_o a^4 f \cos\alpha}{R\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}} \leq \frac{\pi^2 \mu_o a f \cos\alpha}{R} = 0.0011$: se avessimo trovato un rapporto più vicino all'unità, avremmo anche dovuto considerare un effetto di autoinduzione (ricordando però che essa dipende soprattutto dallo spessore del filo) in contrasto con quanto ipotizzato nel testo.

Esercizio 2

2.1 All'esterno del condensatore il campo elettrico è nullo. All'interno ha solo componente z; utilizzando la legge di Gauss si ha: $E_z = \begin{cases} \dfrac{Q_{lib}}{\varepsilon_o S} & 0 < z < \frac{1}{3}\delta \\ \dfrac{Q_{lib}}{\varepsilon_r \varepsilon_o S} \quad se & \frac{1}{3}\delta < z < \frac{2}{3}\delta \\ \dfrac{Q_{lib}}{\varepsilon_o S} & \frac{2}{3}\delta < z < \delta \end{cases}$ come in figura 2.1



2.2 Il potenziale fra le piastre vale $\Delta V = \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_o S}\cdot\frac{1}{3}\delta + \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_r\varepsilon_o S}\cdot\frac{1}{3}\delta + \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_o S}\cdot\frac{1}{3}\delta = \frac{Q_{lib}\delta}{3\varepsilon_o S}\left(2+\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{5Q_{lib}\delta}{6\varepsilon_o S}$, da cui si trova $C = \frac{Q_{lib}}{\Delta V} = \frac{6}{5}\varepsilon_o \frac{S}{\delta}$.

2.3 La forza su un piano contenente carica superficiale è pari alla carica totale sullo strato considerato, moltiplicato il valore *medio* del campo elettrico su quel piano. Notiamo infatti che, a causa della presenza della carica superficiale, vi è una discontinuità del campo. Di conseguenza:

i) in $z=0$ è presente la carica Q_{lib}, quindi $F_z(z=0) = Q_{lib}\frac{E_z(0^+)+E_z(0^-)}{2} = \frac{Q_{lib}^2}{2\varepsilon_o S}$;

ii) in $z = \frac{2}{3}\delta$ è presente una carica $Q_{pol}\left(z=\frac{2}{3}\delta\right) = \left(\vec{P}\cdot\hat{n}\right)S = \chi\varepsilon_o E_z S = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_r\varepsilon_o S}S = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Q_{lib} = \frac{Q_{lib}}{2}$, quindi

$$F_z\left(z=\frac{2}{3}\delta\right) = Q_{pol}\frac{E_z\left(\frac{2}{3}\delta^+\right)+E_z\left(\frac{2}{3}\delta^-\right)}{2} = \frac{Q_{lib}^2}{4\varepsilon_o S}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{3Q_{lib}^2}{8\varepsilon_o S};$$

iii) in $z = \frac{1}{3}\delta$ in $z = \frac{2}{3}\delta$ è presente una carica $-Q_{pol} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Q_{lib} = -\frac{Q_{lib}}{2}$, quindi

$$F_z\left(z=\frac{1}{3}\delta\right) = -Q_{pol}\frac{E_z\left(\frac{1}{3}\delta^+\right)+E_z\left(\frac{1}{3}\delta^-\right)}{2} = -\frac{Q_{lib}^2}{4\varepsilon_o S}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = -\frac{3Q_{lib}^2}{8\varepsilon_o S}.$$

Per introdurre la domanda successiva si noti che $F_z\left(z=\frac{2}{3}\delta\right) = -F_z\left(z=\frac{1}{3}\delta\right) > 0$: il dielettrico è sottoposto a forze di trazione che tendono a dilatarlo.

2.4 Il dielettrico, poichè le forze sulle cariche di polarizzazioni superficiali tendono a dilatarlo, all'equilibrio sarà posizionato nella regione $\frac{1}{3}\delta - \frac{\Delta z}{2} \le z \le \frac{2}{3}\delta + \frac{\Delta z}{2}$ con $\Delta z > 0$. Nelle ipotesi date la costante dielettrica è inversamente proporzionale al volume occupato dal dielettrico, per cui

$\varepsilon_r(\Delta z) = 2\dfrac{\frac{\delta}{3}}{\frac{\delta}{3}+\Delta z} = \dfrac{2}{1+\frac{3\Delta z}{\delta}}$. Il campo elettrico, poichè la carica Q_{lib} è fissata, si calcola con lo stesso metodo della domanda 2.1 $E_z = \begin{cases} \dfrac{Q_{lib}}{\varepsilon_o S} & 0 < z < \frac{1}{3}\delta \\ \dfrac{Q_{lib}}{\varepsilon_r(\Delta z)\varepsilon_o S} \quad se & \frac{1}{3}\delta < z < \frac{2}{3}\delta \\ \dfrac{Q_{lib}}{\varepsilon_o S} & \frac{2}{3}\delta < z < \delta \end{cases}$, mentre la carica di polarizzazione in $z = \frac{2}{3}\delta$ adesso vale $Q_{pol}\left(z = \frac{2}{3}\delta\right) = \dfrac{\varepsilon_r(\Delta z)-1}{\varepsilon_r(\Delta z)}Q_{lib}$. La forza elettrostatica che tende a dilatare il dielettrico in $z = \frac{2}{3}\delta$ vale $F'_z\left(z = \frac{2}{3}\delta\right) = Q_{pol}\dfrac{Q_{lib}}{2\varepsilon_o S}\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon_r(\Delta z)}\right) = \dfrac{\varepsilon_r^2(\Delta z)-1}{\varepsilon_r^2(\Delta z)}\dfrac{Q_{lib}^2}{2\varepsilon_o S} = \left[4-(1+3\Delta z/\delta)^2\right]\dfrac{Q_{lib}^2}{8\varepsilon_o S}$ ed all'equilibrio sommata alla forza elastica *-KΔz* dà zero. Ipotizzando che vi siano piccole deformazioni otteniamo $0 = \left[4-(1+3\Delta z/\delta)^2\right]\dfrac{Q_{lib}^2}{8\varepsilon_o S} - K\Delta z \approx \left(3-\dfrac{3\Delta z}{\delta}\right)\dfrac{Q_{lib}^2}{8\varepsilon_o S} - K\Delta z$, da cui

$\dfrac{\Delta z}{\delta} \approx \dfrac{1}{2+\frac{8\varepsilon_o SK\delta}{3Q_{lib}^2}} \approx \dfrac{1}{\frac{8\varepsilon_o SK\delta}{3Q_{lib}^2}}$.