FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 8 giugno 2018

COGNOME ____________________ NOME ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 *Nota: sono importanti le valutazioni numeriche.*
Un solenoide, con $N = 100$ spire, altezza $h = 10\ cm$ e raggio $a = 1cm$, è chiuso attraverso un interruttore ed una resistenza esterna $R=10\Omega$ ad una pila che eroga una tensione $V_o=10V$. L'interruttore è aperto per $t<0$ e viene chiuso al tempo $t=0$. Si utilizzi un sistema di coordinate cilindriche $rz\phi$, in cui l'asse z coincide con l'asse del solenoide.

1.1 Si calcoli il coefficiente di autoinduzione del solenoide.

1.2 Si calcoli la corrente che scorre nel solenoide al tempo t, e si disegni il grafico della corrente in funzione del tempo, riportando le coordinate numeriche dei punti significativi.

1.3 Si calcolino le tre componenti del campo magnetico e del campo elettrico nello spazio vuoto all'interno del solenoide, nell'ipotesi in cui la costante tempo del circuito sia molto maggiore del rapporto a/c.

1.4 Si calcolino tutti i termini del teorema di Poynting applicato ad un cilindro di asse z, altezza h e raggio $a/2$ e si discuta il risultato ottenuto.

Esercizio 2 In un sistema $Oxyz$ un materiale dielettrico, perfettamente isolante con costante dielettrica $\varepsilon_r = 4$, riempie il parallelepipedo $0 \le x \le a$, $|y| \le L/2$, $|z| \le L/2$, con $L >> a$. La superficie in $x=0$ del parallelepipedo è caricata, per esempio con tecniche di impiantazione ionica, con della carica "libera" superficiale positiva di valore noto σ. Non vi sono altre cariche libere nel dielettrico o nello spazio circostante.

2.1 Si calcoli e si riporti in un grafico in funzione di x il valore del campo elettrico, limitandosi alla regione $|x|<<L$.

2.2 Si calcoli e si riporti in un grafico in funzione di x il valore del potenziale elettrico, limitandosi alla regione $|x|<<L$, ed imponendo che il potenziale sia nullo in $x=0$.

2.3 Si calcoli l'energia elettrostatica contenuta nella regione del parallepipedo.

2.4 Se le cariche impiantate fossero, invece, libere di muoversi, quale sarebbe la loro distribuzione dopo un tempo infinito e quale sarebbe l'energia elettrostatica finale contenuta nel parallelepipedo? Durante il moto delle cariche, si induce un campo magnetico all'interno del dielettrico?

FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 8 giugno 2018
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Il coefficiente di autoinduzione vale $L = \frac{\pi\mu_o N^2 a^2}{h} = 39.5\mu H$

1.2 L'equazione del circuito è $\begin{cases} L\frac{di}{dt} + Ri = V_o \\ i(0) = 0 \end{cases}$, da cui $i = i_o\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ con $\tau = \frac{L}{R} = 3.95\mu s$ e $i_o = \frac{V_o}{R} = 1A$. Il grafico è in figura *1.2*.

1.3 L'ipotesi in cui la costante tempo del circuito sia molto maggiore del rapporto *a/c* permette di calcolare il campo magnetico come generato dalla sola corrente di conduzione, all'interno del solenoide e con ottima approssimazione.
L'unica componente non nulla del campo magnetico è quella assiale: $B_r = B_\phi = 0$,
$B_z = \frac{\mu_o N i_o}{h}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = (125.6Gauss)\cdot\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$
L'unica componente non nulla del campo elettrico è tangenziale: $E_r = E_z = 0$,
$2\pi r E_\phi = -\frac{d\left(\pi r^2 B_z\right)}{dt} \Rightarrow E_\phi = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dt} = -\frac{r}{2}\frac{V_o}{\pi a^2 N}e^{-t/\tau}$.

1.4 Il primo termine del teorema di Poynting, $\int\limits_{\substack{r<a/2\\0<z<h\\0<\phi<2\pi}} \vec{j}\bullet\vec{E}\,dV$ inerente il lavoro dei campi sulle cariche, è nullo ad ogni istante perchè $\vec{j} = \vec{0}$.
Il secondo termine è il flusso del vettore di Poynting, che ha solo componente radiale $S_r = \frac{E_\phi B_z}{\mu_o} = -\frac{r}{2}\frac{B_z}{\mu_o}\frac{dB_z}{dt}$ e varia col tempo: $\int\limits_{\substack{r=a/2\\0<z<h\\0<\phi<2\pi}} \vec{S}\bullet\hat{n}\,dA = S_r\left(r = \frac{a}{2}\right)2\pi\frac{a}{2}h = -\frac{\pi a^2 h}{4}\frac{B_z}{\mu_o}\frac{dB_z}{dt}$. Si noti che tale termine è negativo, in quanto il campo magnetico cresce col tempo, e quindi energia elettromagnetica entra nel cilindro.
Il terzo termine è la variazione nel tempo dell'energia e.m. contenuta all'interno: $\frac{d\left(U_{mag} + U_{el}\right)}{dt}$. Si ha $U_{mag} = \int\limits_{\substack{r<a/2\\0<z<h\\0<\phi<2\pi}} \frac{B_z^2}{2\mu_o}dV = \frac{\pi a^2 h}{8}\frac{B_z^2}{\mu_o}$ da cui $\frac{dU_{mag}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi a^2 h}{8}\frac{B_z^2}{\mu_o}\right) = \frac{\pi a^2 h}{4}\frac{B_z}{\mu_o}\frac{dB_z}{dt}$.
Il terzo termine (positivo) sommato al flusso del vettore di Poynting, calcolato poco sopra, dà zero e quindi il teorema risulterebbe verificato.
Per completezza, dobbiamo tuttavia notare che:

i) non abbiamo incluso il termine $U_{el} = \int\limits_{\substack{r<a/2\\0<z<h\\0<\phi<2\pi}} \varepsilon_o\frac{E_\phi^2}{2}dV$ nell'energia e.m.;

ii) abbiamo calcolato il campo magnetico tenendo conto solo della corrente di conduzione e non della corrente di spostamento.

Entrambi i termini rappresentano delle correzioni dell'ordine del rapporto *a/cτ*, o termini superiori, e quindi sarebbero trascurabili per l'ipotesi di lavoro *a/c<<τ*. A titolo di esempio calcoliamo il termine (i) $\frac{dU_{el}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_o}{2}\int\limits_{\substack{r<a/2\\0<z<h\\0<\phi<2\pi}} E_\phi^2\, dV\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_o h}{2}\int_0^{a/2}\left(-\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dt}\right)^2 2\pi r\, dr\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon_o \pi a^4 h}{256}\left(\frac{dB_z}{dt}\right)^2\right]$ e notiamo che è effettivamente trascurabile $\left|\frac{\frac{dU_{el}}{dt}}{\frac{dU_{mag}}{dt}}\right|=\frac{\left|\frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon_o\pi a^4 h}{256}\left(\frac{dB_z}{dt}\right)^2\right]\right|}{\frac{\pi a^2}{4}\frac{B_z}{\mu_o}\left|\frac{dB_z}{dt}\right|}=\frac{\frac{\varepsilon_o\pi a^4 h}{256}2\left|\frac{dB_z}{dt}\right|\left|\frac{d^2B_z}{dt^2}\right|}{\frac{\pi a^2}{4}\frac{B_z}{\mu_o}\left|\frac{dB_z}{dt}\right|}=\frac{a^2\left|\frac{d^2B_z}{dt^2}\right|}{32c^2B_z}=\frac{a^2}{32c^2\tau^2}$ rispetto al termine magnetico. Se avessimo calcolato anche il termine (ii), avremmo trovato correzioni dello stesso ordine di grandezza, o superiori. Un calcolo esatto, a tutti gli ordini in $a/c\tau$, verificherebbe esattamente il teorema di Poyniting, ma esula dalla trattazione di questo corso.

Esercizio 2

2.1 Il valore del vettore induzione elettrica dipende solo dalle cariche libere, per cui, limitandoci alla regione $|x|<<L$, per non dover considerare effetti di bordo, utilizzando la legge di Gauss si ha: $D_x=\begin{cases}\sigma/2 & \text{per } x>0\\ -\sigma/2 & x<0\end{cases}$. Di conseguenza $E_x=\varepsilon_o\varepsilon_r D_x=\begin{cases}\sigma/2\varepsilon_o & x>a\\ \sigma/8\varepsilon_o & \text{per } 0<x<a\\ -\sigma/2\varepsilon_o & x<0\end{cases}$, con il grafico in figura *2.1*.

2.2 Utilizzando la definizione di potenziale elettrico e limitandoci alla regione $|x|<<L$ si ha:

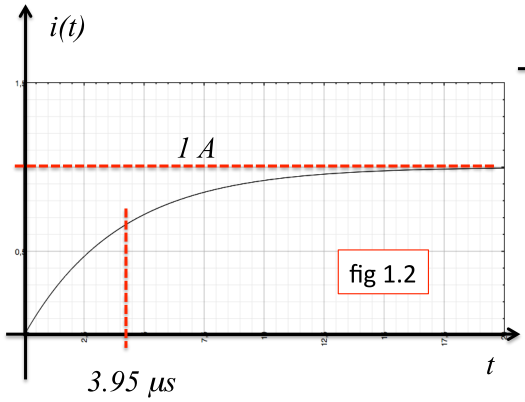
- zona $x<0$: $V(x)=V(0)-\int_0^x E_x\, dx=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}x$;
- zona $0<x<a$: $V(x)=V(0)-\int_0^x E_x\, dx=-\frac{\sigma}{8\varepsilon_o}x$;
- zona $x>a$: $V(x)=V(a)-\int_a^x E_x\, dx=-\frac{\sigma}{8\varepsilon_o}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(x-a)=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}x+\frac{3\sigma}{8\varepsilon_o}a$.

Il grafico è in figura *2.2*.

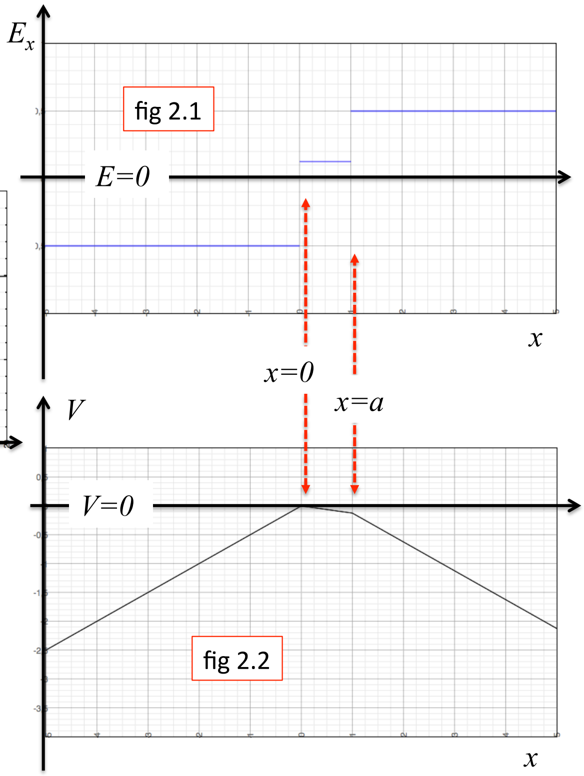
2.3 L'energia nel parallelepipedo si ottiene integrando la densità di energia elettrica:

$$U=\int\limits_{parallelepip.}\frac{\vec{D}\bullet\vec{E}}{2}dV=\int_0^a\frac{1}{2}\frac{\sigma}{2}\frac{\sigma}{8\varepsilon_o}L^2\, dx=\frac{\sigma^2}{32\varepsilon_o}L^2 a \quad .$$

2.4 Al ristabilirsi dell'equilibrio elettrostatico dopo un tempo infinito, le cariche libere si dispongono per il *50%* in $x=0$ e per il restante *50%* in $x=a$. Di conseguenza il campo elettrico nel dielettrico è nullo e quindi è nulla l'energia elettrostatica immagazzinata nel dielettrico. Per discutere la presenza a meno di un campo magnetico, indichiamo con $\sigma(0)$ la carica iniziale e con $\sigma(t)$ quella al tempo t ancora presente in $x=0$; la carica in $x=a$ sarà quindi $\sigma(a)=\sigma(0)-\sigma(t)$. Questa cariche generano all'interno un campo di induzione $D_x=\frac{\sigma(t)-\sigma(a)}{2}=\sigma(t)-\frac{\sigma(0)}{2}$. Inoltre dalla legge di conservazione della carica ricaviamo che la corrente nel volume è $j_x=-\frac{d\sigma(t)}{dt}$. Possiamo quindi utilizzare la IV equazione di Maxwell in *assenza di materiali magnetici* $\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_o\left(\vec{j}_{cond}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$ e concludere che il campo magnetico ha rotore identicamente nullo in ogni punto dello spazio: poichè anche la sua divergenza è nulla, il campo stesso deve essere nullo.



i(t)
1 A
fig 1.2
3.95 μs
t



E_x
fig 2.1
E=0
x
x=0
x=a
V
V=0
fig 2.2
x