FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 20 febbraio 2018

COGNOME ____________________ NOME ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito, è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Una molecola di HCl si trova nell'origine di un sistema di coordinate *Oxyz*; essa ha un momento di dipolo elettrico permanente (dal nucleo del Cloro a quello dell'Idrogeno) di modulo $p=3.4x10^{-30}C\cdot m$ *diretto* nel verso $+z$. [*Nota: dare risposte numeriche solo nelle domande 1.3 e 1.4*]

1.1 Si calcoli il potenziale elettrico generato dalla molecola (posta nel punto O) a grande distanza da essa, in un punto generico $P=(x, y, z)$, assumendo che il potenziale sia nullo all'infinito.

1.2 Si calcoli il campo elettrico generato dalla molecola (posta nel punto O) nel punto P.

1.3 Si calcoli il momento delle forze su una seconda molecola di HCl posta nel punto $A=(10nm, 0, 0)$ - *rispetto al proprio centro* - nei due casi: *(i)* dipolo elettrico diretto lungo $-z$; *(ii)* dipolo elettrico diretto lungo $+x$.

1.4 Solo per il caso *(ii)* indicato precedentemente, si calcoli la forza sulla seconda molecola di HCl. Si conserva il momento angolare di questa molecola *rispetto al punto O [attenzione alla posizione del polo*]?

Esercizio 2 Una superficie cilindrica di raggio a ed altezza h ($h>>a$) ha una resistenza superficiale nota R_{sq}. L'asse della superficie coincide con l'asse z di un sistema di coordinate cilindriche. [Nota: nella superficie le correnti sono quindi tangenziali]

2.1 Si calcolino la resistenza ed il coefficiente di autoinduzione del circuito composto dalla superficie cilindrica.

2.2 In tutto lo spazio è presente un campo di induzione magnetica, generato da un sistema esterno, che ha solo componente assiale: $B_z=\begin{cases} 0 & t<0 \\ kt & t>0 \end{cases}$: si calcoli la forza elettromotrice indotta nella superficie cilindrica al tempo t.

2.3 Si calcoli e si *riporti in un grafico* la corrente elettrica nella superficie in funzione del tempo t.

2.4 Si dica quali sarebbero i cambiamenti nelle domande *2.2 e 2.3* se il campo magnetico fosse $B_z=\begin{cases} 0 & t<0 \\ B_o & t>0 \end{cases}$, effettuando il nuovo grafico della corrente in funzione del tempo.

FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2017-18
PROVA SCRITTA del 20 febbraio 2018
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Il potenziale elettrico generato dalla molecola posta in O è quello del dipolo elettrico:
$V(x,y,z)=\frac{\vec{p}_O\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_o R^3}=\frac{pz}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$, dove $\vec{R}=(x,y,z)$ e $\vec{p}_O=(0,0,p)$.

1.2 I campo elettrico nel punto P generico vale $\vec{E}=\begin{cases} E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{3p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{zx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{3p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{zy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{-p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{cases}$

1.3 Occorre prima calcolare il campo elettrico nel punto $A=(x_A=10nm,\ 0,\ 0)$: $\vec{E}_A=\left(0,\ 0,\ \frac{-p}{4\pi\varepsilon_o x_A^3}\right)$.

Indichiamo con $\vec{p}_A$ il dipolo elettrico della seconda molecola. Poiché il momento delle forze *rispetto al centro della seconda molecola* vale $\vec{\tau}_C=\vec{p}_A\wedge\vec{E}_A$, nei due casi si ha:

(i) $\vec{p}_A=(0,0,-p)$ => $\vec{\tau}_C=\vec{0}$

(ii) $\vec{p}_A=(0,0,-p)$ => $\vec{\tau}_C=\left(0,\ \frac{p^2}{4\pi\varepsilon_o x_A^3},\ 0\right)=\left(0,\ 1.04x10^{-25}N\cdot m\ \ 0\right)$: la seconda molecola tende a ruotare in modo da disporre il suo dipolo elettrico parallelo al campo $\vec{E}_A$, quindi come $-z$ [infatti nel caso *(i)* non c'è momento rispetto al proprio centro].

1.4 La forza sulla seconda molecola si può calcolare con la formula $\vec{F}=\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$, oppure (vedi figura) considerare il secondo dipolo come due cariche (di segno opposto) di modulo q separate da una distanza δ e con il vincolo $p=q\delta$.

Utilizziamo il risultato di 1.2. Il campo elettrico e la forza (in blu) sulla carica negativa valgono $\vec{E}_{neg}=\left(0,\ 0,\ \frac{-p}{4\pi\varepsilon_o\left(x_A-\delta/2\right)^3}\right)$ e $\vec{F}_{neg}=\left(0,\ 0,\ \frac{qp}{4\pi\varepsilon_o\left(x_A-\delta/2\right)^3}\right)$. Analogamente il campo elettrico e la forza (in rosso) sulla carica negativa valgono $\vec{E}_{pos}=\left(0,\ 0,\ \frac{-p}{4\pi\varepsilon_o\left(x_A+\delta/2\right)^3}\right)$ e $\vec{F}_{pos}=\left(0,\ 0,\ \frac{-qp}{4\pi\varepsilon_o\left(x_A+\delta/2\right)^3}\right)$. La forza risultante, sviluppando $\delta<<x_A$, è comunque lungo z e

vale $F_z = \frac{qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A-\delta/2)^3}+\frac{-qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A+\delta/2)^3}=\frac{qp}{4\pi\varepsilon_o x_A^3}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\delta}{2x_A}\right)^3}-\frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{2x_A}\right)^3}\right)\approx \frac{qp}{4\pi\varepsilon_o x_A^3}\left(1+\frac{3\delta}{2x_A}-\left(1-\frac{3\delta}{2x_A}\right)\right)=\frac{3p^2}{4\pi\varepsilon_o x_A^4}=3.1x10^{-17}N$.

Il momento totale delle forze rispetto ad *O* ha solo componente *y* ed è calcolabile sommando i momenti delle forze sulle due cariche: $\tau_y=-\frac{qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A-\delta/2)^3}(x_A-\delta/2)+\frac{qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A+\delta/2)^3}(x_A+\delta/2)\approx-2\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_o x_A^3}$.

Tale momento è diverso da zero ed il momento angolare rispetto ad *O* *non* si conserva.

Nota. Manipolando in modo diverso la relazione precedente, si ha

$$\tau_y=-\frac{qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A-\delta/2)^3}(x_A-\delta/2)+\frac{qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A+\delta/2)^3}(x_A+\delta/2)=\left(-\frac{qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A-\delta/2)^3}+\frac{qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A+\delta/2)^3}\right)x_A+\left(\frac{qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A-\delta/2)^3}+\frac{qp}{4\pi\varepsilon_o(x_A+\delta/2)^3}\right)\frac{\delta}{2}\approx$$

$$\approx -F_z x_A+\tau_{Cy}=-3\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_o x_A^3}+\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_o x_A^3}=-2\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_o x_A^3}$$

che esprime il fatto che il momento rispetto ad un polo diverso dal centro di un sistema si può scrivere come il momento rispetto al centro (in questo caso con componente solo *y*, positiva) cui si somma il momento della forza risultante rispetto al polo esterno (momento che in questo caso ha solo componente *y* negativa).

Esercizio 2

2.1 $R=R_{sq}\frac{2\pi a}{h}$; una eventuale corrente superficiale (diretta tangenzialmente) genererebbe un campo magnetico assiale; poiché il circuito ha una sola "spira" $L=\mu_o\frac{\pi a^2}{h}$.

2.2 Con la legge di Faraday: $\varepsilon=-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}=\begin{cases}-\frac{d(\pi a^2 kt)}{dt}=-\pi a^2 k & \text{per } t>0\\ 0 & \text{per } t>0\end{cases}$

2.3 Per *t >0* si ha $\begin{cases}L\frac{dI}{dt}+RI=-\pi a^2 k\\ I(0)=0\end{cases}$ da cui $I=\frac{-\pi a^2 k}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ con *τ=L/R*, grafico in figura sotto a sinistra.

2.4 Per *t=0* c'è una discontinuitá della corrente dovuta alla variazione istantanea del campo magnetico: $I(0^+)=\frac{-\pi a^2 B_0}{L}$, quindi per *t >0* si ha $\begin{cases}L\frac{dI}{dt}+RI=0\\ I(0)=\frac{-\pi a^2 B_0}{L}\end{cases}$ da cui $I=\frac{-\pi a^2 B_0}{L}e^{-t/\tau}$ con *τ=L/R,* grafico in figura sotto a destra.