FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2016-17
PROVA SCRITTA del 6 novembre 2017

COGNOME ____________________ NOME ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Una spira quadrata ha lato L, resistenza R, autoinduttanza trascurabile e massa M. La spira e' lanciata sul piano xy con i lati paralleli agli assi e velocità iniziale V_o diretta lungo x. Per $t=0$ la spira, che puo' muoversi senza attrito sul piano, inizia ad entrare nel semispazio $x>0$. Nella regione $x<0$ non vi sono campi magnetici, mentre in $x>0$ e' presente un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = \left(0, \ 0, \ B_o \right)$.

1.1 Si calcoli la corrente indotta nella spira in funzione della sua velocità (nota: *non* in funzione del tempo t) nel tratto in cui e' parzialmente immersa nel campo magnetico.
1.2 Si calcoli la velocità della spira, *in funzione* del tempo t, nel tratto in cui e' parzialmente immersa nel campo magnetico.
1.3 Si calcoli la velocità iniziale minima della spira affinche' essa possa entrare completamente nel campo magnetico.
1.4 Nel caso in cui la velocità iniziale della spira sia superiore al valore minimo calcolato precedentemente (domanda 1.3), si calcoli la variazione di energia meccanica fra il tempo $t=0$ e il tempo in cui la spira e' completamente immersa nel campo magnetico.

Esercizio 2 Nel vuoto, in un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ dato, un'onda e.m. piana e monocromatica di lunghezza d'onda λ si propaga nella direzione positiva dell'asse x. Il campo elettrico e' diretto lungo l'asse y ed al tempo $t=0$ nel punto O la componente E_y assume il suo valore massimo E_o.

2.1 Si calcolino il campo elettrico ed il campo di induzione magnetica in ogni punto dello spazio in funzione del tempo t.
2.2 Nel piano x=0 si trova una particella di massa m e carica elettrica $q>0$; tale particella e' vincolata a muoversi senza attrito nel piano $x=0$. Al tempo $t=0$ la particella e' ferma nel punto O. Si calcoli la velocita' della particella, in funzione del tempo t, per $t>0$.
2.3 Si calcoli, in funzione del tempo t, la forza vincolare che il piano esercita sulla particella.
2.4 Per quest'ultima domanda nel piano $x=0$ al tempo $t=0$ si trovano n_{sup} particelle, identiche a quella della domanda precedente e sempre vincolate a muoversi senza attrito nel piano, per unita' di superficie; al tempo $t=0$ esse sono ferme ed uniformemente distribuite. Si calcoli la corrente superficiale nel piano $x=0$ per $t>0$ ed il campo magnetico da essa generato. Si dica se il risultato ottenuto sia esatto oppure approssimato: nel secondo caso si indichino le approssimazioni effettuate.

FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2016-17
PROVA SCRITTA del 6 novembre 2017
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Si applica la legge di Faraday quando la spira e' immersa per un tratto x all'interno del campo magnetico: $Ri = -\frac{d}{dt}(B_o L x)$, da cui $i = -\frac{B_o L V_x}{R}$.

1.2 Sulla spira agisce la forza di Laplace, per cui $M\frac{dV_x}{dt} = B_o L i = -\frac{B_o^2 L^2}{R}V_x$. Con la condizione iniziale $V_x(0) = V_o$, la soluzione e' $V_x = V_o e^{-t/\tau}$ con $\tau = \frac{MR}{B_o^2 L^2}$.

1.3 Dobbiamo verificare che esista un tempo t_{out} tale che $x(t_{out})=L$. Calcoliamo quindi $x(t) = \int_0^t V_x\,dt = V_o\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, da cui $x(t_{out}) = V_o\tau\left(1 - e^{-t_{out}/\tau}\right)$. La spira entra completamente nel campo magnetico se $e^{-t_{out}/\tau} = 1 - \frac{L}{V_o\tau}$, possibile solo se $V_o > \frac{L}{\tau}$.

1.4 La velocità quando la spira e' completamente immersa nel campo magnetico vale $V_{out} = V_o e^{-t_{out}/\tau} = V_o - \frac{L}{\tau}$, la variazione di energia cinetica della spira:
$\Delta E = \frac{1}{2}MV_{out}^2 - \frac{1}{2}MV_o^2 = \frac{1}{2}\frac{ML}{\tau}\left(\frac{L}{\tau} - 2V_o\right)$. Notate che nel caso particolare $V_o = \frac{L}{\tau}$ in cui la spira si fermasse esattamente quando e' completamente immersa nel campo, la variazione di energia sarebbe proprio $-\frac{1}{2}MV_o^2$.

Esercizio 2

2.1 Poiche' l'onda e' piana e monocromatica, si propaga nella direzione positiva dell'asse x ed e' polarizzata lungo y si puo' scrivere $E_x = E_z = 0$, $E_y = A\cos(kx - \omega t + \phi)$. Imponendo che la lunghezza d'onda sia λ e che al tempo $t=0$ nel punto O la componente E_y assuma il suo valore massimo E_o possiamo concludere $E_y = E_o\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]$. Il campo di induzione magnetica vale $B_x = B_y = 0$, $B_z = \frac{E_o}{c}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]$.

2.2 Sulla particella agiscono le forze e.m. e la forza vincolare del piano: $m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{V}\wedge\vec{B} + \vec{T}$. La forza $\vec{T}$ e' diretta lungo x (vincolo liscio), la forza $q\vec{E}$ e' diretta lungo y, la forza $q\vec{V}\wedge\vec{B}$ e' diretta lungo x (la velocita' e' nel piano yz ed il campo magnetico e' lungo z) : non ci sono forze lungo z e quindi l'accelerazione lungo z e' nulla. Inoltre sappiamo che l'accelerazione lungo x e' nulla (la particella e' vincolata nel piano yz), quindi possiamo scrivere che $\vec{T} = -q\vec{V}\wedge\vec{B}$ e $T_x = -qV_yB_z$.
Infine l'equazione del moto lungo y ci fornisce $ma_y = qE_y(x=0,t) = E_o\cos\frac{2\pi ct}{\lambda}$, da cui $V_y = V_y(0) + \int_0^t a_y\,dt = \frac{qE_o}{m}\frac{\lambda}{2\pi c}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}$.

2.3 Come spiegato sopra $T_x = -qV_yB_z$ e quindi $T_x = -\frac{q^2E_0^2}{m}\frac{\lambda}{2\pi c^2}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}\cos\frac{2\pi ct}{\lambda}$.

2.4 $K_y = \frac{q^2 E_0}{m} \frac{\lambda n_{\sup}}{2\pi c} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda}$, utilizzando la legge di Ampere $B_z = \begin{cases} \frac{\mu_o q^2 E_0}{m} \frac{\lambda n_{\sup}}{2\pi c} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda} & \text{per } x < 0 \\ -\frac{\mu_o q^2 E_0}{m} \frac{\lambda n_{\sup}}{2\pi c} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda} & \text{per } x > 0 \end{cases}$. Il risultato e' approssimato perche' non si tiene conto dell'irraggiamento: il campo magnetico generato e' variabile nel tempo e si produce un'onda e.m.; inoltre le particelle irraggiando perdono energia per cui la loro velocita' non sarebbe esattamente quella calcolata in 2.2.