FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2016-17
PROVA SCRITTA del 13 settembre 2017

COGNOME ____________________ NOME ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito, è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.
Nota: si effettuino i calcoli numerici solo dove espressamente richiesto

Esercizio 1 Si consideri il modello di Thomson in cui un atomo viene schematizzato come una sfera rigida di raggio $a=0.53x10^{-10}m$ con una distribuzione di carica positiva uniformemente distributita nel volume, e con al centro un elettrone puntiforme in modo che l'atomo sia globalmente neutro.

1.1 Si calcoli all'equilibrio lo spostamento relativo della sfera rispetto alla carica puntiforme se viene applicato un campo elettrico esterno costante di modulo E_{est}.

1.2 Si calcoli il rapporto (*valore numerico* con le corrette unità di misura) fra dipolo elettrico indotto nel singolo atomo e campo elettrico esterno applicato. Si calcoli (*valore numerico*) la costante dielettrica relativa di una sostanza composta da atomi come quello precedentemente descritto con una concentrazione $n=10^{22}$ *atomi/cm*^{3}

1.3 Si calcoli la corrente elettrica in un circuito composto da un generatore che eroga una f.e.m. $V = V_o \cos(2\pi f t)$ in serie ad un condensatore piano di area A e spessore d riempito della sostanza descritta nella domanda *precedente*, ipotizzando che la frequenza sia f sia abbastanza bassa affinche' la costante dielettrica sia quella appena calcolata.

1.4 Si stimi il valore della frequenza f oltre il quale la costante dielettrica non e' piu' quella calcolata nella domanda 1.2.

Esercizio 2 Nel vuoto, in un sistema di coordinate cartesiane *Oxyz* dato, il campo elettrico di un'onda e.m. piana vale $\vec{E} = \left(0, \ E_o \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right), \ 0 \right)$ con $E_o = 2\frac{V}{m}$ e $\lambda = 50cm$.

2.1 Si calcolino le tre componenti del campo magnetico e le tre componenti del vettore di Poynting in ogni punto dello spazio al tempo *t*.

Per le domande successive si consideri una spira quadrata ABCD, di autoinduttanza trascurabile e di resistenza R=1kΩ: $A = \left(0, \ \frac{\lambda}{4}, \ -\frac{\lambda}{4} \right)$, $B = \left(0, \ \frac{\lambda}{4}, \ \frac{\lambda}{4} \right)$, $C = \left(0, \ -\frac{\lambda}{4}, \ \frac{\lambda}{4} \right)$, $D = \left(0, \ -\frac{\lambda}{4}, \ -\frac{\lambda}{4} \right)$. *Nel seguito si ipotizzi, a puri fini semplificativi, che la corrente nel circuito abbia in ogni punto lo stesso valore e si trascurino anche gli effetti di irraggiamento generati dalla corrente circolante nella spira.*

2.2 Si calcoli la corrente elettrica indotta dall'onda e.m. nella spira in funzione del tempo *t* ed il *valore numerico della sua intensita' massima*.

2.3 Si calcolino al tempo *t* le tre componenti della forza totale che la radiazione esercita sulla spira ed il *valore numerico del suo valore massimo*.

2.4 Si calcoli il *valore numerico del rapporto* fra la potenza media dissipata nella resistenza ed il valore medio del vettore di Pointing dell'onda incidente.

FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2016-17
PROVA SCRITTA del 13 settembre 2017
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Il campo elettrico esterno sposta la carica puntiforme rispetto al centro della sfera carica: sia x la spostamento relativo. In questa posizione la carica e' sottoposta alla forza elettrica del campo esterno ed alla forza di richiamo generata dalla sfera positiva che si calcola utilizzando la legge di Gauss : $E_{rich} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_o x^2}\left(\frac{x}{a}\right)^3 = \frac{e}{4\pi\varepsilon_o a^3}x$. All'equilibrio si ha $-e\left(E_{rich}+E_{est}\right) = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_o a^3}x - eE_{est} = 0$, da cui $x = -\frac{4\pi\varepsilon_o a^3}{e}E_{est}$.

1.2 Il momento di dipolo elettrico indotto del singolo atomo vale $p_{ind} = -ex = 4\pi\varepsilon_o a^3 E_{est}$ e quindi il rapporto richiesto vale $\frac{p_{ind}}{E_{est}} = 4\pi\varepsilon_o a^3 = 1.65x10^{-41} F\cdot m^2$. In un elemento di volume V vi sono nV atomi: la polarizzazione della sostanza vale $P = \frac{p_{ind}nV}{V} = 4\pi\varepsilon_o a^3 nE_{est}$. Da questo si ricava che $\varepsilon_r = 1+\chi = 1+\frac{P}{\varepsilon_o E_{est}} = 1+4\pi a^3 n = 1.019$.

1.3 La carica Q sull'armatura del condensatore vale $Q = CV = \varepsilon_r\varepsilon_o\frac{A}{d}V_o\cos\left(2\pi ft\right)$ e quindi la corrente e' $i = \frac{dQ}{dt} = -2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_o\frac{A}{d}V_o\sin\left(2\pi ft\right)$.

1.4 E' abbastanza intuitivo che la frequenza limite possa essere la frequenza propria di oscillazione dell'elettrone nell'atomo $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o a^3 m}} = 6.6x10^{15} Hz$. Questo puo' essere spiegato in modo quantitativo studiando il moto di un singolo elettrone in un campo oscillante esterno: $m\ddot{x} = -e\left(E_{rich}+E_{est}\right) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o a^3}x - eE_{est}$, da cui $\ddot{x}+\omega_o^2 x = -\frac{eV_o}{md}\cos\omega t$. Inserendo come condizioni iniziali $x(0)=0$ e $\dot{x}(0)=0$ si ottiene $x = -\frac{eV_o}{md\left(\omega_o^2-\omega^2\right)}\left(\cos\omega t - \cos\omega_o t\right)$. Per frequenze basse $\left(\omega << \omega_o\right)$ si ha $x \approx \frac{-eV_o}{md\omega_o^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_o t\right) = -\frac{4\pi\varepsilon_o a^3}{e}\frac{V_o}{d}\left(\cos\omega t - \cos\omega_o t\right)$; una media su tempi $\frac{2\pi}{\omega_o} << T << \frac{2\pi}{\omega}$ fornisce $x \approx -\frac{4\pi\varepsilon_o a^3}{e}\frac{V_o}{d}\cos\omega t = -\frac{4\pi\varepsilon_o a^3}{e}E_{est}$ che e' lo stesso risultato ottenuto in 1.1. per il campo statico.

Esercizio 2

2.1 $\vec{B} = \frac{\hat{k}\wedge\vec{E}}{c} = \left(\begin{matrix} B_x, & 0, & 0\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} -\frac{E_o}{c}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right), & 0, & 0\end{matrix}\right)$, $\vec{S} = \vec{B} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_o} = \left(\begin{matrix} 0, & 0, & \frac{E_o^2}{\mu_o c}\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right)\end{matrix}\right)$

2.2 Occorre usare la legge di Faraday. Poiche' il campo magnetico non e' uniforme sulla superficie del quadrato ABCD, il flusso si calcola effettuando l'integrale:

$$\Phi\left(\vec{B}\right) = \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} B_x\,dy\,dz = -\frac{E_o\lambda}{2c}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right)dz = -\frac{E_o\lambda^2}{4\pi c}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right)\right]_{-\lambda/4}^{\lambda/4} = -\frac{E_o\lambda^2}{2\pi c}\cos\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right).$$

Le approssimazioni indicate nel testo ci permettono di trascurare l'irraggiamento ed il fatto che lungo il circuito il segnale si propaga con velocita' finita: il dispositivo in realta' e' una antenna che sara' oggetto dello studio in altri corsi. Nelle ipotesi suggerite la corrente vale $i=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}=-\frac{E_o\lambda}{R}\sin\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right)$, $i_{MAX}=\left|-\frac{E_o\lambda}{R}\right|=1mA$.

2.3 La forza richiesta è quella magnetica e si puo' scrivere $\vec{F}=\vec{F}_{AB}+\vec{F}_{BC}+\vec{F}_{CD}+\vec{F}_{DA}$.

Poichè $\vec{F}_{AB}=-\vec{F}_{CD}$, si ha $\vec{F}=\vec{F}_{BC}+\vec{F}_{DA}=i\overrightarrow{BC}\wedge\vec{B}(z=\frac{\lambda}{4})+i\overrightarrow{DA}\wedge\vec{B}(z=-\frac{\lambda}{4})=\begin{pmatrix} 0, & 0, & F_z \end{pmatrix}$, con

$$F_z=i\frac{\lambda}{2}B_x\left(z=\frac{\lambda}{4}\right)-i\frac{\lambda}{2}B_x\left(z=-\frac{\lambda}{4}\right)=i\frac{\lambda}{2}\left[-\frac{E_o}{c}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4}-ct\right)\right)+\frac{E_o}{c}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{4}-ct\right)\right)\right]=$$

$$=-\frac{E_o\lambda^2}{2R}\sin\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right)\left[-\frac{2E_o}{c}\sin\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right)\right]=\frac{E_o^2\lambda^2}{Rc}\sin^2\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right) \quad ;$$

il valore massimo della forza è $\frac{E_o^2\lambda^2}{Rc}=3.3x10^{-12}N$.

2.4 La potenza istantanea vale $P(t)=i^2R=\frac{E_o^2\lambda^2}{R}\sin^2\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right)$, quella media $\langle P\rangle=\frac{E_o^2\lambda^2}{2R}$. Poichè si ha

$\langle\vec{S}\rangle=\left\langle\frac{E_o^2}{\mu_o c}\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right)\right\rangle=\frac{E_o^2}{2\mu_o c}=\frac{E_o^2}{2Z_o}$, il rapporto chiesto vale $\frac{\langle P\rangle}{\langle\vec{S}\rangle}=\frac{E_o^2\lambda^2}{2R}\bigg/\frac{E_o^2}{2Z_o}=\frac{Z_o}{R}\lambda^2=0.094m^2$.

Nota: si noti che questo rapporto ha le dimensioni di una superficie. Questo rapporto è infatti chiamato "area efficace" e puo' essere pensato come una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda in cui l'energia viene "prelevata" per essere dissipata nella resistenza.