FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2016-17
PROVA SCRITTA del 2 febbraio 2017

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________________

NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Nella approssimazione semi-classica un atomo di idrogeno nello stato fondamentale consiste in un elettrone (massa $m = 9.1x10^{-31}kg$) che ruota di moto circolare uniforme attorno ad un protone sotto l'azione della sola forza di Coulomb. Si assume che il momento angolare dell'elettrone sia pari alla costante di Plank: $|\vec{L}| = \hbar = 1.06x10^{-34}\,Js.$.

1.1 Si calcoli la velocita' dell'elettrone ed il raggio dell'orbita.
1.2 Si calcoli il momento magnetico, trattando l'elettrone come una corrente elettrica costante su una spira coincidente con l'orbita circolare. In particolare si calcoli il modulo del momento magnetico e la relazione vettoriale fra momento magnetico e momento angolare.
1.3 Al tempo $t=0$ si accende molto velocemente un campo di induzione magnetica di modulo B con la stessa direzione e stesso verso del momento angolare. Notando che la posizione dell'elettrone resta praticamente invariata nel breve transiente, si calcoli (modulo, direzione e verso) la variazione del momento magnetico.
1.4 Rispondere nuovamente alle tre domande precedenti se avessimo trattato un atomo di He^+, in cui un solo elettrone orbita attorno ad un nucleo composto da due protoni e due neutroni.

Esercizio 2 Nel vuoto, in un sistema di coordinate cartesiane *Oxyz* dato, nella regione $x<0$ il campo elettrico di un'onda e.m. piana (non monocromatica) vale $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0, & E_y, & 0 \end{pmatrix}$ con

$E_y = E_o \cos(k(x-ct)) + 2E_o \cos(2k(x-ct))$, $E_o = 3V/m$ e $k = 1cm^{-1}$.

2.1 Si calcolino le tre componenti del campo di induzione magnetica nella regione $x<0$ al tempo t.
2.2 Sempre nella regione $x<0$ si calcolino le tre componenti del vettore di Poynting al tempo t ed i loro valori mediati nel tempo .
2.3 In $x=0$ si trova un piano perfettamente assorbente ad eccezione di un piccolo foro circolare di raggio $r=1mm$ posto in O. Si calcoli la potenza media che attraversa il forellino.
2.4 Si calcoli il valore numerico delle tre componenti del vettore di Poynting, mediato nel tempo, nei punti $A=(100r,0,0)$ e $B=(100r, 100r, 0)$.

FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2016-17
PROVA SCRITTA del 2 febbraio 2017
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 $\begin{cases} |\vec{L}| = \hbar = mVR \\ \dfrac{mV^2}{R} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{\hbar}{mR} \\ mV^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R} \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \dfrac{4\pi\varepsilon_o \hbar^2}{me^2} \equiv a = 5.3x10^{-11} m \\ V = \dfrac{\hbar}{mR} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o \hbar} = 2.2x10^6 \dfrac{m}{s} \end{cases}$

1.2 $I = ef = e\dfrac{V}{2\pi R}$ da cui $|\vec{\mu}| = \pi R^2 I = \pi R^2 \dfrac{eV}{2\pi R} = \dfrac{eVR}{2} = \dfrac{e}{2m}\hbar \equiv \mu_B \approx 0.9x10^{-23} Am^2$ e $\vec{\mu} = -\dfrac{e}{2m}\vec{L}$: il momento magnetico e' opposto al momento angolare.

1.3 Utilizziamo un sistema di coordinate polari cilindriche in cui l'asse z e' diretto come il momento angolare. Durante il transiente si induce un campo elettrico tangenziale $2\pi R E_\vartheta = -\dfrac{d\left(\pi R^2 B\right)}{dt} \Rightarrow E_\vartheta = -\dfrac{R}{2}\dfrac{\partial B}{\partial t}$ che esercita sull'elettrone una forza $\vec{F} = F_\vartheta \hat{\vartheta} = -eE_\vartheta \hat{\vartheta} = e\dfrac{R}{2}\dfrac{\partial B}{\partial t}\hat{\vartheta}$. Il momento di questa forza e' assiale: $\tau_z = RF_\vartheta = e\dfrac{R^2}{2}\dfrac{\partial B}{\partial t} = \dfrac{dL_z}{dt}$ da cui $\Delta L_z = e\dfrac{R^2}{2}\Delta B > 0 \Rightarrow \Delta\vec{L} = e\dfrac{R^2}{2}\Delta\vec{B}$; da questa relazione troviamo anche che $\Delta V = \dfrac{\Delta L}{mR} = \dfrac{eR\Delta B}{2}$. Concludendo: $\Delta\vec{\mu} = -\dfrac{e}{2m}\Delta\vec{L} = -\dfrac{e^2R^2}{4m}\Delta\vec{B}$ => effetto diamagnetico.

[Nota. Dopo il transiente, il moto e' circolare uniforme con velocita' $V + \Delta V$, se trascuriamo i termini in $\dfrac{\Delta V}{V}$. La relazione $m\dfrac{(V+\Delta V)^2}{R} = q(V+\Delta V)\Delta B + \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R^2}$ implica $m\dfrac{2V\Delta V + \Delta V^2}{R} = q(V+\Delta V)\Delta B$ che puo' infatti essere approssimata come $m\dfrac{2V\Delta V}{R} \approx qV\Delta B$, completando la dimostrazione]

1.4 Per la domanda 1.1 vi sono due protoni nel nucleo e quindi la forza di Coulomb raddoppia:

$\begin{cases} |\vec{L}| = \hbar = mVR \\ \dfrac{mV^2}{R} = \dfrac{2e^2}{4\pi\varepsilon_o R^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{2\pi\varepsilon_o \hbar^2}{me^2} \equiv a = 2.65x10^{-11} m \\ V = \dfrac{\hbar}{mR} = \dfrac{e^2}{2\pi\varepsilon_o \hbar} = 4.4x10^6 \dfrac{m}{s} \end{cases}$, la velocita' raddoppia ed il raggio si dimezza. Per la domanda 1.2 il momento magnetico resta invariato: la corrente, proporzionale a *V/R*, quadruplica, ma l'area si riduce di un fattore *4*, il tutto e' coerente con la proporzionalita' fra momento magnetico e momento angolare (che non e' variato). Per la domanda 1.3 la variazione del momento magnetico e' *1/4* del caso dell'idrogeno, in quanto il momento della forza si riduce di un fattore *4*.

Esercizio 2

2.1 Nella regione *x<0* l'onda, che e' la sovrapposizione di due onde monocromatiche di lunghezza d'onda $\lambda_1 = \dfrac{2\pi}{k} = 6.28cm$ e $\lambda_2 = \dfrac{2\pi}{2k} = 3.14cm$, si propaga lungo *x* con il campo elettrico diretto lungo *y*. Il campo magnetico, per la regola della mano destra, e' quindi diretto lungo *+z* ed ha modulo *E/c*, per cui esso vale: $\vec{B} = \left(0, \ 0, \ \dfrac{1}{c}E_o\cos\left(k\left(x-ct\right)\right) + \dfrac{2}{c}E_o\cos\left(2k\left(x-ct\right)\right) \right)$.

2.2 Sempre per $x<0$ $\vec{S} = \begin{pmatrix} S_x, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $S_x = \frac{E_o^2}{\mu_o c}\cos^2\left(k(x-ct)\right) + \frac{4E_o^2}{\mu_o c}\cos^2\left(2k(x-ct)\right) + \frac{4E_o^2}{\mu_o c}\cos\left(k(x-ct)\right)\cos\left(2k(x-ct)\right)$.

Il valore medio del terzo termine e' nullo, per cui $<S_x> = \frac{E_0^2}{2\mu_o c} + \frac{4E_0^2}{2\mu_o c} + 0 = \frac{5}{2}\frac{E_0^2}{\mu_o c} = \frac{5}{2}c\varepsilon_o E_0^2 = 60\frac{mW}{m^2}$.

2.3 La potenza media che attraversa il forellino e' $P = \pi r^2 <S_x> = 190nW$.

2.4 Le lunghezze d'onda $\lambda_1 = \frac{2\pi}{k} = 6.28cm$ e $\lambda_2 = \frac{2\pi}{2k} = 3.14cm$ sono entrambe molto maggiori del raggio del forellino. Per il principio di Huygens, la radiazione nel semispazio $x>0$ si distribuira' in modo pressoche' uniforme con fronti d'onda semisferici. Quindi il vettore di Poynting, mediato nel tempo, nei punti A e B vale: $<\vec{S}_A> = \frac{P}{2\pi\vec{A}^2}\hat{A} = \frac{P}{2\pi 10^4 r^2}\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0\frac{\mu W}{m^2}, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ e

$$<\vec{S}_B> = \frac{P}{2\pi\vec{B}^2}\hat{B} = \frac{P}{4\pi 10^4 r^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.06\frac{\mu W}{m^2}, & 1.06\frac{\mu W}{m^2}, & 0 \end{pmatrix}$$