**FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2015-16**
**PROVA SCRITTA del 13 gennaio 2016**

**COGNOME ____________________ NOME ____________________________**
**NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.**

**Esercizio 1** Un sottile foglio rettangolare *ABCD* e' composto da un materiale con resistivita' superficiale $R_{\varnothing} = 100\Omega$. I bordi *AB* e *CD*, di lunghezza $h=50cm$, sono conduttori perfetti: il foglio e' piegato in modo da formare una superficie cilindrica di altezza $h$ e raggio $a=3cm$ ed in modo che i bordi *AB* e *CD* siano paralleli e separati da una distanza molto piccola.

**1.1** Si calcoli il valore della resistenza fra i punti *A* e *C*.
**1.2** Si calcoli il valore della induttanza fra i punti *A* e *C*.
**1.3** Al tempo $t=0$ fra i punti *A* e *C* viene inserita una pila che eroga una d.d.p. $V_o=0.4V$: si calcoli la corrente che scorre nel circuito per $t>0$. Si calcolino i valori numerici della corrente a regime e della costante tempo del circuito.
**1.4** Ipotizzando una perfetta simmetria cilindrica, si calcoli per $t>0$ il campo elettrico indotto a distanza $r$ dall'asse del cilindro. Si indichino chiaramente le componenti nulle o non-nulle e si esprima la risposta in un sistema di coordinate cilindriche $rz\phi$. Per quali valori di $r$ e $z$ sara' valida l'ipotesi di simmetria cilindrica?

**Esercizio 2** In un sistema di coordinate polari sferiche $R\theta\phi$ si trova una sfera metallica di raggio $a$ centrata nell'origine. La sfera e' in contatto con un materiale debolmente conduttore di resistività $\rho$ e costante dielettrica $\varepsilon_r=2$ che si estende fino ad $R=2a$. Per $t<0$ non vi sono cariche nel sistema; al tempo $t=0$ la sfera viene istantaneamente posta ad una d.d.p. $V_o$ (rispetto all'infinito).

**2.1** Si calcolino, una volta raggiunto l'equilibrio ($t=\infty$), tutte le cariche: libere e di polarizzazione, puntiformi o superficiali o di volume.
**2.2** Si calcolino, al tempo $t=0^+$, tutte le cariche: libere e di polarizzazione, puntiformi o superficiali o di volume.
**2.3** Si calcoli, al tempo $t=0^+$, la corrente di conduzione di volume all'interno del materiale.
**2.4** Si calcoli, ad ogni tempo $t>0$, la carica libera totale posta sulla superficie interna (R=2a) in funzione di $t$.

**FISICA 2 per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2015-16**
**PROVA SCRITTA del 13 gennaio 2016**
**RISPOSTE**

**Esercizio 1**

**1.1** $R = R_\varnothing \dfrac{2\pi a}{h} = 37.7\Omega$ .

**1.2** Se nel foglio scorre una corrente $i$ uniformemente distribuita sulla superficie, il campo magnetico e' quello di un solenoide: $B_z = \dfrac{\mu_o i}{h}$ . L'induttanza e' il rapporto fra il flusso sul circuito del campo magnetico e la corrente: $L = \dfrac{\Phi(\vec{B})}{i} = \dfrac{B_z \pi a^2}{i} = \dfrac{\mu_o \pi a^2}{h} = 7.2nH$

**1.3** L'equazione del circuito è $L\dfrac{di}{dt} + Ri = V_o$ con la condizione iniziale $i(0)=0$, per cui $i(t) = i_o\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ con $i_o = \dfrac{V_o}{R} = 10.7mA$ e $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{\mu_o a}{2R_\varnothing} = 190ps$ .

**1.4** Data la simmetria del problema, l'unica componente del campo non nulla e' quella tangenziale. Utilizzando la legge di Faraday: $2\pi r E_\varphi = \begin{cases} -\dfrac{\mu_o \pi r^2}{h}\dfrac{di}{dt} & \text{per } r < a \\ -\dfrac{\mu_o \pi a^2}{h}\dfrac{di}{dt} & \text{per } r > a \end{cases}$, da cui $E_\varphi = \begin{cases} -\dfrac{V_o e^{-t/\tau}}{2\pi}\dfrac{r}{a^2} & \text{per } r < a \\ -\dfrac{V_o e^{-t/\tau}}{2\pi}\dfrac{1}{r} & \text{per } r > a \end{cases}$.

L'ipotesi e' valida se ci troviamo all'interno del cilindro, o all'esterno ma vicino alla superficie; in termini matematici: $r-a<<h$ e $|z|<|h-a|$ (con $z=0$ nel centro del cilindro).

**Esercizio 2**

**2.1** All'equilibrio il campo elettrico all'interno del materiale è nullo: tutte le cariche libere sono solo sulla superficie $R=2a$ e le cariche di polarizzazione sono tutte nulle. Quindi $Q_{lib}(2a) = 8\pi\varepsilon_o a V_o$, $\sigma_{lib}(2a) = \dfrac{\varepsilon_o V_o}{2a}$ ed ogni altra carica e' nulla.

**2.2** Al tempo $t=0^+$ le cariche libere possono essere solo superficiali e posizionate sulla sfera interna: $D_R = \dfrac{Q_{lib}(a)}{4\pi R^2}$ e $E_R = \begin{cases} \dfrac{Q_{lib}(a)}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R^2} & \text{per } a < r < 2a \\ \dfrac{Q_{lib}(a)}{4\pi\varepsilon_o R^2} & \text{per } r > 2a \end{cases}$ . Imponendo la d.d.p. fra la sfera interna e l'infinito si trova la carica: $V_o = \int_a^\infty E_R\, dR = \int_a^{2a} E_R\, dR + \int_{2a}^\infty E_R\, dR = \left[-\dfrac{Q_{lib}(a)}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R}\right]_a^{2a} + \left[-\dfrac{Q_{lib}(a)}{4\pi\varepsilon_o R}\right]_{2a}^\infty = \dfrac{3Q_{lib}(a)}{16\pi\varepsilon_o a}$ e $\sigma_{lib}(a) = \dfrac{4}{3}\dfrac{\varepsilon_o V_o}{a}$. Vi saranno quindi anche cariche di polarizzazione superficiali, poiche' la polarizzazione vale $P_R = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\dfrac{Q_{lib}(a)}{4\pi R^2} = \dfrac{2\varepsilon_o V_o a}{3R^2}$ (per $a \le r \le 2a$): $\sigma_{pol}(a) = \vec{P}\cdot\hat{n}(a) = -\dfrac{2\varepsilon_o V_o}{3a}$ e $\sigma_{pol}(2a) = \vec{P}\cdot\hat{n}(2a) = +\dfrac{\varepsilon_o V_o}{6a}$ . Non vi sono cariche di polarizzazione nel volume perche' la divergenza della polarizzazione e' nulla.

**2.3** Poichè $\vec{J} = \vec{E}/\rho$, l'unica componente non nulla della densità di corrente è quella radiale

$$J_R(t=0^+) = \frac{E_R(t=0^+)}{\rho} = \frac{4V_o a}{3\varepsilon_r \rho R^2} = \frac{2V_o a}{3\rho R^2}$$

**2.4** Chiamiamo $Q_1$ e $Q_2$ le cariche libere, rispettivamente, sulla sfera interna e sulla superficie esterna al tempo $t>0$. Imponendo la d.d.p. fra la sfera interna e l'infinito si trova

$V_o = \int_a^{2a} E_R\,dR + \int_{2a}^{\infty} E_R\,dR = \left[-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R}\right]_a^{2a} + \left[-\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_o R}\right]_{2a}^{\infty} = \frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R} + \frac{Q_1+Q_2}{8\pi a} = \frac{3Q_1+2Q_2}{16\pi\varepsilon_o a}$ che permette di ricavare la relazione $Q_2 = 8\pi\varepsilon_o a V_o - \frac{3Q_1}{2}$, che derivata rispetto al tempo fornisce $\dot{Q}_2 = \frac{dQ_2}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{3}{2}\dot{Q}_1$.

Le condizioni iniziali, $Q_1(0) = \frac{16}{3}\pi\varepsilon_o a V_o$ e $Q_2(0) = 0$, si ricavano dalla risposta alla seconda domanda. Calcoliamo il campo elettrico nel materiale conduttore $E_R = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R^2} = \frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_o R^2}$; combinandolo con $\vec{J} = \vec{E}/\rho$ e $i = \frac{dQ_2}{dt} = 4\pi R^2 J_R$ si ottiene la seconda relazione $-\frac{3}{2}\frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} = 4\pi R^2 J_R = 4\pi R^2 \frac{E_R}{\rho} = \frac{Q_1}{2\varepsilon_o\rho}$. Si trova l'equazioni differenziale

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 + \dfrac{Q_1}{3\varepsilon_o\rho} = 0 \\ Q_1(0) = \dfrac{16}{3}\pi\varepsilon_o a V_o \end{cases}$$

che risolta fornisce $Q_1 = \frac{16}{3}\pi\varepsilon_o a V_o e^{-\frac{t}{3\varepsilon_o\rho}}$, da cui anche

$$Q_2 = 8\pi\varepsilon_o a V_o \left(1 - e^{-\frac{t}{3\varepsilon_o\rho}}\right).$$