FISICA GENERALE 1 per INGEGNERIA ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI
PROVA SCRITTA del 9 settembre 2015

COGNOME ___________________ **NOME** ___________________________

NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Al tempo $t = 0$ un punto materiale di massa m viene lanciato in salita dalla base di un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto ad un piano orizzontale con una velocità di modulo V_o (valore non conosciuto). Il punto raggiunge al tempo t_1 (valore non conosciuto) la sommità del piano inclinato posta ad una quota h (valore noto) rispetto a quella di partenza, dopodichè procede nel vuoto sotto l'azione della sola forza di gravità fino a colpire al tempo t_2 (valore non conosciuto) il piano orizzontale. Fra punto e piano inclinato non vi sono attriti. Si utilizzi un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ in cui l'origine è alla base del piano inclinato, l'asse x orizzontale e l'asse y verticale rivolto verso l'alto. Si osserva che la velocità al tempo t_1 (alla sommità del piano inclinato) e' la metà di V_o.

1.1 Si calcoli V_o .

1.2 Si calcolino t_1 e t_2 .

1.3 Si dica se la componente P_x della quantità di moto si conserva fra il tempo $t=0$ e $t=t_1$ e, in caso negativo, si indichi la forza responsabile della sua variazione. Si dica anche se P_x si conserva fra il tempo $t= t_1$ e $t=t_2$ e, in caso negativo, si indichi la forza responsabile della sua variazione.

1.4 Si dica se la componente L_z del momento angolare rispetto al polo O si conserva fra il tempo $t=0$ e $t=t_1$ e, in caso negativo, si indichi la forza responsabile della sua variazione. Si dica anche se L_z si conserva fra il tempo $t= t_1$ e $t=t_2$ e, in caso negativo, si indichi la forza responsabile della sua variazione.

Esercizio 2 Dato un sistema di coordinate $Oxyz$, nel semispazio $x > 0$ è presente un campo magnetico uniforme e costante di modulo $B=200G$ diretto nel verso positivo dell'asse z. Atomi di ^6Li e ^7Li ionizzati una volta, partendo da fermi, sono prima accelerati nel semispazio $x < 0$ attraverso una differenza di potenziale $\varepsilon = 50V$ e successivamente passano tutti per il punto O con velocità diretta nel verso dell'asse x positivo. Il fascio è composto dal 7.5% è di $^6Li^+$ e dal 92.5% di $^7Li^+$; la corrente totale è 80μA. Nota: in questo esercizio sono fondamentali i calcoli numerici.

2.1 Calcolare le posizioni in cui gli ioni attraversano nuovamente il piano $x = 0$.

2.2 Calcolare il tempo che gli ioni trascorrono nel semispazio $x > 0$ ed il rapporto fra la loro velocità e quella della luce.

2.3 Calcolare la massa totale (in grammi) che passa nel punto O in 10 minuti.

2.4 Si calcoli l'incertezza sulle posizioni calcolate nella prima domanda, se la differenza di potenziale è nota con una precisione $\delta\varepsilon = 0.1V$.

FISICA GENERALE 1 per INGEGNERIA ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI
PROVA SCRITTA del 9 settembre 2015
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Si conserva l'energia meccanica (tutte le forze sono conservative) e fra il tempo $t=0$ e $t=t_1$ si ha $\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + mgh$, indicando con $V_1 = |\vec{V}_1|$ il modulo della velocità al tempo t_1. Dall'osservazione $\frac{V_0}{2} = V_1$ si ricava $V_0 = 2\sqrt{\frac{2}{3}gh}$.

Notiamo, anche se non era richiesto nella domanda, che $V_1 = \sqrt{\frac{2}{3}gh}$,

$\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} V_0\cos\vartheta, & V_0\sin\vartheta, & 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} V_1\cos\vartheta, & V_1\sin\vartheta, & 0 \end{pmatrix}$.

1.2 Indichiamo con s e V, rispettivamente, la posizione e la velocità lungo il piano inclinato; **per** $\boldsymbol{0 < t < t_1}$ si ha $s = V_0 t - \frac{1}{2}g\sin\vartheta t^2$ e $V = V_0 - g\sin\vartheta t$. Al tempo t_1

$\frac{h}{\sin\vartheta} = V_0 t_1 - \frac{1}{2}g\sin\vartheta t_1^2$, da cui $2h = V_0 t_1 - \frac{1}{4}g t_1^2$ => $t_1^2 - 4\frac{V_0}{g}t_1 + 8\frac{h}{g} = 0$ =>

$t_1 = 2\frac{V_0}{g} \pm \frac{1}{4}\sqrt{4\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 - 8\frac{h}{g}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}\frac{h}{g}} \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}\frac{h}{g}}$. La soluzione corretta è quella minore (corrisponde ad una velocità in salita): $t_1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}\frac{h}{g}}$.

Come metodo alternativo, ricordando dal punto 1.1 che $V(t_1) \equiv V_1 = \sqrt{\frac{2}{3}gh}$,

$V_1 = V_0 - g\sin\vartheta t_1$ da cui $t_1 = V_1 = \frac{V_0 - \sqrt{\frac{2}{3}gh}}{g\sin\vartheta} = 2\sqrt{\frac{2}{3}\frac{h}{g}}$.

Per $\boldsymbol{t_1 < t < t_2}$ si ha $\begin{cases} V_x = V_1\cos\vartheta \\ V_y = V_1\sin\vartheta - g(t - t_1) \end{cases}$ e $\begin{cases} x = h\cot\vartheta + V_1\cos\vartheta(t - t_1) \\ y = h + V_1\sin\vartheta(t - t_1) - \frac{g}{2}(t - t_1)^2 \end{cases}$.

Al tempo t_2 $0 = h + V_1\sin\vartheta(t_2 - t_1) - \frac{g}{2}(t_2 - t_1)^2$ => $(t_2 - t_1)^2 - \sqrt{\frac{2}{3}\frac{h}{g}}(t_2 - t_1) - 2\frac{h}{g} = 0$ =>

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{h}{g}} \pm \sqrt{\frac{2}{3}\frac{h}{g} + 8\frac{h}{g}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{26}{3}}\right)$, in quanto si ha $t_1 < t_2$.

Come prova della correttezza della soluzione, dopo avere notato che

$\vec{V}_2 \equiv \vec{V}(t_2) = \begin{pmatrix} V_1\cos\vartheta, & V_1\sin\vartheta - g(t_2 - t_1), & 0 \end{pmatrix}$, verifichiamo che

$$V_2 = \left|\vec{V}(t_2)\right| = \sqrt{(V_1\cos\vartheta)^2 + (V_1\sin\vartheta - g(t_2-t_1))^2} = \sqrt{V_1^2 - 2V_1 g(t_2-t_1)\sin\vartheta + g^2(t_2-t_1)^2} =$$

$$= \sqrt{V_1^2 - V_1 g(t_2-t_1) + g^2(t_2-t_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}hg - \sqrt{\frac{2}{3}hg}\,g\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{26}{3}}\right) + g^2\frac{h}{4g}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{26}{3}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}hg - \frac{1}{2}hg\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{26}{3}}\right) + \frac{hg}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{26}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{52}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}hg - \frac{1}{3}hg - \frac{1}{6}hg\sqrt{52} + \frac{7}{3}hg + \frac{1}{6}hg\sqrt{52}} = \sqrt{\frac{8}{3}hg}$$ è

proprio V_0 , come ci si aspetta dalla conservazione dell'energia meccanica.

1.3 Per $0 < t < t_1$ la componente P_x della quantità di moto NON si conserva; la forza responsabile della sua variazione è la forza vincolare normale, che ha una componente lungo x.
Per $t_1 < t < t_2$ la componente P_x della quantità di moto **si** conserva, l'unica forza che agisce è la forza di gravità che ha solo componente lungo y.

1.4 Per $0 < t < t_1$ la componente L_z del momento angolare **si** conserva, infatti la velocità del punto è parallela alla sua posizione.
Per $t_1 < t < t_2$ la componente L_z del momento angolare NON si conserva, la forza responsabile della sua variazione è la forza di gravità.

Esercizio 2

2.1 La massa di un atomo di peso atomico A è $m_A = \frac{A(\text{in grammi})}{N_{Avogadro}}$, da cui

$m_6 \approx 0.997x10^{-26}kg$, $m_7 \approx 1.163x10^{-26}kg$. La velocità con cui gli ioni passano per O ha modulo $V = \sqrt{\frac{2e\mathcal{E}}{m}}$ e la traiettoria degli ioni nel semispazio $x > 0$ è una semicirconferenza di raggio $R = \frac{mV}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{e}}$ nel piano xy. Gli ioni attraversano nuovamente il piano $x = 0$ sull'asse y nel punto di coordinata

$y = 2R = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{e}}$ => $y_6 \approx 25.0cm$, $y_7 \approx 27.0cm$.

2.2 $t = \frac{\pi R}{V} = \frac{\pi m}{eB}$ => $t_6 \approx 9.8\mu s$, $t_7 \approx 11.4\mu s$.

$\frac{V}{c} = \sqrt{\frac{2e\mathcal{E}}{mc^2}} \equiv \beta$ => $\beta_6 \approx 1.33x10^{-4}$, $\beta_7 \approx 1.23x10^{-4}$.

2.3 Il numero di atomi che passano in 10' è $N = \frac{i}{e}t = \frac{80\mu A}{1.6x10^{-19}C}600s = 3x10^{17}$, la massa totale è $M = 3x10^{17}(7.5\%m_6 + 92.5\%m_7) = 3.5\mu g$.

2.4 $\delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial\mathcal{E}}\right|\delta\mathcal{E} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m}{e\mathcal{E}}}\delta\mathcal{E} = \frac{y}{2}\frac{\delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{y}{1000}$: $\delta y_6 \approx 0.25mm$, $\delta y_7 \approx 0.27mm$.