

INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI
FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del 3 febbraio 2015

COGNOME _____ **NOME** _____

NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Per $t < 0$ un satellite di massa M si muove attorno alla Terra con moto circolare uniforme ad una distanza R (nota) dal centro della Terra. Al tempo $t = 0$ il 10% della massa M viene espulsa istantaneamente in direzione opposta alla velocità del satellite con una velocità di modulo V_{rel} (nota) rispetto alla massa residua (90% della massa M) del satellite.

- 1.1 Calcolare il modulo della velocità (V_0) ed il modulo dell'accelerazione del satellite per $t < 0$.
- 1.2 Calcolare la velocità della massa espulsa rispetto alla Terra subito dopo l'espulsione.
- 1.3 Calcolare la variazione di energia meccanica del sistema fra l'istante subito prima e subito dopo l'espulsione della massa,
- 1.4 Utilizzando due leggi di conservazione appropriate calcolare la minima distanza dal centro della Terra che il frammento espulso raggiungerà nel suo moto.

Esercizio 2 In un sistema di coordinate sferico su di una sfera metallica di raggio $a=2cm$ è depositata una carica $Q = -4pC$. Nella regione $a < R < 3a$ si trova un isolante uniformemente caricato con densità di carica ρ_0 tale che la carica totale sia nulla.

- 2.1 Calcolare ρ_0
- 2.2 Calcolare la componente radiale del campo elettrico in ogni punto dello spazio e riportarla in un grafico in funzione di R ; calcolare il valore numerico del campo elettrico in $R=a^+$.
- 2.3 Calcolare il potenziale elettrico in ogni punto dello spazio, imponendo che sia nullo a distanza infinita, e riportarlo in un grafico in funzione di R ; calcolare il valore numerico del potenziale elettrico in $R=a$.
- 2.4 Si calcoli il modulo della velocità minima che si deve imprimere, in direzione radiale, ad un elettrone che si trovi ad una distanza $5a$ dal centro affinché raggiunga la superficie $R=a$. Si ipotizzi che l'elettrone possa attraversare l'isolante senza altra interazione che non sia quella elettrostatica.

INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI
FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del 3 febbraio 2015
RISPOSTE

Esercizio 1.

1.1 Per un satellite di massa M in moto circolare uniforme a distanza R dal centro della

Terra vale $m|\vec{a}| = \frac{m\vec{V}^2}{R} = \frac{GmM_T}{R^2}$, quindi $|\vec{a}| = \frac{GM_T}{R^2}$ e $V_o = |\vec{V}_o| = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$.

1.2 Fra $t = 0^-$ e $t = 0^+$ si conserva la quantità di moto. Indichiamo con \vec{V}' e \vec{V}_{sat} le velocità della massa espulsa e del resto del satellite, e con V' e V_{sat} le loro proiezioni

sulla direzione di \vec{V}_o . Dopo la separazione abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} MV_o = \frac{1}{10}MV' + \frac{9}{10}MV_{sat} \\ \vec{V}' - \vec{V}_{sat} = \vec{V}_{rel} \end{array} \right. \quad e$$

ricordando che la proiezione di \vec{V}_{rel} su \vec{V}_o vale $-V_{rel}$, si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} MV_o = \frac{1}{10}MV' + \frac{9}{10}MV_{sat} \\ V_{sat} - V' = V_{rel} \end{array} \right. \quad \text{da cui} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{sat} = V_o + \frac{1}{10}V_{rel} \\ V' = V_o - \frac{9}{10}V_{rel} \end{array} \right. .$$

1.3 La variazione di energia meccanica è

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2} \frac{M}{10} V'^2 + \frac{1}{2} \frac{9M}{10} V_{sat}^2 - \frac{1}{2} M V_o^2 = \frac{9}{200} M V_{rel}^2 .$$

1.4 Successivamente alla separazione si conservano l'energia meccanica ed il momento angolare della massa espulsa, perchè essa si muove solo sotto l'azione della forza di attrazione terrestre, che è conservativa e centrale. La massa espulsa compie un'orbita ellittica in cui sia x la minima distanza dal centro della Terra, mentre la massima vale proprio R . Indicando con V_x la velocità nella posizione di minima distanza abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M}{10} V' R = \frac{M}{10} V_x x \\ \frac{1}{2} \frac{M}{10} V'^2 - \frac{GM_T \frac{M}{10}}{R} = \frac{1}{2} \frac{M}{10} V_x^2 - \frac{GM_T \frac{M}{10}}{x} \end{array} \right. . \quad \text{Una soluzione è } x = R,$$

corrispondente alla massima distanza (iniziale), mentre il valore minimo è

$$x = \frac{R}{2 \frac{GM}{RV'^2} - 1} .$$

Esercizio 2

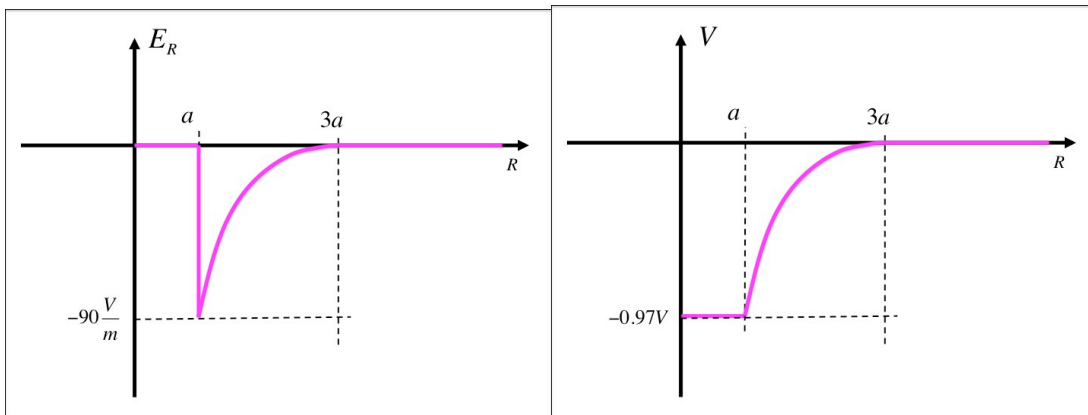
$$2.1 \quad \rho_o = -\frac{3}{104} \frac{Q}{\pi a^3} = 4.6 \times 10^{-9} \frac{C}{m^3}$$

$$2.2 \quad E_R = \begin{cases} 0 & R < a \\ \frac{Q}{104\pi\epsilon_0} \left(\frac{27}{R^2} - \frac{R}{a^3} \right) & \text{per } a < R < 3a \\ 0 & 3a < R \end{cases}, \quad E_R(R = a^+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = -90 \frac{V}{m}$$

2.3 Il potenziale elettrico è nullo per $R > 3a$ mentre per $a < R < 3a$ vale:

$$V(R) = \int_R^{3a} E_R dR = \int_R^{3a} \frac{Q}{104\pi\epsilon_0} \left(\frac{27}{R^2} - \frac{R}{a^3} \right) dR = \frac{Q}{104\pi\epsilon_0} \left[-\frac{27}{R} - \frac{R^2}{2a^3} \right]_R^{3a} = \frac{Q}{104\pi\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2a^3} + \frac{27}{R} - \frac{27}{2a} \right). \text{ In}$$

particolare $V(a) = \frac{7Q}{52\pi\epsilon_0 a} = -0.97V$ ed il potenziale è costante per $R < a$.



2.4 La carica dell'elettrone è $-e$: per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$-eV(5a) + \frac{1}{2} m_e V_i^2 = -eV(a) + \frac{1}{2} m_e V_f^2. \text{ Poichè } V_f > 0, \text{ si trova}$$

$$V_i > \sqrt{\frac{-7eQ}{26\pi m_e \epsilon_0 a}} = 5.96 \times 10^5 \frac{m}{s}.$$