INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

FISICA GENERALE 1 - I prova scritta parziale del **29 aprile 2014**

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________________

NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: è obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

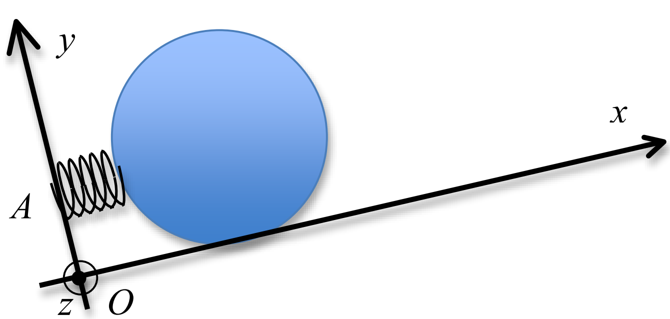
Esercizio Un piano è inclinato di un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale: definiamo un sistema di coordinate cartesiane con origine *O* alla base del piano, asse *x* lungo la direzione in salita ed asse *y* perpendicolare al piano. (vedi figura). Nel punto *A=(0, r, 0)* è fissata una molla, di lunghezza a riposo ℓ, in modo tale che essa resti sempre parallela all'asse *x*. Al tempo $t = 0$ una sfera omogenea, di massa *M* e raggio *r*, è appoggiata sul piano in modo da comprimere completamente la molla ed è lasciata libera di muoversi partendo da ferma. Si osserva che la sfera viene spinta dalla molla per un tratto pari ad ℓ, dove si stacca dalla molla, poi la sfera prosegue per un ulteriore tratto pari a 2ℓ in salita lungo il piano inclinato prima di fermarsi. Si osserva inoltre che la sfera si muove sempre rotolando senza strisciare, da cui si deduce che vi è un sufficiente attrito statico fra sfera e piano.

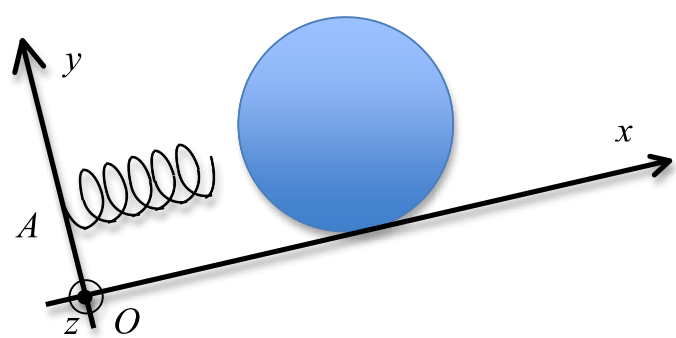
1.1 Spiegare perchè solo una fra le tre grandezze seguenti si conserva in ogni istante: i) energia meccanica ii) quantità di moto iii) momento angolare rispetto al polo *O*. Utilizzare la grandezza conservata per calcolare la costante elastica della molla.

1.2 Calcolare, nell'istante in cui la sfera si stacca dalla molla, la velocità del centro di massa della sfera.

1.3 Calcolare, nell'istante in cui la sfera si stacca dalla molla l'energia meccanica totale, la quantità di moto ed momento angolare rispetto al polo *O*. Nota: per le quantità vettoriali si forniscano le tre componenti nel sistema di coordinate assegnato.

1.4 Calcolare l'accelerazione della sfera in funzione della posizione *x* del suo centro massa nel tratto in cui la molla è ancora a contatto con la sfera (quindi per $r < x < \ell + r$). Calcolare il tempo in cui la sfera si stacca dalla molla. Calcolare il valore minimo del coefficiente di attrito statico affinchè sia effettivamente possibile il moto di puro rotolamento.

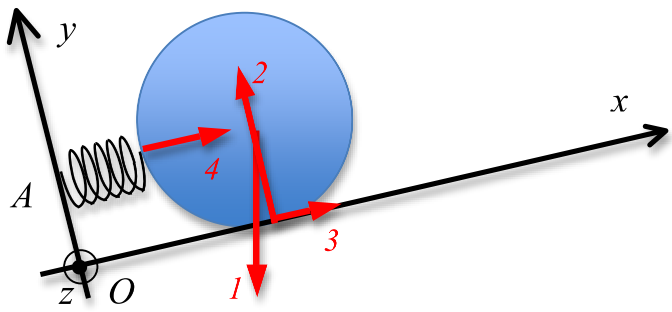




INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

FISICA GENERALE 1 - I prova scritta parziale del 29 aprile 2014

RISPOSTE



1.1 Tutte le forze (riferite alla figura: 1 = gravità, 2 = vincolare normale, 3 = attrito statico, 4 = elastica) sono conservative (gravità, elastica) oppure non compiono lavoro (vincolare normale, attrito statico) , quindi si conserva l'energia meccanica. Esse sono tutte forze esterne alla sfera. La loro somma è nulla lungo l'asse y , ma non lungo x, quindi la quantità di moto non si conserva. Rispetto al polo O , il momento della forza di attrito è nullo; la somma dei momenti della forza vincolare normale e della componente y della forza di gravità è nulla, ma la somma dei momenti della forza elastica e della componente x della forza di gravità non è nulla, quindi non si conserva il momento angolare. Applichiamo la legge di conservazione dell'energia meccanica fra l'istante iniziale ($t=0 \Leftrightarrow x=r$) e l'istante in cui la sfera è ferma con il centro di massa nella posizione $x = 3\ell + r$. Ponendo nulla l'energia potenziale gravitazionale nel punto O si ha

$$\frac{1}{2}k\ell^2 + Mg\left(r\sin\vartheta + r\cos\vartheta\right) = Mg\left(3\ell\sin\vartheta + r\sin\vartheta + r\cos\vartheta\right) \quad \text{da cui} \quad k = \frac{6Mg\sin\vartheta}{\ell}$$

1.2 Applichiamo la legge di conservazione dell'energia meccanica fra l'istante iniziale e l'istante in cui la sfera si stacca dalla molla ($x = r + \ell$). Indicando con ω_1 il modulo della velocita' angolare e con V_1 il modulo della velocità del centro di massa si ha:

$$\frac{1}{2}k\ell^2 + Mg\left(r\sin\vartheta + r\cos\vartheta\right) = Mg\left(\ell\sin\vartheta + r\sin\vartheta + r\cos\vartheta\right) + \frac{1}{2}\frac{7}{5}Mr^2\omega_1^2 \quad \text{da cui}$$

$$3Mg\ell\sin\vartheta = Mg\ell\sin\vartheta + \frac{7}{10}Mr^2\omega_1^2 \quad \text{e} \quad V_1 = \omega_1 r = \sqrt{\frac{20}{7}g\ell\sin\vartheta}.$$

1.3 Ponendo nulla l'energia potenziale gravitazionale nel punto O si ottiene

$$E = K + U = \frac{1}{2}k\ell^2 + Mg\left(r\sin\vartheta + r\cos\vartheta\right) = 3Mg\ell\sin\vartheta + Mg\left(r\sin\vartheta + r\cos\vartheta\right).$$

La quantità di moto richiesta vale $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MV_1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$

$= \left(M\sqrt{\frac{20}{7} g\ell \sin\vartheta}, \quad 0, \quad 0 \right)$.

Definendo il sistema *Oxyz* come in figura, il momento angolare vale

$\vec{L}_O = \begin{pmatrix} 0, & 0, & L_z \end{pmatrix}$ con $L_z = -MV_1 r - \frac{2}{5} Mr^2 \omega_1 = -Mr\sqrt{\frac{28}{5} g\ell \sin\vartheta}$.

1.4 La relazione fra accelerazione angolare $\vec{\alpha}$, che ha solo componente lungo *z*, e l'accelerazione del centro di massa a_x è $a_x = -\alpha_z r$. Con il sistema di coordinate scelto, notate infatti che quando la sfera sta salendo sul piano α_z è negativa (rotazione oraria), mentre a_x è positiva. La II equazione cardinale della meccanica con il punto di contatto come polo fornisce $\frac{7}{5} Mr^2 \alpha_z = Mgr \sin\vartheta + kr(x - \ell - r)$, da cui $a_x = -\alpha_z r = \frac{5}{7} g \sin\vartheta \left(5 - 6\frac{x - r}{\ell} \right)$. Notate come il blocco acceleri (a_x positiva) fino al punto $x = r + \frac{5}{6}\ell$, per poi decelerare.

Si ha $a_x = \ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\vartheta \left(5 - 6\frac{x - r}{\ell} \right)$ con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\vartheta \left(5 - 6\frac{x - r}{\ell} \right) \\ x(0) = r \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

. Una soluzione particolare è $x = r + \frac{5}{6}\ell$,

ponendo $\omega_o = \sqrt{\frac{30 g \sin\vartheta}{7\ell}}$ si ha $x(t) = r + \frac{5}{6}\ell(1 - \cos\omega_o t)$ per cui il distacco si ha quando $r + \ell = r + \frac{5}{6}\ell(1 - \cos\omega_o t)$ => $\cos\omega_o t = -\frac{1}{5}$.

La forza di attrito statico ha solo componente lungo *x*, calcolabile usando la I equazione cardinale della meccanica $F_{Sx} - Mg\sin\vartheta - k(x - \ell - r) = Ma_x$. Utilizzando i risultati precedenti si ha $F_{Sx} = \frac{Mg\sin\vartheta}{7}\left(-10 + 12\frac{x - r}{\ell} \right)$. Notate che la forza di attrito statico è

diretta in discesa se $a_x > 0$ $\left(x - r < \frac{5}{6}\ell\right)$, e viceversa in salita: il modulo della forza di attrito è massimo proprio per *t=0* *(x=r)* quindi
$\left|\vec{F}_S(x=r)\right| = \frac{10 Mg \sin\vartheta}{7} \le \mu_S Mg \cos\vartheta$, da cui $\mu_S \ge \frac{10}{7}\tan\vartheta$.