INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI
FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del 24 febbraio 2014

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________________

NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Una Stazione Spaziale (SS) di massa $M = 500 tonnellate$, si muove attorno alla Terra con moto circolare uniforme ad una altezza $h = 630km$.
Nota: sono importanti le valutazioni numeriche; raggio della Terra $(R_T) = 6370km$.

1.1 Calcolare il modulo della velocità (V_0) della SS.

1.2 Calcolare l'energia potenziale, l'energia cinetica e l'energia totale della SS, imponendo che l'energia potenziale gravitazionale sia nulla a distanza infinita dalla Terra.

1.3 Un astronauta si trova all'interno della SS ed è fermo rispetto ad essa. Calcolare l'accelerazione (modulo, direzione e verso) dell'astronauta sia nel sistema della SS, sia in un sistema inerziale (si consideri la Terra come sistema inerziale).

1.4 Un secondo astronauta si trova all'interno della SS e rispetto ad essa si sta muovendo con velocità di modulo costante $V = 1.4m/s$ sempre parallela alla velocità della SS. Calcolare l'accelerazione (modulo, direzione e verso) del secondo astronauta sia nel sistema della SS, sia in un sistema inerziale. [Nota: rispetto alla Terra questo secondo astronauta sta quindi compiendo un'orbita circolare con lo stesso raggio della SS, ma con velocità di modulo $V+V_o$]

.

Esercizio 2 Nello spazio in cui è definito un sistema di coordinate cartesiane *Oxyz* e' stata posta una densità di carica uniforme: $-\rho$ (ρ è un numero positivo) nella regione $-a < x < a$, mentre la restante parte dello spazio è vuota.

2.1 Calcolare E_x e riportarlo in un grafico in funzione di x.

2.2 Calcolare il potenziale elettrico in funzione di x, imponendo che esso sia nullo in $x=0$ e riportarlo in un grafico in funzione di x.

2.3 Un protone è lasciato in $x = a/2$ al tempo $t = 0$ con velocità nulla; nel suo moto successivo si consideri come unica forza significativa quella elettrostatica. Si calcoli la posizione del protone in funzione del tempo.

2.4 Diversamente dalla domanda precedente, un elettrone è lasciato in $x = a/2$ al tempo $t = 0$ con velocità nulla; nel suo moto successivo si consideri come unica forza significativa quella elettrostatica. Si calcoli la posizione dell'elettrone in funzione del tempo.

INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI
FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del 24 febbraio 2014
RISPOSTE

Esercizio 1.

1.1 Per la SS in moto circolare uniforme a distanza R dal centro della Terra vale

$m|\vec{a}| = \dfrac{m\vec{V}_o^{\,2}}{R} = \dfrac{GmM_T}{R^2}$, ricordando che $GM_T = gR_T^2$, si trova

$$\left|\vec{V}_0\right| = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = R_T\sqrt{\frac{g}{R_T + h}} = 7.54\,\frac{km}{s} \; .$$

1.2 Sull'orbita circolare:

energia potenziale $= U = -\dfrac{GMM_T}{h + R_T} = -\dfrac{MgR_T^2}{h + R_T} = -2.84x10^{13}\,J$,

energia cinetica $= K = \dfrac{1}{2}MV_0^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{GMM_T}{h + R_T} = \dfrac{1}{2}\dfrac{MgR_T^2}{h + R_T} = 1.42x10^{13}\,J = -\dfrac{U}{2}$,

energia totale $= E = K + U = -1.42x10^{13}\,J$.

1.3 Ricordiamo la legge di composizione delle accelerazioni $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PO} - \vec{a}_{AO}$, dove il sistema O è inerziale (solidale con la Terra), il sistema A è non inerziale (solidale con la SS) e P il nostro astronauta. Nella situazione descritta si individua facilmente che $\vec{a}_{PA} = \vec{0}$ e quindi $\vec{a}_{PO} = \vec{a}_{AO} = \vec{a}$ (calcolata nella domanda 1.1) :

$$\vec{a} = -\frac{\vec{V}_o^{\,2}}{R}\hat{R} = \frac{-gR_T^2}{R^2}\hat{R} = \frac{-gR_T^2}{\left(R_T + h\right)^2}\hat{R} = \frac{-g}{\left(1 + \dfrac{h}{R_T}\right)^2}\hat{R} = \left(-8.12\,\frac{m}{s^2}\right)\hat{R} \; .$$

1.4 In questa situazione non è più vero che che $\vec{a}_{PA} = \vec{0}$, ma sappiamo che questo secondo astronauta sta compiendo un'orbita circolare con lo stesso raggio della SS con velocità di modulo $V+V_o$. Allora $\vec{a}_{PO} = -\dfrac{\left(V + V_o\right)^2}{R}\hat{R}$. L'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_{AO}$ ha la forma: $\vec{a}_{AO} = -\omega^2\vec{R} + 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}$, dove $|\vec{\omega}| = \dfrac{\left|\vec{V}_o\right|}{R}$, per cui

$\vec{a}_{AO} = -\dfrac{V_o^{\,2}}{R}\hat{R} - 2\omega V\hat{R} = -\dfrac{V_o^{\,2} + 2V_oV}{R}\hat{R}$. Abbiamo infine

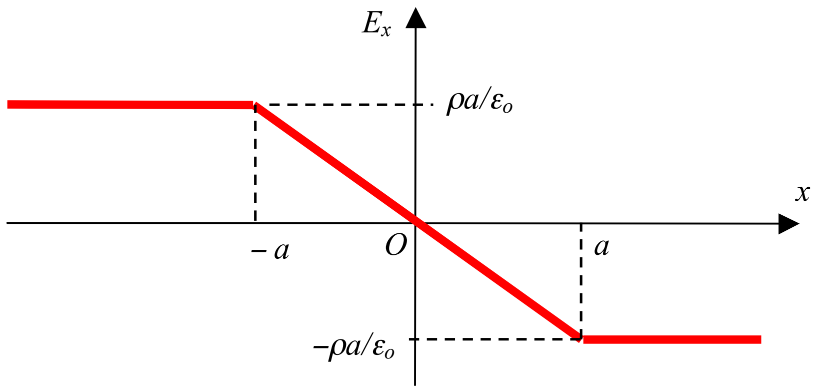
$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PO} - \vec{a}_{AO} = -\frac{\left(V + V_o\right)^2}{R}\hat{R} + \frac{V_o^{\,2} + 2V_oV}{R}\hat{R} = -\frac{\mathrm{V}^2}{R}\hat{R} = \frac{-\mathrm{V}^2}{\left(R_T + h\right)}\hat{R} = \left(-2.8x10^{-7}\,\frac{m}{s^2}\right)\hat{R}$$

.

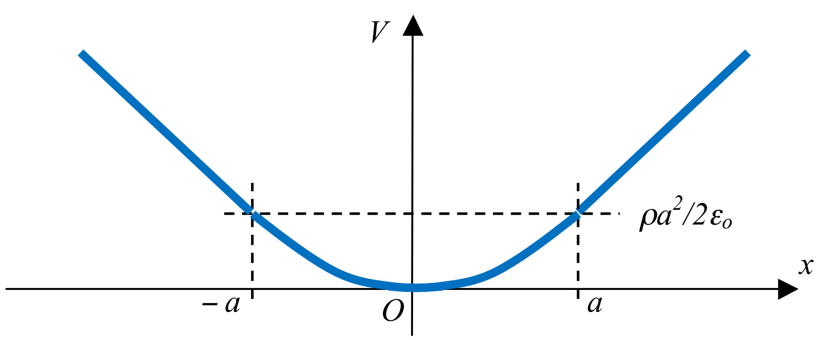
Esercizio 2

2.1 E_x è l'unica componente non nulla per motivi di simmetria e applicando la legge di Gauss si ha:

$$E_x = \begin{cases} \dfrac{\rho a}{\varepsilon_0} & x < -a \\ \dfrac{-\rho x}{\varepsilon_0} & -a < x < a \\ -\dfrac{\rho a}{\varepsilon_0} & a < x \end{cases}$$



2.2 $V(x) - V(0) \equiv -\int_0^x E_x dx$ da cui $V(x) = -\int_0^x E_x dx = \begin{cases} -\dfrac{\rho a x}{\varepsilon_0} - \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} & x < -a \\ \dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} & -a < x < a \\ \dfrac{\rho a x}{\varepsilon_0} - \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} & a < x \end{cases}$



2.3 Il moto del protone si svolgerà nella regione $|x|<a/2$, con l'equazione del moto

$$\begin{cases} m_p \ddot{x} = -e\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}x \\ x(0) = a/2 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{che ha per soluzione} \quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\cos\omega_p t \\ \omega_p = \sqrt{\dfrac{e\rho}{m_p\varepsilon_0}} \end{cases} .$$

Nota: $+e = 1.6x10^{-19}C$ = carica elementare (uguale ed opposta alla carica dell'elettrone).

2.4 La forza è opposta rispetto al caso precedente, con le stesse condizioni iniziali, quindi l'elettrone si porterà fino ad $x=a$ al tempo $t = t_1$. Per $t < t_1$ l'equazione

del moto è
$$\begin{cases} m_e \ddot{x} = e\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}x \\ x(0) = a/2 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{che ha per soluzione} \quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{4}\left(e^{+\lambda_e t} + e^{-\lambda_e t}\right) \\ \lambda_e = \sqrt{\dfrac{e\rho}{m_e\varepsilon_0}} \end{cases} .$$

Imponendo $x(t_1)=a$ si trova $t_1 = \ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{\lambda_e}$. Successivamente per $t > t_1$

l'equazione del moto è
$$\begin{cases} m_e \ddot{x} = e\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}a \\ x(t_1) = a \\ \dot{x}(t_1) = \dfrac{a\lambda_e\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad , \quad \text{che ha per soluzione}$$

$$x = a\left(1 + \lambda_e\frac{\sqrt{3}}{2}(t-t_1) + \frac{\lambda_e^{\,2}}{2}(t-t_1)^2\right)$$