INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del **16 gennaio 2014**

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________________

NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Una molla, di costante elastica $k = 100N/m$ e lunghezza a riposo $\ell_o = 50cm$, ha un'estremità fissata nell'origine di un asse x inclinato di 30° gradi rispetto ad un piano orizzonale, la direzione positiva di questo asse x è in discesa. All'altro estremo della molla è fissata una massa $M = 4kg$ vincolata a muoversi sull'asse x. Al tempo $t = 0$ la massa è ferma in $x = \ell_o$ e viene lasciata libera di muoversi.

1.1 Nell'ipotesi in cui non vi fossero attriti, si calcolino la posizione $x(t)$ della massa in funzione di t e la posizione in cui la massa si fermerebbe per la prima volta (x_a).

1.2 Sempre nell'ipotesi in cui non vi fossero attriti, si calcolino l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema in funzione di t. Specificare chiaramente dove avete posto lo zero dell'energia potenziale.

1.3 Lasciando libera la massa, si osserva invece che essa si ferma in $x_b = \ell_o + \dfrac{x_a - \ell_o}{2}$ e lì rimane ferma. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico ed i limiti sul coefficiente di attrito statico fra massa ed asse x. [Suggerimento: utilizzare il teorema dell'energia cinetica]

1.4 Nell'ipotesi della domanda 1.3 si calcoli $x(t)$ da $t = 0$ fino al tempo impiegato dalla massa per raggiungere la posizione x_b.

Esercizio 2 Una superficie cilindrica, di altezza infinita e raggio a, uniformemente caricata con una densità positiva di carica elettrica σ, è in rotazione con velocità angolare ω costante attorno al suo asse. Si utilizzi un sistema di coordinate cilindriche con l'asse z coincidente con l'asse della superficie cilindrica.

2.1 Si calcolino le componenti del campo elettrico in funzione della distanza r dall'asse z.

2.2 Si calcolino le componenti del campo magnetico in funzione della distanza r dall'asse z.

2.3 L'integrale di linea del campo magnetico dal punto O ($r = 0$, $\phi = 0,$ $z = 0$) ad un punto A ($r = 0$, $\phi = 0,$ $z = 5a$) dipende dal percorso? In caso negativo se ne calcoli il valore, in caso affermativo si disegni un percorso in cui tale valore è nullo.

2.4 Un elettrone si trova nel punto B ($r = 3a$, $\phi = 0,$ $z = 0$) con velocità nulla. Ipotizzando che l'elettrone possa attraversare la superficie carica senza interagire, calcolare le coordinate (r , ϕ) del punto in cui si fermerà per la prima volta.

INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI
FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del **16 gennaio 2014**
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 L'equazione del moto e le condizioni iniziali sono $\begin{cases} M\ddot{x} = Mg\sin\vartheta - k(x-\ell_o) \\ x(0) = \ell_o \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ da cui $x(t) = \ell_o + \frac{Mg\sin\vartheta}{k}(1-\cos\omega t)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$. Imponendo che la velocità si annulli, si ottiene la posizione in cui la massa si ferma per la prima volta: $x_a = \ell_o + \frac{2Mg\sin\vartheta}{k} = 89.2cm$.

1.2 $K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\frac{(Mg\sin\vartheta)^2}{k}\sin^2\omega t$.

Definiamo nulla l'energia potenziale gravitazionale nella posizione $x = \ell_o$, dove è nulla anche l'energia potenziale elastica della molla:

$U = \frac{1}{2}k(x-\ell_o)^2 - Mg(x-\ell_o)\sin\vartheta = \frac{1}{2}\frac{(Mg\sin\vartheta)^2}{k}(-1+\cos^2\omega t)$

$E = K + U = 0 = \text{costante}$

1.3 Utilizziamo il teorema dell'energia cinetica fra $x = \ell_o$ e $x = x_b = \ell_o + \frac{Mg\sin\vartheta}{k}$:

$0 = L_{gravità} + L_{attrito} + L_{molla} = Mg\sin\vartheta(x_b - \ell_o) - \mu_D Mg\cos\vartheta(x_b-\ell_o) - \frac{1}{2}k(x_b-\ell_o)^2$ da cui $\mu_D = \frac{\tan\vartheta}{2} = 0.289$. I limiti sull'attrito statico sono

$0.289 = \frac{\tan\vartheta}{2} \le \mu_S \le \tan\vartheta = 0.577$ e si ottengono con le seguenti tre osservazioni:

i) si ha sempre $\mu_S \ge \mu_D = \frac{\tan\vartheta}{2} = 0.289$

ii) in $x = \ell_o$ la massa si muove quindi $\mu_S Mg\cos\vartheta \le Mg\sin\vartheta$ e $\mu_S \le \tan\vartheta == 0.577$

iii) in $x = x_b$ la massa resta ferma: tuttavia la somma di tutte le altre forze (gravità, elastica e forza vincolare) è in questo punto nulla e quindi qualunque coefficiente di attrito statico è possibile.

1.4 L'equazione del moto e le condizioni iniziali adesso sono

$$\begin{cases} M\ddot{x} = Mg\sin\vartheta - k\left(x - \ell_o\right) - \mu_D Mg\cos\vartheta \\ x(0) = \ell_o \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$x(t) = \ell_o + \frac{Mg\sin\vartheta}{2k}\left(1 - \cos\omega t\right)$$

fino al tempo $t = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}$.

.

Esercizio 2

2.1 L'unica componente non nulla del campo elettrico e' quella radiale:

$$E_r = \begin{cases} 0 & \text{se } r < a \\ \dfrac{a\sigma}{\varepsilon_o r} & \text{se } r > a \end{cases}$$

2.2 L'unica componente non nulla del campo magnetico è quella assiale, in quanto le correnti sono distribuite come in un solenoide: $B_z = \begin{cases} \mu_o a\sigma\omega & \text{se } r < a \\ 0 & \text{se } r > a \end{cases}$

2.3 $\int_O^B \vec{B} \bullet d\vec{l}$ dipende dal percorso. Tale valore è nullo, per esempio, sul percorso *O-H-K-A* , in blu nella *figura 1*, in cui $H = (r = 2a\ ,\ \phi = 0,\ z = 0)$ e $K = (r = 2a\ ,\ \phi = 0,\ z = 5a)$.

2.4 L'elettrone (traiettoria in rosso in *figura 2*, carica $-e$ e massa m_e) procede in linea retta fino al punto $P = (r = a\ ,\ \phi = 0,\ z = 0)$, che raggiunge con velocità V, calcolabile con il teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}m_e V^2 = \int_B^P \vec{E} \bullet d\vec{l} = -e\int_{3a}^{a} \frac{a\sigma}{\varepsilon_o r}dr = \frac{e\sigma a}{\varepsilon_o}\ln 3 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{2e\sigma a}{m_e \varepsilon_o}\ln 3}.$$

Poi prosegue nel campo magnetico con velocità costante lungo un arco di circonferenza di raggio $R = \frac{m_e V}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_e \sigma a}{e\varepsilon_o}\ln 3}$, uscendo nel punto Q. Chiamando $\Delta\phi$ l'angolo *POQ*, si ha $\tan\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{R}{a} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_e\sigma}{ea\varepsilon_o}\ln 3}$. Successivamente prosegue in linea retta e, poichè il campo elettrico è conservativo, si ferma nel punto F di coordinate $(r = 3a\ ,\ \phi = \Delta\phi,\ z = 0)$ con $\Delta\phi = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_e\sigma}{ea\varepsilon_o}\ln 3}\right)$.

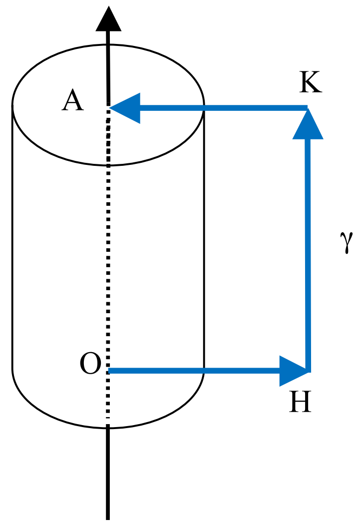

figura 1
(vista in prospettiva)

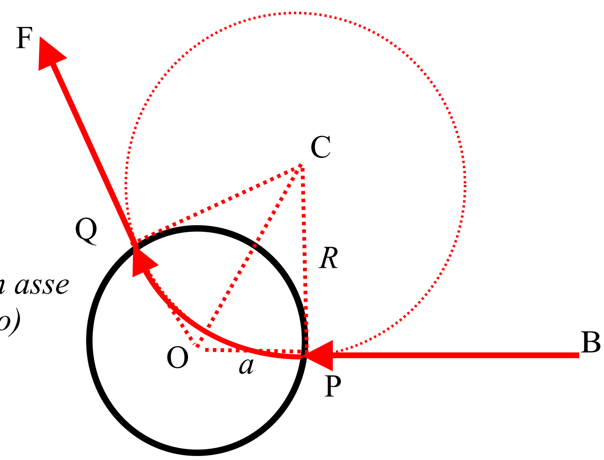

figura 2 (vista con asse z entrante nel foglio)