FISICA 1 per TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2012-13
ESERCITAZIONE SCRITTA del 23 aprile 2013

COGNOME ___________________ NOME ___________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Un blocco cubico omogeneo di massa $m_1 = 190g$ è vincolato a muoversi su una retta orizzontale (asse *x*); vi è attrito, sia statico che dinamico, sul piano di appoggio. Il centro di una faccia del blocco cubico è collegato ad una molla di costante elastica *k=40N/m* e lunghezza a riposo $\ell_o = 20cm$, essendo l'altra estremità della molla vincolata in *x=0.* Il blocco e' inizialmente fermo in $x = \ell_o$: al tempo $t = 0^-$ un proiettile di massa $m_2 = 10g$, la cui velocità è diretta nel verso dell'asse *x* positivo, si conficca istantaneamente nel cubo fermandosi esattamente nel suo centro. Si osserva che il blocco (con incluso il proiettile nel suo centro) al tempo $t = 0$ si trova in movimento con una velocità di modulo $V_i = 1m/s$ nel verso dell'asse *x* positivo. Nel compito utilizzate per *g* il valore approssimato $g=10m/s^2$.

1.1 Si calcoli la <u>velocità</u> con cui il proiettile ha urtato il blocco e la <u>frazione di energia</u> del proiettile che è stata dissipata durante l'urto.

1.2 In funzione del coefficiente di attrito dinamico (μ_D), si calcoli la <u>massima ascissa</u> $(x_{\max})$ che il blocco raggiunge. [Suggerimento: usate un teorema sull'energia]

1.3 Si determinino le condizioni sui coefficienti di <u>attrito statico</u> (μ_S) e <u>dinamico</u> (μ_D) in modo che il blocco, una volta raggiunta la posizione $x_{\max}$, vi resti fermo. Indicate le soluzioni trovate in un piano μ_D, μ_S. [Attenzione: il blocco non solo non deve rimettersi in moto lungo l'asse *x*, ma non deve nemmeno ribaltarsi]

1.4 Si determini la legge oraria $x(t)$ del blocco dal tempo *t=0* (subito dopo l'urto) fino al tempo in cui esso raggiunge la posizione $x_{\max}$.

FISICA 1 per TELECOMUNICAZIONI
ESERCITAZIONE SCRITTA del 23 aprile 2013
RISPOSTE

1.1 Nell'urto si conserva la componente *x* della quantità di moto.
Indicando con *M* la massa del blocco con incluso il proiettile $(M = m_1 + m_2 = 200g)$ dopo l'urto, si ha: $m_2 V_p = M V_i$ da cui $V_p = \frac{M}{m_2} V_i = 20 m/s$.

La frazione di energia persa è $f = \frac{|\Delta E|}{\frac{1}{2} m_2 V_p^2} = \frac{\left|\frac{1}{2} M V_i^2 - \frac{1}{2} m_2 V_p^2\right|}{\frac{1}{2} m_2 V_p^2} = 1 - \frac{M V_i^2}{m_2 V_p^2} = 1 - \frac{m_2}{M} = 95\%$

1.2 Utilizziamo il teorema dell'energia cinetica da subito dopo l'urto fino al raggiungimento della posizione $x_{\max}$. Ci è utile definire l'allungamento della molla $\Delta\ell = x_{\max} - \ell_o$.

$0 - \frac{1}{2} M V_i^2 = -\frac{1}{2} k \Delta\ell^2 - \mu_D M g \Delta\ell$ da cui $\Delta\ell^2 + 2\mu_D \frac{M}{k} g \Delta\ell - \frac{M}{k} V_i^2 = 0$ =>

$\Delta\ell = \frac{Mg}{k}\left(-\mu_D + \sqrt{\mu_D^2 + \frac{k V_i^2}{M g^2}}\right) = 5cm \bullet \left(-\mu_D + \sqrt{\mu_D^2 + 2}\right)$ quindi

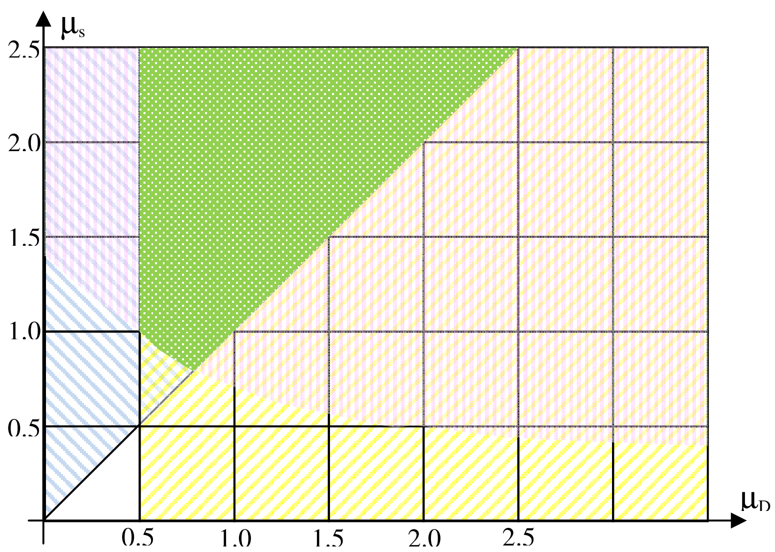
$x_{\max} = \ell_o + \Delta\ell = 20cm + 5cm \bullet \left(-\mu_D + \sqrt{\mu_D^2 + 2}\right)$.

1.3 Il blocco resta fermo senza traslare se $\mu_S M g \geq k \Delta\ell = Mg\left(-\mu_D + \sqrt{\mu_D^2 + \frac{k V_i^2}{M g^2}}\right) \Rightarrow$

$\mu_S \geq -\mu_D + \sqrt{\mu_D^2 + 2}$ (regione rosa in figura).

Il blocco resta fermo senza ruotare se $Mg\frac{a}{2} \geq k\Delta\ell\frac{a}{2}$ (*a* è il lato del blocco cubico) da cui

$Mg \geq Mg\left(-\mu_D + \sqrt{\mu_D^2 + 2}\right)$ => $1 \geq -\mu_D + \sqrt{\mu_D^2 + 2}$ => $\mu_D \geq 0.5$ (regione gialla in figura).
Occorre anche ricordare (regione celeste) che $\mu_S \geq \mu_D$. La regione in verde è la regione in cui tutte le relazioni sono verificate.



1.4 Scriviamo l'equazione del moto $M\ddot{x} = -\mu_D Mg - k(x - \ell_o)$, con le condizioni iniziali $x(0) = \ell_o$, $\dot{x}(0) = V_i$.

Risolvendola si ottiene la legge oraria: $x = \mu_D \frac{Mg}{k}(\cos\omega t - 1) + \ell_o + \frac{V_i}{\omega}\sin\omega t \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}\right)$.

Nota: ponendo uguale a zero la velocità si trova il tempo t_f in cui il blocco raggiunge la posizione richiesta nella domanda 1.2: $\tan\omega t_f = \frac{kV_i}{\mu_D Mg\omega}$ da cui $\cos\omega t_f = \frac{\mu_D g}{\sqrt{(\mu_D g)^2 + (\omega V_i)^2}}$ e $\sin\omega t_f = \frac{\omega V_i}{\sqrt{(\mu_D g)^2 + (\omega V_i)^2}}$.

Sostituendo nella legge oraria si trova

$$x_{\max} = x(t_f) = \mu_D \frac{Mg}{k}\frac{\mu_D g}{\sqrt{(\mu_D g)^2 + (\omega V_i)^2}} + \frac{V_i}{\omega}\frac{\omega V_i}{\sqrt{(\mu_D g)^2 + (\omega V_i)^2}} + \ell_o - \mu_D \frac{Mg}{k} =$$

$$= \ell_o - \mu_D \frac{Mg}{k} + \frac{M(\mu_D g)^2}{k\sqrt{(\mu_D g)^2 + (\omega V_i)^2}} + \frac{V_i^2}{\sqrt{(\mu_D g)^2 + (\omega V_i)^2}} = \ell_o - \mu_D \frac{Mg}{k} + \frac{M(\mu_D g)^2 + kV_i^2}{k\sqrt{(\mu_D g)^2 + \frac{kV_i^2}{M}}} =$$

$$= \ell_o - \mu_D \frac{Mg}{k} + \frac{(\mu_D Mg)^2 + MkV_i^2}{k\sqrt{(\mu_D Mg)^2 + kMV_i^2}} = \ell_o - \mu_D \frac{Mg}{k} + \frac{\sqrt{(\mu_D Mg)^2 + kMV_i^2}}{k} =$$

$$= \ell_o + \frac{Mg}{k}\left(-\mu_D + \sqrt{\mu_D^{\,2} + \frac{kV_i^2}{Mg^2}}\right)$$

come trovato anche utilizzando il teorema delle forze vive.