INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI
FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del 17 settembre 2013

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Una Stazione Spaziale (SS), di massa $M = 400 tonnellate$, si muove attorno alla Terra con moto circolare uniforme ad una altezza $h_1 = 280 km$.
Nota: sono importanti le valutazioni numeriche; raggio della Terra $(R_T) = 6370 km$.

1.1 Calcolare il modulo della velocità (V_0) ed il modulo dell'accelerazione della SS.

1.2 Calcolare l'energia potenziale, l'energia cinetica e l'energia totale della SS, imponendo che l'energia potenziale gravitazionale sia nulla a distanza infinita dalla Terra.

1.3 Calcolare l'energia che si è dovuta fornire alla SS per portarla sull'orbita descritta, a partire dall'istante in cui essa era ferma sulla superficie terrestre. (Nota: potete trascurare la velocità della rotazione terrestre)

1.4 Al tempo $t=0^-$ i motori si accendono per un tempo brevissimo ed al tempo $t=0^+$ il modulo della velocità della SS diventa V_1, mentre la direzione resta invariata. Si osserva che successivamente la SS compie un moto in cui la massima altezza, raggiunta ad un tempo t_2, è $h_2 = 400 km$. Calcolare V_1 utilizzando due leggi di conservazione appropriate fra il tempo $t=0^+$ ed il tempo t_2.

Esercizio 2 In un sistema di cordinate sferico un isolante in simmetria sferica è uniformente caricato con densità di carica $\rho_o > 0$ nella regione $0 < R < a$ e con densità di carica $-\rho_o$ nella regione $a < R < b$, in modo che la carica totale sia nulla.

2.1 Calcolare b (in funzione di a)

2.2 Calcolare la componente radiale del campo elettrico in ogni punto dello spazio e riportarla in un grafico in funzione di R

2.3 Si calcoli il modulo della velocità minima che si deve imprimere, in *direzione radiale*, ad un elettrone che si trovi ad una distanza $a/2$ dal centro dell'isolante affinchè raggiunga la zona di separazione fra carica positiva e negativa (superficie $R=a$). Il risultato dipende dal verso della velocità?

2.4 Lanciando al tempo $t=0$ l'elettrone verso l'esterno dal punto $R=a/2$ e con la velocità trovata sopra, calcolare la legge oraria del moto dell'elettrone. Nota: si ipotizzi che l'unica forza cui sia soggetto l'elettrone sia quella elettrica.

INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del 17 settembre 2013

RISPOSTE

Esercizio 1.

1.1 Per un satellite di massa M in moto circolare uniforme a distanza R dal centro della Terra vale $m|\vec{a}| = \frac{m\vec{V}^2}{R} = \frac{GmM_T}{R^2}$, ricordando che $GM_T = gR_T^2$, si trova

$$|\vec{a}| = \frac{gR_T^2}{R^2} = \frac{gR_T^2}{(R_T + h_1)^2} = \frac{g}{\left(1 + \frac{h_1}{R_T}\right)^2} = 9.00\frac{m}{s^2}$$ e

$$|\vec{V}_0| = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h_1}} = R_T\sqrt{\frac{g}{R_T + h_1}} = 7.74\frac{km}{s} \quad .$$

1.2 Sull'orbita circolare: energia potenziale $= U = -\frac{GMM_T}{h_1 + R_T} = -\frac{MgR_T^2}{h_1 + R_T} = -2.39x10^{13}\,J$, energia cinetica $= K = \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}\frac{GMM_T}{h_1 + R_T} = \frac{1}{2}\frac{MgR_T^2}{h_1 + R_T} = 1.20x10^{13}\,J = -\frac{U}{2}$, energia totale $= E = K + U = -1.20x10^{13}\,J$.

1.3 L'energia della SS alla superficie terrestre, che è solo potenziale, vale $E_T = -\frac{GMM_T}{R_T} = -MgR_T = -2.50x10^{13}\,J$. Quindi l'energia richiesta è

$$\Delta E = E - E_T = \frac{MgR_T}{2}\left(1 + \frac{2h_1}{R_T + h_1}\right) = 1.30x10^{13}\,J \quad .$$

1.4 Fra il tempo $t=0^+$ ed il tempo t_2 si conservano l'energia meccanica ed il momento angolare, perchè la stazione si muove solo sotto l'azione della forza di attrazione terrestre, che è conservativa e centrale. In pratica la SS compie un'orbita ellittica in cui la minima e la massima altezza sono proprio h_1 ed h_2. Al tempo $t=0^+$ l'energia cinetica vale $K_1 = \frac{1}{2}MV_1^2$, quella potenziale $U_1 = U = -\frac{MgR_T^2}{h_1 + R_T}$ ed il momento angolare (modulo) $L_1 = MV_1(R_T + h_1)$. Al tempo t_2 l'energia cinetica vale $K_2 = \frac{1}{2}MV_2^2$, quella potenziale $U_2 = -\frac{MgR_T^2}{h_2 + R_T}$ ed il momento angolare (modulo) $L_2 = MV_2(R_T + h_2)$.

Abbiamo due incognite $(V_1 \text{ e } V_2)$ e due leggi di conservazione:

$\begin{cases} K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \\ L_1 = L_2 \end{cases}$, da cui si ottiene

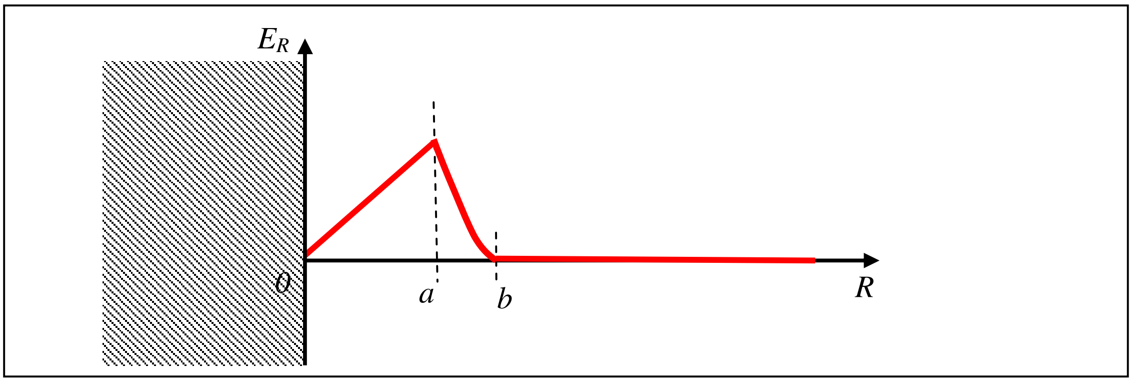
$$V_1 = \sqrt{gR_T \frac{1+\dfrac{h_2}{R_T}}{\left(1+\dfrac{h_1}{R_T}\right)\left(1+\dfrac{h_1+h_2}{2R_T}\right)}} = V_0\sqrt{\frac{1+\dfrac{h_2}{R_T}}{1+\dfrac{h_1+h_2}{2R_T}}} = 7.77\,\frac{km}{s}.$$

.

Esercizio 2

2.1 $b = a\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}a$

2.2 $E_R = \begin{cases} 0 & R > b \\ \dfrac{\rho_o}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{2a^3}{R^2} - R\right) & a < R < b \\ \dfrac{\rho_o}{3\varepsilon_0} R & R < a \end{cases}$



2.3 La differenza di potenziale elettrico fra $R=a/2$ ed $R=a$ vale:

$V(a/2) - V(a) = \int_{a/2}^{a} E_R dR = \int_{a/2}^{a} \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0} dR = \frac{\rho_0 a^2}{8\varepsilon_0}$. Poichè la carica dell'elettrone è $-e$,

per la conservazione dell'energia meccanica si ha $-eV(a/2) + \frac{1}{2} m_e V_{\min}^2 = -eV(a) + 0$,

da cui $V_{\min} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{e\rho_0}{m_e \varepsilon_0}}$. Il risultato non dipende dal *verso* della velocità.

(Nota: il risultato dipenderebbe eventualmente dalla *direzione:* se essa non fosse radiale si dovrebbero impostare le leggi di conservazione del momento angolare e dell'energia meccanica in modo simile a quanto effettuato nella quarta domanda del primo esercizio di questo compito).

2.4 Ricordiamo che la coordinata radiale (R) è definita positiva. Per risolvere il problema è più opportuno utilizzare un asse x con origine nel centro dell'isolante e passante per il punto in cui l'elettrone inizia il suo moto.

Indicando con $x(t)$ la posizione dell'elettrone nel tempo le condizioni iniziali sono: $\begin{cases} x(0)=\dfrac{a}{2} \\ \dot{x}(0)=\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{e\rho_0}{m_e\varepsilon_0}} \end{cases}$, mentre l'equazione del moto è $m_e\ddot{x}=-\dfrac{e\rho_0}{3\varepsilon_0}x$. La soluzione

$x=\dfrac{a}{2}\left(\cos\omega t+\sqrt{3}\sin\omega t\right)=a\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{6}\right)$ con $\omega=\sqrt{\dfrac{e\rho_0}{3m_e\varepsilon_0}}$.

.