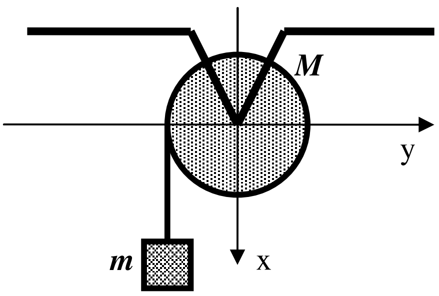
INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI
FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del 20 febbraio 2012

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Una carrucola, schematizzabile con un cilindro omogeneo di massa M e raggio R, può ruotare senza attrito attorno al suo asse, che coincide con l'asse z di un sistema di coordinate Oxyz, in cui l'asse x è verticale e diretto verso il basso. Attorno al cilindro è avvolta una fune inestensibile cui è appeso un blocco di massa m. Tutto il sistema, composto da carrucola e blocco, è fermo e viene lasciato libero al tempo $t = 0$.

1.1 Si dica se la quantità di moto, il momento angolare e l'energia del sistema si conservano, indicando quali siano le forze responsabili delle variazioni.
1.2 Si calcoli la velocità del blocco dopo che si è abbassato di una quota h.
1.3 Si calcoli il tempo t_f che il blocco impiega ad abbassarsi di una quota h.
1.4 Si calcoli la variazione delle quantità, di cui alla domanda 1.1, che non si sono conservate fra $t = 0$ e $t = t_f$. Nota: per le quantità vettoriali occorre fornire le tre componenti nel sistema Oxyz dato.



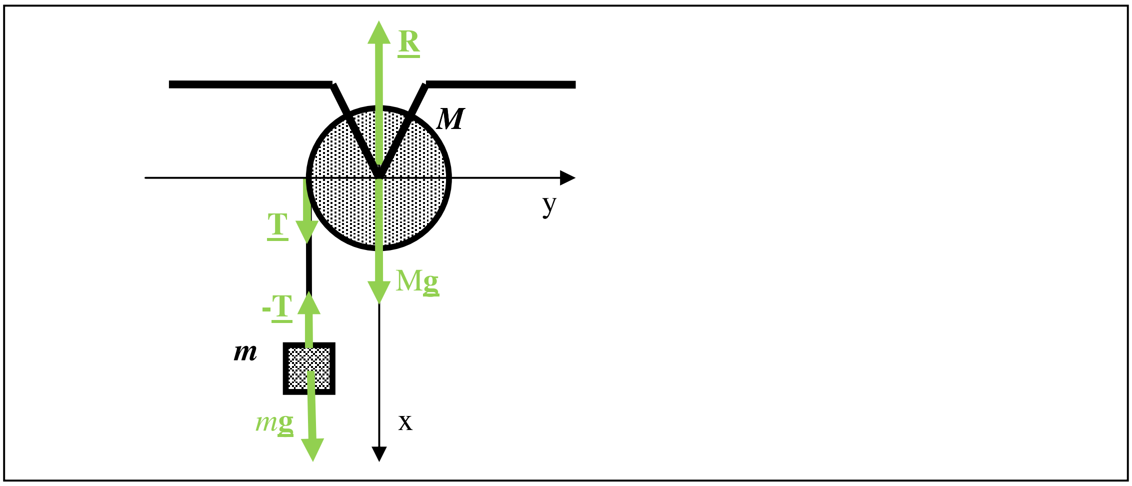
Esercizio 2 Si definisca un sistema di cordinate sferico, nel quale un isolante in simmetria sferica è uniformente caricato con densità di carica $\rho > 0$ e si estende nella regione $a < R < 2a$.

2.1 Calcolare la componente radiale del campo elettrico in ogni punto della spazio e riportarla in un grafico in funzione di R
2.2 Si calcoli il flusso del campo elettrico attraverso un quadrato (superficie aperta!) di lato pari al diametro esterno dell'isolante ($L=4a$) e tangente nel suo centro alla superficie esterna dell'isolante stesso.
2.3 Si calcoli il potenziale elettrico in ogni punto della spazio definendo nullo il potenziale all'infinito.
2.4 Si calcoli la velocità che si deve imprimere ad un elettrone che si trovi ad una distanza $3a$ dal centro dell'isolante affinchè effettui un moto circolare uniforme.

INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI
FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del 20 febbraio 2012
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Si conserva l'energia meccanica del sistema, perchè tutte le forze sono conservative. La quantità di moto non si conserva, perchè la somma delle forze esterne $\vec{R} + m\vec{g} + M\vec{g} \neq \vec{0}$. Il momento angolare non si conserva, perchè il momento della forza esterna $m\vec{g}$ è diverso da zero (tutti i momenti delle altre forze esterne sono nulli).



1.2 Utilizziamo la conservazione dell'energia meccanica: $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\dfrac{2mgh}{\dfrac{M}{2} + m}}$

1.3 Indichiamo con x la posizione del blocco m e con ω la velocità angolare dellla carrucola. Si ha $\begin{cases} -T + mg = m\ddot{y} \\ TR = I\dot{\omega} \end{cases}$ e, ricordando che $\dot{\omega} = \dfrac{\dot{y}}{R}$, $I = \dfrac{MR^2}{2}$ si trova che l'accelerazione del blocco è costante: $\ddot{y} = \dfrac{m}{m + \dfrac{M}{2}} g$. Il tempo richiesto è

$$t_f = \sqrt{\frac{2h\left(\frac{M}{2} + m\right)}{mg}} .$$

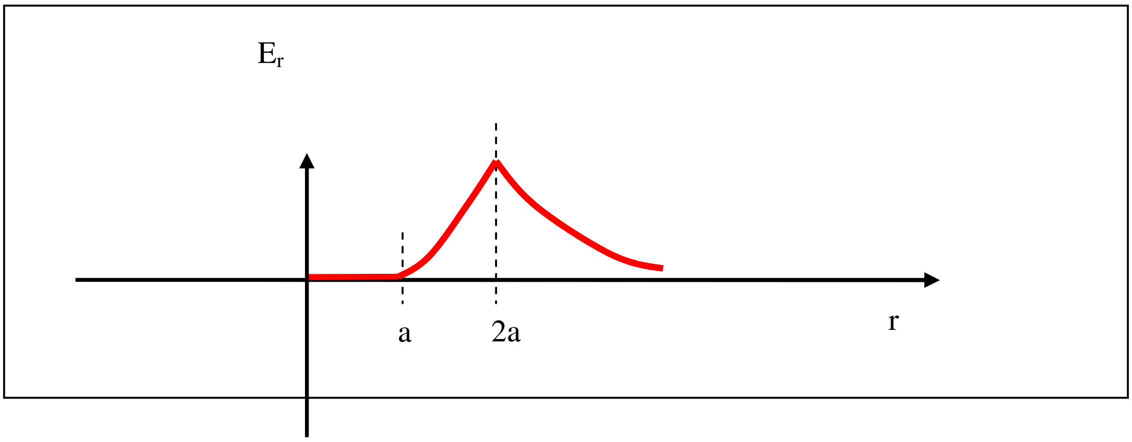
1.4 $\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \left(m\left|\vec{V}\right|, \quad 0, \quad 0\right)$ perchè nello stato iniziale non vi è quantità di moto e nello stato finale la quantità di moto della carrucola è nulla (il centro di massa è fermo).
La variazione del momento angolare si può calcolare in due modi, che forniscono lo stesso risultato:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = \left(0, \quad 0, \quad mVR + I\omega^2 R\right) = \left(0, \quad 0, \quad \left(m + \frac{M}{2}\right)VR\right) = \left(0, \quad 0, \quad \sqrt{2mgh\left(\frac{M}{2} + m\right)}\right)$$

$$\Delta\vec{L} = \int_0^{t_f} \vec{\tau}_{est}\, dt = \left(0, \quad 0, \quad mgRt_f\right) = \left(0, \quad 0, \quad \sqrt{2mgh\left(\frac{M}{2} + m\right)}\right)$$

Esercizio 2

2.1 $$E_r = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{r^3 - a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\rho & a < r < 2a \\ \dfrac{7a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\rho & 2a < r \end{cases}$$



2.2 Il flusso del campo elettrico attraverso un cubo tangente alla sfera esterna, di cui il quadrato specificato nella domanda è uno dei lati, è pari alla carica totale del sistema divisa per la costante dielettrica: $\dfrac{28\pi a^3\rho}{3\varepsilon_0}$. Il flusso attraverso il quadrato è 1/6 del flusso attraverso il cubo: $\dfrac{14\pi a^3\rho}{9\varepsilon_0}$.

2.3 $V(r) = \begin{cases} \dfrac{3\rho a^2}{2\varepsilon_0} & r < a \\ \dfrac{2\rho a^2}{\varepsilon_0} - \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} - \dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} & a < r < 2a \\ \dfrac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} & 2a < r \end{cases}$

2.4 La velocità ha solo componente tangenziale, che verifica $\frac{m_e V_\vartheta^2}{3a} = eE_r(r = 3a)$ da cui

$\frac{m_e V_\vartheta^2}{3a} = e\frac{7a^3}{3\varepsilon_0 9a^2}\rho$ e si ricava $V_\vartheta = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{7e\rho}{m_e \varepsilon_0}}$.