INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del **11 luglio 2011**

COGNOME ____________________ NOME ____________________________

NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 I pianeti Terra e Venere effettuano attorno al Sole delle orbite che possono essere approssimate con delle circonferenze, di raggio rispettivamente $R_T = 1.50x10^8\,km$ e $R_V = 1.08x10^8\,km$, giacenti nello stesso piano. I due pianeti hanno masse $M_T \approx 6.0x10^{24}\,kg$ e $M_V \approx 4.5x10^{24}\,kg$; è anche ben noto che la Terra effettua una rivoluzione in un anno.

1.1 Determinare la massa del Sole ed il periodo di rivoluzione di Venere.

1.2 Trascuriamo l'attrazione tra Terra e Venere e definiamo un sistema di coordinate *Oxyz* con origine nel Sole, in cui *z* è perpendicolare al piano delle orbite ed al tempo $t = 0$ Venere e Terra si trovano sull'asse *x* alla minima distanza fra loro. Calcolare in funzione del tempo la posizione di Venere $(x_V(t), \quad y_V(t), \quad 0)$ e Terra $(x_T(t), \quad y_T(t), \quad 0)$. Calcolare il primo istante t_1 in cui Venere e Terra sono alla massima distanza fra loro ed il successivo istante t_2 in cui saranno di nuovo alla minima distanza.

1.3 Calcolare, in funzione del tempo *t,* il modulo della forza di attrazione $(\vec{F}_{TV})$ fra Terra e Venere. Calcolare anche, al tempo $t = 0$, il valore numerico del rapporto fra il modulo di $\vec{F}_{TV}$ ed il modulo della forza che il Sole esercita su Venere.

1.4 Calcolare l'energia potenziale totale del sistema composto dal Sole e dai due pianeti al tempo $t=0$, ponendo nulla l'energia potenziale gravitazionale a distanza infinita.

Esercizio 2 Una sbarretta di materiale isolante, di lunghezza *L* e sezione trascurabile, è caricata uniformemente con una densità lineare di carica elettrica positiva λ. La sbarretta si trova fra i punti $A = (-L/2, \quad 0, \quad 0)$ e $B = (+L/2, \quad 0, \quad 0)$ di un sistema di coordinate *Oxyz*.

2.1 Calcolare il potenziale elettrico in un punto $P = (0, \quad y, \quad 0)$ generico sull'asse *y*.

$$\left[Nota: \int \frac{dw}{\sqrt{1+w^2}} = \ln\left| w + \sqrt{w^2+1} \right| \right]$$

2.2 Calcolare la velocità con cui un protone inizialmente lasciato libero da fermo nel punto $H = \left(0, \quad \frac{L}{2}, \quad 0\right)$ raggiunge il punto $K = \left(0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}L, \quad 0\right)$.

2.3 Calcolare il campo elettrico nel punto $P = (0, \quad y, \quad 0)$.

Dire se il campo elettrico per $0 < y << L$ è: i) $\propto 1/y$; ii) $\propto 1/y^2$; iii) $\propto \ln y$; iv) costante.

Dire se il campo elettrico per $y >> L$ è: i) $\propto 1/y$; ii) $\propto 1/y^2$; iii) $\propto \ln y$; iv) costante.

2.4 In questa domanda non è più presente il protone, ma al tempo $t = 0$ la sbarretta inizia a muoversi nella direzione positiva dell'asse *x* con una velocità costante di modulo V_o.

Calcolare la corrente elettrica attraverso una superficie sferica di raggio *L* e centro *O* in funzione del tempo *t*.

INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

FISICA GENERALE 1 - Prova scritta del **11 luglio 2011**

RISPOSTE

Esercizio 1.

1.1) Indichiamo con T_T e T_V i periodi di rivoluzione della Terra e di Venere, rispettivamente. La forza gravitazionale del Sole sulla Terra è pari alla massa della Terra per l'accelerazione centripeta: $M_T\left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 R_T = \frac{GM_S M_T}{R_T}$, per cui $M_S = \frac{4\pi^2}{GT_T^2}R_T^3 = 2.01x10^{30}\,kg$. Il periodo di rivoluzione di Venere ("anno venusiano") è $T_V = T_T\left(\frac{R_V}{R_T}\right)^{3/2} = 1{,}93x10^7\,s = 223\,giorni$

1.2) Indichiamo con ϑ_T e ϑ_V gli angoli rispetto all'asse *x* della Terra e di Venere, rispettivamente: $\vartheta_T = \frac{2\pi}{T_T}t$ e $\vartheta_V = \frac{2\pi}{T_V}t$. Si ha: $\begin{cases} x_T = R_T\cos\vartheta_T \\ y_T = R_T\sin\vartheta_T \end{cases}$ e $\begin{cases} x_V = R_V\cos\vartheta_V \\ y_V = R_V\sin\vartheta_V \end{cases}$. La minima distanza si ri-ottiene quando Venere ha effettuato un giro in più della Terra: $\vartheta_V = \vartheta_T + 2\pi$,

quindi $t_1 = \frac{T_T T_V}{T_T - T_V} = 4{,}95x10^7\,s = 573\,giorni$; la massima quando ha effettuato mezzo giro, quindi $t_2 = \frac{1}{2}\frac{T_T T_V}{T_T - T_V} = 2{,}47x10^7\,s = 286\,giorni$.

1.3) $$\left|\vec F_{TV}(t)\right| = \frac{GM_T M_V}{(x_T - x_V)^2 + (y_T - y_V)^2} = \frac{GM_T M_V}{R_T{}^2 + R_V{}^2 - 2R_T R_V\cos\left(2\pi\frac{T_T - T_V}{T_T T_V}t\right)} .$$

Poichè $\left|\vec F_{SV}(0)\right| = \frac{GM_S M_V}{R_V{}^2}$ si ha $\frac{\left|\vec F_{TV}(0)\right|}{\left|\vec F_{SV}(0)\right|} = \frac{M_T}{(R_T - R_V)^2}\frac{R_V^2}{M_S} = 2x10^{-5}$ che ben giustifica l'approssimazione secondo cui il moto di Venere è dovuto principalmente all'attrazione solare.

1.4) Al tempo *t=0* $U = -\frac{GM_S M_T}{R_T} - \frac{GM_S M_V}{R_V} - \frac{GM_T M_V}{R_T - R_V}$.

Esercizio 2

2.1 Il potenziale elettrico nel punto *P* dovuto alla carica infinitesima *dq* che si trova fra *x* e *x+dx* vale $\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2 + x^2}}$, per cui

$$V(y)=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+x^2}}=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-L/2y}^{L/2y}\frac{dw}{\sqrt{1+w^2}}=$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[\ln\left|w+\sqrt{w^2+1}\right|\right]_{-L/2y}^{+L/2y}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{+L+\sqrt{L^2+4y^2}}{-L+\sqrt{L^2+4y^2}}\right).$$

2.2 La velocità V_f con cui il protone (di massa m e carica q) raggiunge il punto H si ricava con la conservazione dell'energia: $qV(L)=qV(\sqrt{3}L)+\frac{mV_f^2}{2}$ da cui $V_f=\sqrt{\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_o m}\ln\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$.

2.3 Il campo elettrico nel punto P ha solo componente y e si può ottenere effettando un nuovo integrale, oppure dal potenziale calcolato precedentemente: $E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\lambda L}{\pi\varepsilon_o}\frac{1}{y\sqrt{L^2+4y^2}}$.

Il campo elettrico per $0<y<<L$ è i) $\propto 1/y$, in quanto si può approssimare con il campo di un filo rettilineo infinito uniformemente carico. Per $y>>L$ ii) $\propto 1/y^2$ in quanto si può approssimare con il campo di una carica puntiforme.

2.4 La corrente elettrica richiesta si calcola notando che la carica inizia ad attraversare la superficie sferica al tempo $\frac{L}{2V_o}$ e termina al tempo $\frac{3L}{2V_o}$, per cui: $i=\begin{cases}\lambda V_o & \text{se } \frac{L}{2V_o}<t<\frac{3L}{2V_o}\\ 0 & \text{se } 0<t<\frac{L}{2V_o} \; e \; \frac{3L}{2V_o}<t\end{cases}$.