FISICA GENERALE 1 per INGEGNERIA ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI
PROVA SCRITTA del 26 luglio 2010

COGNOME ____________________ NOME ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Su un binario rettilineo e orizzontale si trova un carrello di massa m in moto con velocità di modulo V_o . Sul binario si trova un secondo carrello, fermo, di massa 2m; questo carrello e' equipaggiato con un respingente schematizzabile come una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_o. I due carrelli si muovono con attriti trascurabili, si urtano tramite il respingente e nello stato finale avranno in generale due diverse velocità.

1.1 Dite se durante tutto il processo si conservano la quantità di moto e l'energia meccanica e calcolate le velocità finali dei due carrelli.

1.2 Durante l'interazione esiste un istante di tempo in cui i due carrelli hanno la stessa velocità. Utilizzando la legge di conservazione appropriata calcolate questa velocità comune..

1.3 Utilizzando le leggi di conservazione appropriate calcolate per quali valori di V_o i carrelli non vengono a contatto (=> il respingente non si comprime completamente).

1.4 Calcolate come varia la distanza fra i due carrelli in funzione del tempo, ipotizzando che i due carrelli non vengano a contatto. [Suggerimento: inserite un asse x diretto lungo il binario, chiamate x_1 e x_2 le posizioni dei due carrelli, scrivete la legge di Newton per entrambi e utilizzate la variabile $x = x_1 - x_2$, ...]

Esercizio 2 Un condensatore piano nel vuoto è composto da due armature circolari uguali di raggio a, poste a distanza d (d<<a) l'una dall'altra. Si utilizzi un sistema di coordinate Oxyz in cui l'asse z è perpendicolare alle armature e passa per i loro centri; la prima armatura ha potenziale V_o positivo e si trova sul piano z = d/2, mentre la seconda ha potenziale nullo e si trova sul piano z = –d/2.

2.1 Calcolare la densità superficiale di carica su ciascuna delle due armature.

2.2 Calcolare l'energia totale immagazzinata nel condensatore e la forza con cui le due armature si attraggono.

2.3 Effettuare e riportare i calcoli necessari per dire se il modulo del campo elettrico nel punto P = (R, 0, 0) , con R >>a : i) decresce come $1/R$, ii) decresce come $1/R^2$, iii) decresce come $1/R^3$, iv) è nullo .

2.4 In questa domanda le due piastre (e la carica su di esse) sono in rotazione antioraria attorno all'asse z con una frequenza f. Calcolare la corrente elettrica attraverso il rettangolo che ha i seguenti punti come vertici: A=(a/2,0,0), B=(2a,0,0), C=(2a,0,2d), D=(a/2,0,2d).

FISICA GENERALE 1 per INGEGNERIA ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI
PROVA SCRITTA del 26 luglio 2010
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Durante il processo la quantità di moto e l'energia meccanica si conservano. Chiamando V_1 e V_2 le velocità finali dei due carrelli, si ha:

$$\begin{cases} mV_0 = mV_1 + 2mV_2 \\ \frac{1}{2}mV_0^{\,2} = \frac{1}{2}mV_1^{\,2} + \frac{1}{2}2mV_2^{\,2} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} V_1 = -\frac{V_0}{3} \\ V_2 = +\frac{2V_0}{3} \end{cases}$$

1.2 Nel momento in cui i due carrelli hanno la stessa velocità, questa non può che essere la velocità del loro centro di massa, che si calcola utilizzando la legge di conservazione della quantità di moto: $V_{cm} = \dfrac{mV_0}{m+2m} = \dfrac{V_0}{3}$

1.3 La distanza minima $(d_{\min})$ fra i carrelli si raggiunge nel momento in cui i due carrelli hanno la stessa velocità (vedi risposta precedente) e si può calcolare utilizzando la legge di conservazione dell'energia meccanica:
$\frac{1}{2}mV_0^{\,2} = \frac{1}{2}mV_{cm}^{\,2} + \frac{1}{2}2mV_{cm}^{\,2} + \frac{1}{2}k(\ell_0 - d_{\min})^2$. Si ottiene
$d_{\min} = \ell_0 - V_0\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}$, per cui i carrelli non vengono a contatto se $V_0 < \ell_0\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}$.

1.4 Seguendo il suggerimento nel testo, si può scrivere $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(\ell_0 - x_2 + x_1) \\ 2m\ddot{x}_2 = +k(\ell_0 - x_2 + x_1) \end{cases}$

da cui $\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{k}{m}(\ell_0 - x_2 + x_1) \\ \ddot{x}_2 = +\dfrac{k}{2m}(\ell_0 - x_2 + x_1) \end{cases}$, $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \left(\dfrac{k}{2m} + \dfrac{k}{m}\right)(\ell_0 - x_2 + x_1)$ ed

infine $\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{3k}{2m}(\ell_0 - x) \\ x(0) = \ell_0 \\ \dot{x}(0) = -V_0 \end{cases}$ dove per scrivere le condizioni iniziali abbiamo

ipotizzato che il primo carrello colpisca il respingente al tempo t = 0. La soluzione è $x(t) = \ell_0 - V_0\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}t\right)$.

Esercizio 2

2.1 $\sigma = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{CV_0}{\pi a^2} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{d} = \varepsilon_0 E_{in}$

2.2 L'energia immagazzinata è $U = \frac{CV_0^{\ 2}}{2} = \frac{\pi a^2 \varepsilon_0 V_0^{\ 2}}{2d}$ **.** La forza su una armatura è pari alla carica su una armatura moltiplicata per il campo elettrico generato dalla carica sull'altra: $F_z = Q\frac{E_{in}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2}\left(\frac{V_0}{d}\right)^2$.

2.3 Nel punto P il campo elettrico generato dalla carica sull'armatura superiore ha modulo praticamente uguale a $E_1 \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + (d/2)^2\right)}$ con componente verticale pari a $E_{1z} = -\frac{d/2}{\sqrt{R^2 + (d/2)^2}}E_1$ ed orizzontale pari a $E_{1x} = +\frac{R}{\sqrt{R^2 + (d/2)^2}}E_1$**.**

Il campo elettrico generato dalla carica sull'armatura inferiore ha modulo $E_2 = E_1$**,** componente verticale pari a $E_{2z} = E_{1z} = -\frac{d/2}{\sqrt{R^2 + (d/2)^2}}E_1$ ed orizzontale

$E_{2x} = -E_{1x} = -\frac{R}{\sqrt{R^2 + (d/2)^2}}E_1$**.** Il campo in P è quindi verticale e vale

$$E_{Pz} = -\frac{d}{\sqrt{R^2 + (d/2)^2}}E_1 \underset{(R >> d)}{\approx} -\frac{d}{R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$, decrescendo come $1/R^3$.

2.4 In un tempo $T = \frac{1}{f}$ la carica che attraversa la superficie rettangolare è quella che si trova sull'armatura superiore nella corona circolare nella regione $a/2 < r < a$ (r è la distanza dall'asse z). Quindi $I = \frac{1}{T}\sigma\left(\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{4}\right) = f\,\frac{3\pi a^2}{4}\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}$**.**