FISICA per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2007/8
PROVA SCRITTA del 1 luglio 2008

COGNOME ____________________ NOME ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Due dischi omogenei di raggi $R_1 = 10\,\mathrm{cm}$ e $R_2 = 3/2\,R_1$ hanno la stessa densità superficiale di massa $\sigma = 0.1\,\mathrm{kg\,cm^{-2}}$ e possono ruotare senza attrito attorno allo stesso asse orizzontale. Inizialmente i due dischi non sono a contatto, il disco di raggio R_2 è fermo ed il disco di raggio R_1 sta ruotando con velocità angolare costante $\omega_0 = 10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. I due dischi sono portati a contatto, in modo che fra le loro superfici si eserciti un momento meccanico $\vec{\tau}$: si osserva che dopo un tempo molto lungo la velocità angolare dei due dischi è la stessa.

1.1 Dire quali delle seguenti quantità si conservano durante il moto: momento angolare di ognuno dei due dischi rispetto all'asse di rotazione, momento angolare totale rispetto all'asse di rotazione, energia meccanica totale, velocità dei centri di massa dei due dischi.

1.2 Utilizzando la (o le) quantità conservate determinate nel punto precedente si calcolino le velocità angolari finali dei due dischi.

1.3 Si calcoli la differenza di energia cinetica totale fra lo stato finale in cui entrambi i dischi hanno raggiunto la loro velocità finale e lo stato iniziale in cui si muove solo il disco di raggio R_1.

1.4 Si osserva sperimentalmente che la velocità angolare del disco di raggio R_1 varia nel tempo secondo la legge $\omega_1(t) = a + b\exp(-\gamma t)$, dove $\gamma = 0.5\,\mathrm{s^{-1}}$. Si determinino le costanti a e b ed il modulo del momento $|\vec{\tau}|$ in funzione del tempo.

Esercizio 2 Una sfera di raggio a è riempita con una densità uniforme di carica positiva ρ. Per le risposte si utilizzi un sistema di coordinate polari sferiche (r, θ, ϕ) con origine nel centro della sfera.

2.1 Si calcolino le componenti (E_r, E_θ, E_ϕ) del campo elettrico a distanza R dal centro della sfera, distinguendo i due casi $R < a$ ed $R > a$.

2.2 Si calcoli il potenziale elettrico nel punto $R = 0$ (centro della sfera) assumendo che il potenziale sia nullo all'infinito.

2.3 Si supponga ora di scavare un canale orizzontale (di diametro piccolissimo) passante per l'origine all'interno della distribuzione. Un elettrone viene lasciato libero da fermo all'istante $t = 0$ in un estremo del canale, in cui viaggia senza attrito. Con quale velocità passa per il centro della circonferenza ? E con quale velocità giunge nell'estremo opposto ?

2.4 Si determini il moto dell'elettrone in funzione del tempo per $t > 0$.

FISICA per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2007/8
PROVA SCRITTA del 1 luglio 2008 - RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 Si conservano il momento angolare totale del sistema (a causa dell'assenza di momenti esterni) e le velocità dei centri di massa dei due dischi, che sono sempre nulle perché i centri di massa stessi giacciono sugli assi di rotazione. L'energia meccanica non si conserva a causa del lavoro compiuto dalla forza di attrito fra i due dischi (interna al sistema).

1.2 Poiché il momento angolare totale si conserva si ha la relazione: $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = I_1\omega_0$.
Indicando con ω_f la velocità angolare finale comune dei due dischi abbiamo poi: $\omega_f(I_1 + I_2) = I_1\omega_0$,

da cui: $\omega_f = \dfrac{I_1}{(I_1+I_2)}\omega_0$. La masse ed i momenti di inerzia dei due dischi valgono:

$$M_1 = \sigma\pi R_1^2 \quad \Rightarrow I_1 = \frac{\sigma\pi R_1^4}{2}$$

$$M_2 = \sigma\pi R_2^2 \quad \Rightarrow I_2 = \frac{\sigma\pi R_2^4}{2} = \frac{\sigma\pi R_1^4}{2}\left(\frac{R_2^4}{R_1^4}\right) = I_1\left(\frac{R_2^4}{R_1^4}\right) = \frac{81}{16}I_1$$

da cui infine: $\omega_f = \dfrac{16}{97}\omega_0 = 1.65\ \text{rad s}^{-1}$

1.3 Energia cinetica iniziale: $K_{in} = K_{1,in} = \dfrac{1}{2}I_1\omega_0^2$

Energia cinetica finale:

$$K_f = K_{1,f} + K_{2,f} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\frac{I_1^2\omega_0^2}{(I_1+I_2)^2} = K_{1,in}\left(\frac{I_1}{I_1+I_2}\right) = \frac{16}{97}K_{1,in}$$

da cui: $\Delta K = K_f - K_{in} = -\dfrac{81}{97}K_{1,in} = -6.56\ \text{J}$

1.4 Per $t \to \infty$ la velocità angolare è ω_f; poiché il secondo termine dell'espressione di $\omega_1(t)$ si annulla per t grande si conclude che $a = \omega_f$.

Analogamente a $t = 0$ si ha: $\omega_1(0) = a + b = \omega_f + b = \omega_0 \quad \Rightarrow b = \omega_0 - \omega_f = \dfrac{81}{97}\omega_0$.

Utilizzando la seconda equazione cardinale della meccanica si ha (si noti che il momento è <u>interno</u> al sistema):

$$\tau = I_1\alpha_1 = I_1\frac{d\omega_1}{dt} = -\left(\frac{81}{97}\right)\omega_0\sigma\pi\frac{R_1^4}{2}\gamma\exp(-\gamma t) = 0.656\exp(-0.5t)\text{N}\cdot\text{m}$$ con t misurato in secondi.

Esercizio 2

2.1 Utilizzando la legge di Gauss si ottiene:

$$\vec{E} = E_r \hat{r} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & r < a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r > a \end{cases}$$

2.2 Applicando la definizione di energia potenziale si ha:

$$V(\infty) - V(0) = -V(0) = -\int_0^{+\infty} E_r dr = -\left(\int_0^a \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr\right) = -\left(\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}\right) = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

da cui $V(0) = \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$

2.3 Applichiamo il teorema delle forze vive al moto dell'elettrone, in cui lo stato finale e' quello in cui l'elettone passa per il centro della sfera

$$K_f - K_{in} = \frac{1}{2} m V_f^2 = |e|(V(0) - V(a)) = |e|\left(\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}\right) = |e|\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} \Rightarrow V_f = \sqrt{\frac{|e|\rho a^2}{3m\varepsilon_0}}.$$

La velocita' quando l'elettrone si trova nell'estremo opposto e' nulla.

2.4 Poiché la forza elettrostatica agente sull'elettrone all'interno della distribuzione sferica è proporzionale a *r*, il moto dell'elettrone è descritto dall'equazione:

$$m\ddot{r} = -\frac{|e|\rho}{3\varepsilon_0} r$$

la cui soluzione è un moto armonico di pulsazione: $\omega = \sqrt{\dfrac{|e|\rho}{3\varepsilon_0 m}}$. Tenendo conto delle condizioni iniziali: $r(0) = a; \quad \dot{r}(0) = 0$ si ricava infine: $r(t) = a\cos(\omega t)$.