FISICA per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2007/8
PROVA SCRITTA del 10 giugno 2008

COGNOME ____________________ NOME ____________________________
NOTA: questo foglio deve essere restituito NOTA: e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte.

Esercizio 1 Una carrucola, schematizzabile con un disco omogeneo di massa M = 10kg e raggio R = 50cm, e' appesa al soffitto e libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale privo di attrito. Sulla carrucola e' avvolta una fune inestensibile e di massa trascurabile, ad una estremita' della quale e' fissato un blocco di massa m = 5kg. Al tempo t = 0 il sistema e' fermo, con la fune in tensione, ed il blocco situato 50cm piu' in basso rispetto al centro della carrucola. Il sistema viene lasciato libero di muoversi: si osserva che la fune si srotola senza strisciare sulla carrucola mentre il blocco si abbassa. Si consideri il tempo t_f, in cui la carrucola ha effettusato un giro completo dal tempo t = 0.

1.1 Calcolare la velocita' del blocco al tempo t_f.
1.2 Calcolare i moduli ed indicare in un disegno la direzione ed il verso di tutte le forze che agiscono sulla sola carrucola per $0 < t < t_f$.
1.3 Calcolare il momento angolare (rispetto all'asse di rotazione della carrucola) del sistema composto dalla carrucola e dal blocco in funzione del tempo t ($0 < t < t_f$).
1.4 [difficile] Rispondere nuovamente alla domanda 1.1, nel caso in cui la fune avesse una massa per unita' di lunghezza pari a λ = 0.5kg/m ed una lunghezza totale (sommando la parte avvolta e quella non avvolta) pari a L = 10m.

Esercizio 2 Una superficie cilindrica, di altezza infinita e raggio a, e' uniformemente caricata con una densita' positiva di carica elettrica σ. Per le risposte si utilizzi un sistema di coordinate cilindrico con l'asse Z coincidente con l'asse della superficie cilindrica.

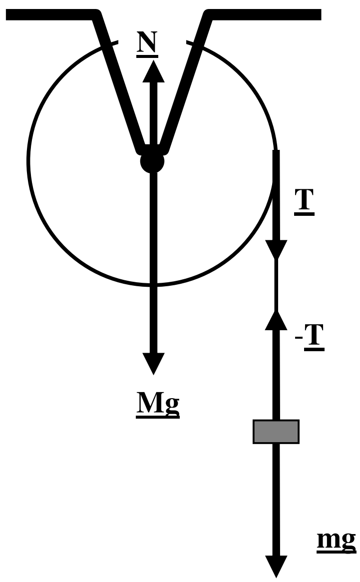
2.1 Si calcolino le componenti del campo elettrico a distanza R dall'asse, distinguendo i due casi $R < a$ ed $R > a$.
2.2 Si calcoli σ, sapendo che a = 5cm e che un elettrone, che si trovasse fermo in R=2a, Z=0 al tempo t = 0, raggiungerebbe la superficie R = a con una velocita' pari al 1% della velocita' della luce.
2.3 Si dica sotto quali ipotesi un elettrone che si trovi in R=2a, Z=0 al tempo t =0 puo' effettuare un moto circolare uniforme.
2.4 [difficile] Si dica sotto quali ipotesi un elettrone che si trovi in R=2a, Z=0 al tempo t =0 puo' effettuare un moto piano in cui le distanze minime e massime dall'asse valgono, rispettivamente, R = 2a e R = 4a.

FISICA per ELETTRONICA e TELECOMUNICAZIONI - A.A. 2007/8
PROVA SCRITTA del 10 giugno 2008 - RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 $V_f = \sqrt{\dfrac{4\pi Rmg}{m+M/2}} = 5.55 m/s$.

1.2 Si indichi con $\vec{a}$ l'accelerazione della massa appesa e con α l'accelerazione della carrucola.



La II eq. cardinale applicata alla carrucola fornisce: $\left|\vec{T}\right| R = \dfrac{MR^2}{2}\alpha = \dfrac{MR}{2}\left|\vec{a}\right|$.

La legge di Newton applicata alla massa fornisce: $m\left|\vec{a}\right| = mg - \left|\vec{T}\right|$.

La loro combinazione fornisce: $\left|\vec{T}\right| = \dfrac{mg}{1+2m/M} = 24.5N$

La I eq. cardinale applicata alla carrucola fornisce: $\left|\vec{N}\right| = Mg + \left|\vec{T}\right| = 122.5N$.

1.3 $L_z = mgRt$

1.4 $\frac{1}{2}mV_f^2 + \frac{1}{2}\lambda L V_f^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{V_f}{R}\right)^2 = mg2\pi R + (\lambda L)g(\pi+1)R$, da cui

$$V_f = \sqrt{\frac{2gR[2\pi m + \lambda L(1+\pi)]}{m+\lambda L + M/2}} = 5.8 m/s$$

Esercizio 2

2.1 L'unica componente non nulla del campo elettrico e' quella radiale:

$$E_R = \begin{cases} 0 & (R < a) \\ a\sigma / \varepsilon_o R & (R > a) \end{cases}.$$

2.2 $U(R') - U(R) = -\int_R^{R'} -e\vec{E} \bullet d\vec{l} = \frac{ae\sigma l}{\varepsilon_o} \ln\left(\frac{R'}{R}\right)$ [La forza e' verso l'asse, quindi le superfici ad energia potenziale maggiore sono piu' esterne.] Da cui:

$$\frac{ae\sigma l}{\varepsilon_o} \ln\left(\frac{2a}{a}\right) = \frac{1}{2} m_e V_f^{\,2} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{m_e \varepsilon_o V_f^{\,2}}{2ae \ln 2} \sim 6.5 nC/m^2$$

2.3 Occorre una velocita' con la sola componente tangenziale, di modulo: $|V_\phi| = \sqrt{\frac{ae\sigma}{m_e \varepsilon_o}}$.

Sostituendo il risultato di 2.2 si ottiene: $|V_\phi| = \frac{V_f}{\sqrt{2 \ln 2}} = 2.55x10^6 m/s$.

2.4 Nel moto si conservano l'energia ed il momento angolare rispetto all'asse Z. Poiche' il punto di partenza coincide con il punto di minima distanza, la velocita' non avra' componente radiale, ma dovra' avere una componente tangenziale. La velocita' non avra' componente assiale perche' il moto e' piano per ipotesi. Indichiamo con V_1 e V_1 i moduli delle velocita' nei punti di minima e di massima distanza: la legge della conservazione del momento angolare si scrive $2am_eV_1 = 4am_eV_2$, da cui $V_2 = V_1/2$. Scriviamo quindi la conservazione dell'energia: $U(2a) + \frac{1}{2} m_e V_1^{\,2} = U(4a) + \frac{1}{2} m_e V_2^{\,2}$ =>

$\frac{1}{2} m_e V_1^{\,2} - \frac{1}{2} m_e V_2^{\,2} = U(4a) - U(2a) = \frac{ae\sigma}{\varepsilon_o} \ln 2$. Utilizzo la relazione $V_2 = V_1/2$ ed il risultato della risposta 2.2: $\frac{1}{2} m_e V_1^{\,2} - \frac{1}{2} m_e \frac{V_1^{\,2}}{4} = \frac{ae\sigma}{\varepsilon_o} \ln 2 = \frac{m_e V_f^{\,2}}{2 \ln 2} \ln 2$, ottenendo infine: $V_1 = \frac{2V_f}{\sqrt{3}} = 3.5x10^6 m/s$.