

## Trasduttori

Con il termine “trasduttore” si indica un dispositivo in grado di convertire una grandezza fisica in un’altra, generalmente di natura diversa. L’utilità dell’impiego dei trasduttori nei sistemi di misura risiede nel fatto che, se non si è in grado di misurare direttamente una grandezza  $A$  (o non è conveniente o possibile farlo), ma è possibile convertire  $A$  in una diversa grandezza  $B$  agevolmente misurabile, misurando questa è possibile risalire al valore di  $A$  purché ovviamente sia noto, affidabile e riproducibile il processo di conversione di  $A$  in  $B$ .

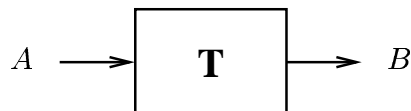


Figura 1 - Schematizzazione di un trasduttore (T) che converte una grandezza  $A$  in una grandezza  $B$ .

Ad esempio, per misurare una temperatura è possibile utilizzare un trasduttore resistivo, cioè un dispositivo la cui resistenza varia dipendentemente dalla temperatura alla quale il dispositivo si trova. Se è nota la relazione temperatura-resistenza, misurando questa è possibile risalire al valore della temperatura da misurare: si compie dunque una misura indiretta di temperatura, passando attraverso la misura di una resistenza.

Molto spesso la grandezza ottenuta come risultato della trasduzione è una grandezza elettrica: tensione, corrente, ma anche resistenza, capacità, induttanza; chi ha pertanto le competenze per operare con segnali elettrici, ossia di progettare e impiegare circuiti e sistemi di condizionamento, amplificazione e in generale trattamento dei segnali elettrici trova conveniente convertire in grandezze elettriche generiche grandezze fisiche, allo scopo di misurarle.

Il meccanismo di trasduzione, basato su uno specifico fenomeno fisico, comporta in ogni caso la conversione di una forma di energia in un’altra. Dunque per esempio un trasduttore piezoelettrico, che sollecitato mediante compressione genera cariche elettriche, realizza la conversione di energia meccanica (impiegata per la deformazione) in energia elettrica.

Alcuni trasduttori non richiedono per funzionare alcuna forma di energia che non sia quella fornita dalla grandezza con cui vengono sollecitati (la deformazione è l’unico mezzo con il quale si fornisce energia a un trasduttore piezoelettrico), mentre altri richiedono una sorgente di energia *esterna* per poter funzionare. Questa differenza di comportamento consente di distinguere tra *trasduttori passivi* e *trasduttori attivi*: i primi sottraggono energia alla grandezza da convertire e misurare (o meglio al sistema sul quale la misura viene effettuata), mentre gli altri funzionano grazie all’apporto di energia di una sorgente esterna. In realtà c’è anche un minimo assorbimento di energia dal misurando; tale energia è però decisamente trascurabile rispetto a quella che è richiesta per il funzionamento del trasduttore.

Il vantaggio derivante dall’impiego dei trasduttori attivi deriva proprio dal fatto che, essendo minima la quantità di energia assorbita dal sistema sotto misura, risulta molto contenuto

*l'effetto caricante*, che per un trasduttore può essere visto come l'alterazione della grandezza da convertire come effetto della conversione stessa.

I trasduttori possono essere classificati in base alla grandezza che permettono di convertire: si parlerà allora di trasduttori di posizione, velocità, accelerazione, temperatura, pressione, umidità e così via.

Un'altra possibile classificazione può essere fatta sulla base del fenomeno o del principio che rende possibile la trasduzione e quindi si distingueranno trasduttori a effetto piezoelettrico, a effetto Hall, trasduttori capacitivi, resistivi, induttivi, elettromagnetici, eccetera.

Nella scelta di un trasduttore (allo scopo di impiegarlo effettivamente) è molto importante valutare le sue caratteristiche, sia quelle più direttamente connesse al meccanismo di conversione impiegato, sia quelle, apparentemente secondarie, che però può essere indispensabile considerare in determinate condizioni operative. Alcune di queste caratteristiche sono elencate di seguito:

**Sensibilità:** esprime la capacità di fornire una risposta “grande”, anche con una sollecitazione “piccola”; più rigorosamente, per il trasduttore schematizzato in Figura 1, la sensibilità è definita come

$$S = \frac{dB}{dA}.$$

È forse superfluo osservare che, se la relazione tra  $A$  e  $B$  non è lineare, allora la sensibilità del relativo trasduttore risulta non costante e dipendente dal punto di lavoro.

**Range:** rappresenta l'intervallo di valori che deve assumere la grandezza in ingresso, perché si abbia un corretto funzionamento del trasduttore.

**Accuratezza:** esprime l'entità dell'errore (o dell'incertezza) che ci si può aspettare nella conversione.

**Linearità, distorsione:** è una misura del grado di non linearità della relazione ingresso-uscita del trasduttore.

**Proprietà fisiche:** dimensioni, peso, tensione di (eventuale) alimentazione richiesta, temperatura di funzionamento e altre, che incidono sulle possibilità di impiego e dipendono ovviamente dalla natura e dalla struttura del trasduttore.

**Effetto caricante:** come già anticipato misura l'effetto di perturbazione del trasduttore sulla grandezza oggetto della conversione.

**Risposta in frequenza:** la risposta del trasduttore lineare può non essere indipendente dalla frequenza della sollecitazione (o più in generale dalla sua velocità di variazione); la risposta in frequenza rende conto di questo tipo di comportamento.

**Resistenza d'uscita:** se il trasduttore produce una grandezza elettrica (tensione o corrente) come effetto della conversione, si comporta come un generatore non necessariamente ideale; tale caratteristica può essere espressa dalla resistenza d'uscita del generatore equivalente, che dipende dalla natura del trasduttore.

**Condizioni ambientali:** capacità di funzionare correttamente anche in condizioni ambientali particolarmente critiche, per la presenza di polvere, umidità, vibrazioni, radiazioni elettromagnetiche o ionizzanti, ecc.

**Necessità di calibrazione:** specifica la necessità di effettuare operazioni di verifica del corretto funzionamento e la frequenza con la quale devono essere svolte.

## Trasduttori resistivi

### Trasduttori potenziometrici

Un trasduttore potenziometrico è realizzato, in linea di principio, con un avvolgimento di filo conduttore intorno a un supporto cilindrico. Un contatto mobile, scorrevole lungo l'avvolgimento, consente di misurare tra il contatto stesso e una delle estremità dell'avvolgimento una resistenza che varia (pressoché) linearmente con la posizione del contatto mobile (Figura 2). Dunque il dispositivo è, per costituzione, un trasduttore di posizione. Se realizzato su supporto toroidale, il dispositivo permette di rilevare spostamenti angolari.

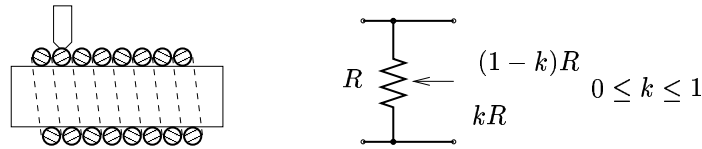


Figura 2 - Schematizzazione di un trasduttore potenziometrico.

È evidente che, data la sezione finita del filo di cui il trasduttore è costituito, solo idealmente la caratteristica posizione-resistenza sarà lineare; nella realtà essa avrà andamento a gradini e quindi la conversione inevitabilmente sarà affetta da una sorta di “errore di quantizzazione”. Trasduttori realizzati a film metallico (invece che a filo) o mediante plastiche conduttive esibiscono invece un comportamento molto più lineare.

Un inconveniente tipico di questo tipo di trasduttori è conseguenza della necessità di un contatto strisciante tra il terminale mobile e il filo: l'usura che consegue all'utilizzo del dispositivo ne limita la durata.

Il fatto che il dispositivo si presenti come la serie di due resistenze ne suggerisce l'impiego come partitore resistivo di una tensione  $E$  di alimentazione (Figura 3(a)). Ricorrendo a due tensioni di alimentazione, simmetriche rispetto a un comune riferimento, è possibile rilevare l'entità e il verso dello spostamento rispetto a una posizione “di zero” mediante una tensione (misurata dal voltmetro in Figura 3(b)) il cui segno fornisce appunto il verso dello spostamento.

Un'altra ragione che limita la linearità del dispositivo deriva dalla necessità di misurare la tensione prodotta dal partitore, se in questa misura non è trascurabile l'effetto caricante del voltmetro (o più in generale la resistenza d'ingresso del circuito al quale la tensione d'uscita del partitore è inviata).

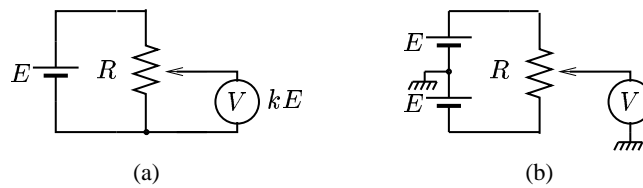


Figura 3 - Il trasduttore potenziometrico impiegato come partitore di tensione.

Modellando lo strumento con la propria resistenza interna  $R_{in}$  si ottiene, per diversi valori del rapporto  $R/R_{in}$ , l'andamento della caratteristica posizione-tensione riportato in Figura 4. Si osserva uno scostamento tra la risposta ideale ( $R_{in} \rightarrow \infty$ ) e quella reale che risulta negativo per qualsiasi valore di  $k$  ad eccezione degli estremi ( $k = 0, k = 1$ ), dove la differenza è nulla. È possibile dimostrare che lo scostamento tra il comportamento ideale e quello effettivo (per  $R_{in} < \infty$ ) risulta massimo - in valore assoluto - per  $k = 2/3$ . Lo scostamento (o errore) relativo risulta invece massimo - ancora in valore assoluto - per  $k = 0.5$ .

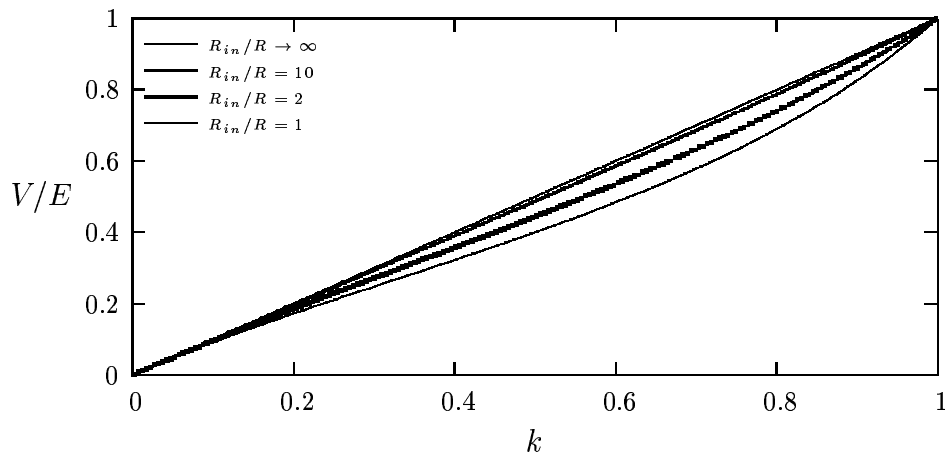


Figura 4 - Andamento del rapporto tra tensione misurata  $V$  e tensione di alimentazione  $E$  in un trasduttore potenziometrico di posizione in funzione della posizione del contatto mobile ( $k = x/x_{max}$ ), per diversi valori del rapporto tra la resistenza interna dello strumento di misura  $R_{in}$  e la resistenza del trasduttore  $R$ .

I dispositivi in commercio hanno dimensioni tali da consentire di rilevare spostamenti tipicamente compresi tra pochi centimetri e qualche decimetro. I valori di resistenza vanno dalle centinaia di ohm al kiloohm.

### Trasduttori resistivi di temperatura

Come è noto, la resistività di un materiale è generalmente influenzata dalla temperatura, in misura dipendente dalla natura del materiale stesso. Dunque la resistenza di un oggetto di

materiale e forma opportuna dipende in genere dalla temperatura ed esso può allora essere utilizzato come trasduttore di temperatura.

I trasduttori resistivi di temperatura vengono classificati in due grandi categorie, dipendentemente dal segno (positivo o negativo) del coefficiente termico, cioè a seconda del fatto che la resistività del materiale aumenti o diminuisca con la temperatura. Si hanno così

- i PTC (positive temperature coefficient), in cui la resistività aumenta con la temperatura; sono generalmente basati sull'impiego di metalli come il Platino, ma anche il Nichel e il Rame;
- gli NTC (negative temperature coefficient), in cui la resistività diminuisce con la temperatura; sono realizzati con ossidi di Manganese, Nichel, Cobalto, Rame, Ferro, Titanio, o con materiali semiconduttori.

### PTC:

La relazione temperatura-resistenza in un PTC (anche detto RTD, da *Resistance Temperature Detector*) può essere considerata lineare, con buona approssimazione, su un intervallo di temperature fino a poche centinaia di gradi centigradi ed è in questo caso esprimibile come

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

in cui  $R_0$  rappresenta la resistenza del dispositivo alla temperatura  $T_0$  e  $\alpha$  è il citato coefficiente termico. Un esempio di dispositivo di questa categoria è la Pt 100, che deve il suo nome al fatto di essere realizzata in Platino e di avere valore nominale, alla temperatura  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ , di  $100\ \Omega$ ; il coefficiente termico vale  $\alpha = 0.00385^\circ\text{C}^{-1}$

Se l'impiego del dispositivo deve essere esteso a temperature maggiori, o se si è interessati a un'accuratezza maggiore di quella consentita dall'approssimazione lineare, è possibile fare uso della relazione di Callendar e Van Dusen

$$R(T) = R_0 \left\{ 1 + \alpha \left[ T + \delta \left( 1 - \frac{T}{100} \right) \frac{T}{100} + \beta \left( 1 - \frac{T}{100} \right) \left( \frac{T}{100} \right)^3 \right] \right\}$$

riscrivibile anche nella forma

$$R(T) = R_0[1 + AT + BT^2 - (100CT^3 + CT^4)]$$

nella quale si fa ricorso a un'approssimazione polinomiale del quarto ordine per la descrizione analitica del legame resistenza-temperatura.

Nel caso del Platino (Pt 100) si ha  $R_0 = 100\ \Omega$ ,  $\alpha = 0.00385^\circ\text{C}^{-1}$  (come per l'approssimazione lineare),  $\delta = 1.499$ , mentre il coefficiente  $\beta$  (detto costante di Van Dusen) è nullo per temperature inferiori a  $0^\circ\text{C}$  e vale  $\beta = 0.10863$  per  $T > 0^\circ\text{C}$ . In Figura 5 è riportato l'andamento della

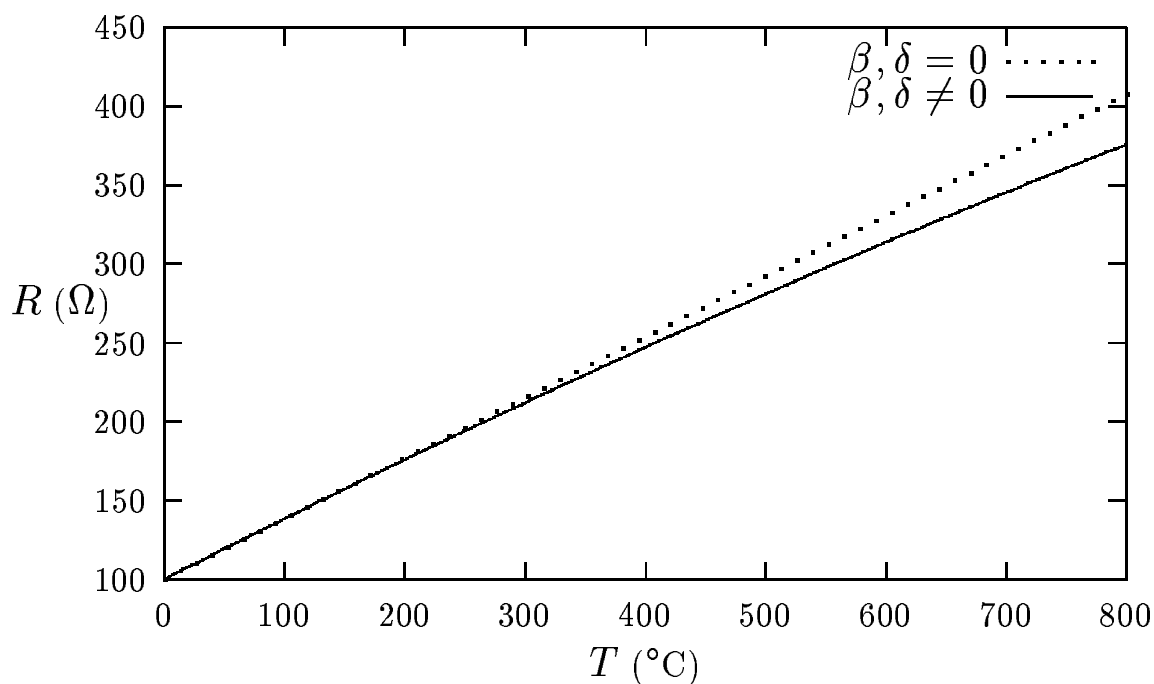


Figura 5 - Confronto tra l'andamento della relazione resistenza-temperatura per un trasduttore PTC secondo la relazione di Callendar e Van Dusen (tratto continuo) e nel caso di approssimazione lineare (curva a punti).

suddetta caratteristica  $R$ - $T$  nel caso teorico ( $\beta = 0.10863, \delta = 1.499$ ) e per approssimazione lineare ( $\beta, \delta = 0$ ).

La Pt 100, le cui caratteristiche principali sono già state citate, costituisce un tipo molto diffuso di trasduttore resistivo di temperatura (a coefficiente termico positivo). Esso viene realizzato a filo avvolto o come film sottile (su supporto plastico o ceramico) e si presenta come un piccolo cilindro del diametro di pochi millimetri e della lunghezza di circa 1 cm (generalmente ricoperto da uno strato di materiale ceramico, per accrescerne la robustezza meccanica) o in forma di sottile lastrina, delle dimensioni (lunghezza e larghezza) di pochi millimetri. L'eventuale presenza del rivestimento ne rallenta generalmente la risposta, i cui tempi tipici sono dell'ordine del secondo. Il costo del dispositivo è generalmente inferiore alla decina di Euro.

Un trasduttore tipo Pt 100 viene generalmente impiegato pilotandolo con un generatore di corrente e scegliendo il valore di questa in modo da contenere quanto più possibile il riscaldamento dovuto a effetto Joule. La grandezza misurata è la tensione sul trasduttore, le cui variazioni risultano (in prima approssimazione) lineari con le variazioni della temperatura di lavoro. Altri circuiti di misura possono comprendere convertitori tensione-corrente o ponti di misura. Con questo tipo di dispositivo si riescono effettuare misure con l'accuratezza di pochi gradi centigradi sull'intero intervallo di valori  $-200^{\circ}\text{C} \div 800^{\circ}\text{C}$ ; l'accuratezza è migliore

su intervalli di temperatura meno ampi. Le misure che impiegano PTC sono caratterizzate da un'ottima ripetibilità, in quanto la stabilità dei dispositivi è migliore di  $0.1^\circ\text{C}/\text{anno}$ . Data la diffusione di questo tipo di sensori, esistono in commercio multimetri che, se collegati a un trasduttore Pt 100, forniscono direttamente sul display il valore della temperatura misurata.

Oltre a trasduttori Pt 100 vengono impiegati anche trasduttori in Platino Pt 1000, Pt 200 (che si differenziano per il diverso valore della resistenza alla temperatura di riferimento) e trasduttori in Rame (Cu 100, Cu 50).

### NTC:

Negli NTC (detti anche termistori) la relazione resistenza-temperatura ha invece derivata negativa e questi dispositivi hanno un comportamento fortemente non lineare.

La caratteristica di trasferimento può essere espressa nella forma

$$\ln(R) = a_0 + \frac{a_1}{T} + \frac{a_2}{T^2} + \frac{a_3}{T^3}$$

oppure come

$$R = R_0 \exp \left[ \beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

con  $T$  che rappresenta la temperatura assoluta. (È facile ottenere la seconda dalla prima, trascurando in questa i termini  $a_2$  e  $a_3$ .) La relazione inversa è generalmente ben approssimata da espressioni polinomiali del tipo

$$\frac{1}{T} = a + b[\ln(R)] + c[\ln(R)]^2 + d[\ln(R)]^3$$

In Figura 6 è riportato l'andamento di una tipica caratteristica  $R$ - $T$  per un trasduttore NTC.

Il costo di questi dispositivi è generalmente inferiore (anche di un ordine di grandezza) a quello dei PTC, mentre il principale inconveniente risulta essere la non linearità. Per contro, almeno in opportune regioni della caratteristica, la sensibilità è molto elevata.

Una linearizzazione (locale) della caratteristica del dispositivo può essere ottenuta disponendo in parallelo ad esso una resistenza di valore opportuno, il cui comportamento non sia influenzato dalla temperatura. In Figura 7 è riportato l'andamento della resistenza del parallelo con la temperatura, confrontato con la caratteristica  $R$ - $T$  del termistore (e sé stante). Nel caso in questione si ottiene una buona linearizzazione nell'intervallo di temperature intorno a 270 K.

I principali pregi degli NTC sono le ridotte dimensioni (anche pochi millimetri), l'elevata sensibilità (anche due ordini di grandezza superiore a quella dei PTC), l'elevata accuratezza (migliore del decimo di grado centigrado); si tratta inoltre di dispositivi più veloci rispetto agli RTD. La stabilità a lungo termine e la ripetibilità non sono generalmente migliori rispetto ai PTC. Anche nell'utilizzo di questi dispositivi è necessario limitare la corrente che li attraversa, per minimizzare l'autoriscaldamento.

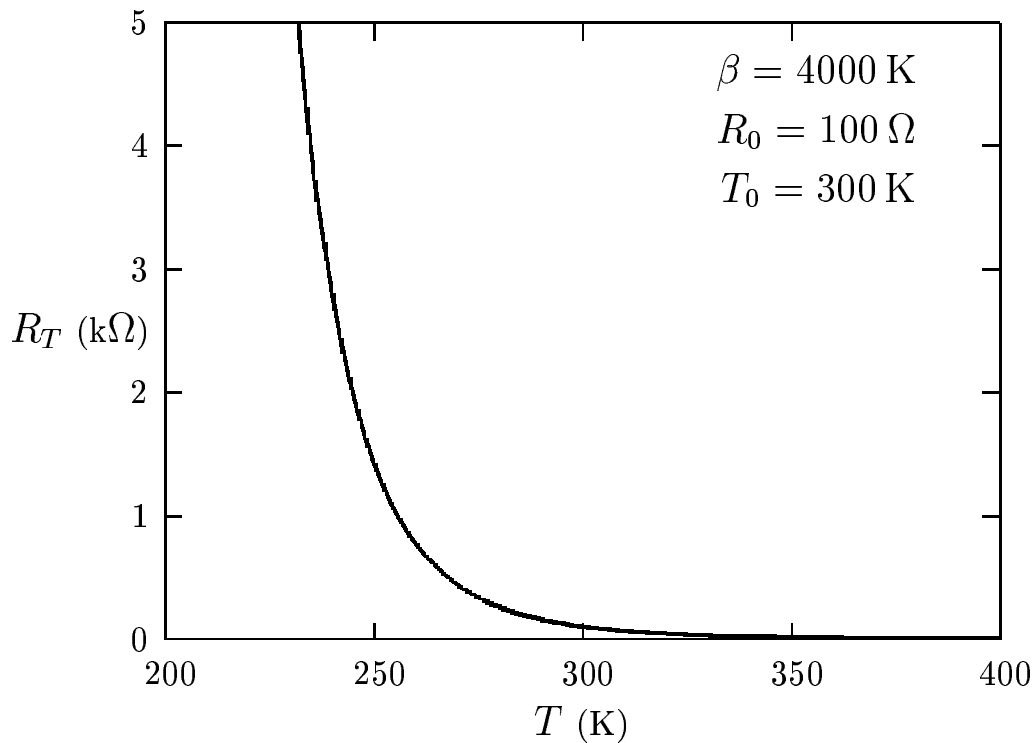


Figura 6 - Andamento della caratteristica resistenza-temperatura per un trasduttore NTC.

## Sensori di temperatura a stato solido

Le tecnologie attuali consentono la realizzazione di sensori di temperatura a semiconduttori. Un'importante conseguenza di questo fatto è la possibilità di realizzare, con il medesimo processo e sulla stessa porzione di materiale semiconduttore, sia il sensore, sia i relativi circuiti di pilotaggio e di estrazione dei segnali. In questo modo la parte sensibile del dispositivo (cioè il sensore vero e proprio) e "l'elettronica" necessaria per il suo impiego costituiscono un insieme di dimensioni molto contenute, con indubbi vantaggi sia in termini di ingombro, sia per il fatto che collegamenti di lunghezza più contenuta (tra sensore e circuiteria elettronica) rendono in generale il dispositivo più immune a disturbi elettrici provenienti dall'ambiente circostante.

### Sensori a giunzione *p-n*

Il più semplice un sensore di temperatura a semiconduttori è costituito da una giunzione *p-n*. È noto infatti che la tensione ai capi di una giunzione polarizzata a corrente costante diminuisce all'aumentare della temperatura in modo pressoché lineare con derivata che, per il Silicio, vale qualche  $mV/$ grado centigrado (ed è per quanto detto negativa).

La sostanziale linearità del comportamento si estende, in basso, fino a poche decine di



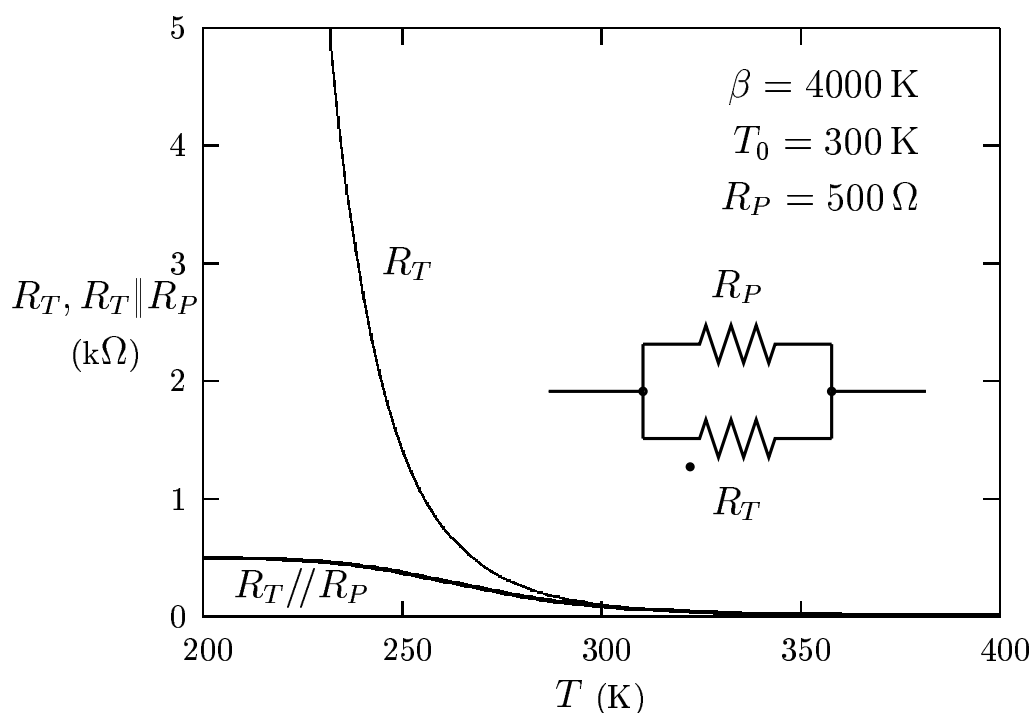


Figura 7 - Linearizzazione della caratteristica  $R$ - $T$  di un NTC mediante collegamento in parallelo a una resistenza costante ( $R_P$ ).

Kelvin; la pendenza (cioè la sensibilità del dispositivo), dipende ovviamente dal materiale con cui la giunzione è realizzata, ma è sempre dell'ordine di grandezza detto.

In Figura 8 è riportato l'andamento della tensione con la temperatura per una giunzione in Silicio appositamente realizzata per essere impiegata come sensore di temperatura. I valori indicati sono quelli forniti dal costruttore e riferiti alla corrente di polarizzazione di  $10 \mu\text{A}$ . È possibile osservare che per temperature al di sotto di poche decine di kelvin si ha un evidente scostamento del comportamento del sensore dal funzionamento lineare. La pendenza nella zona lineare è di circa  $-2 \text{ mV/K}$ .

La curva riportata è stata ottenuta riportando su diagramma la tabella di calibrazione, che accompagna il dispositivo al momento dell'acquisto, e che riporta, per un determinato valore di corrente di polarizzazione ( $10 \mu\text{A}$  per il dispositivo in questione), la tensione ai capi della giunzione in corrispondenza di valori della temperatura di funzionamento compresi nel range di possibile impiego e con il passo di (generalmente)  $1 \text{ K}$ .

Il dispositivo viene quindi generalmente utilizzato polarizzandolo alla corrente indicata dal costruttore e leggendo la tensione ai suoi capi; la temperatura viene valutata, impiegando la tabella di calibrazione, mediante interpolazione tra i valori di temperatura corrispondenti alle tensioni più vicine (a cavallo) del valore di tensione misurato.

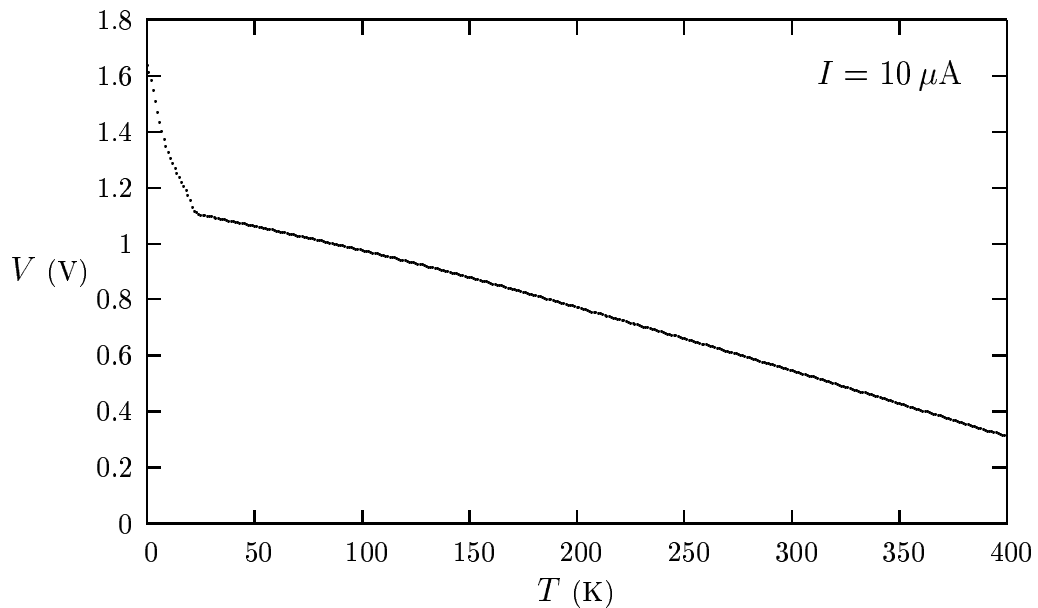


Figura 8

Dispositivi di questo genere, dunque specificamente realizzati e calibrati per essere impiegati come sensori di temperatura hanno un costo che va da alcune centinaia di Euro (se calibrati “in lotti” e dunque corredati di curva di calibrazione “tipica”) al migliaio di Euro (singolarmente calibrati).

Il campo di temperature che riescono a coprire è limitato superiormente dal fatto che dispositivi a semiconduttore lavorano correttamente solo fino a temperature generalmente intorno al centinaio di gradi centigradi. L’accuratezza tipica è di 1 K su tutto il range di misura, e circa un ordine di grandezza migliore tra 0 e 100 K.

### Sensori costituiti da circuiti integrati

Un altro esempio di trasduttore di temperatura a semiconduttore, costituito però da un circuito più complesso di una semplice giunzione  $p-n$ , è descritto di seguito.

Nel circuito schematizzato in Figura 9(a) la rete di controllo pilota i due transistor in modo che essi lavorino in zona attiva diretta e che le rispettive correnti di collettore stiano fra loro in un rapporto noto  $I_{C1} = k_1 I_{C2}$ ; nell’ipotesi di guadagno in corrente di valore adeguato, lo stesso rapporto esiste, praticamente, tra le correnti di emettitore, per cui si può assumere  $I_{E1} \simeq I_{C1} = k_1 I_{C2} \simeq k_1 I_{E2}$ .

Dalle ipotesi fatte (considerando inoltre trascurabile il contributo alla corrente dovuto alla

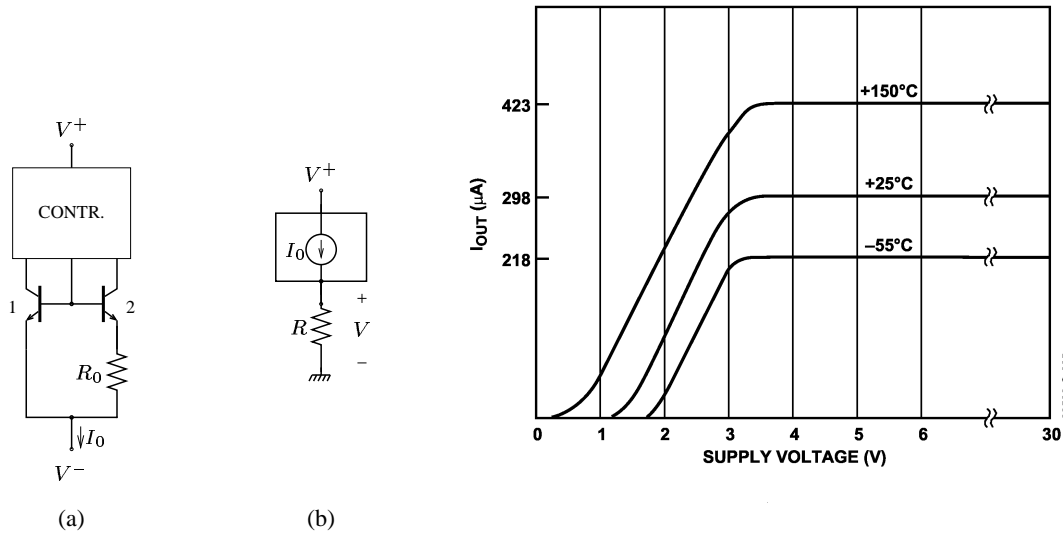


Figura 9 - Schematizzazione (a) di un trasduttore integrato di temperatura e (b) sua rappresentazione come generatore di corrente; (c) caratteristiche corrente-tensione del circuito integrato AD 590 (dal sito web [www.analog.com](http://www.analog.com)).

giunzione polarizzata inversamente ( $V_{CB} \ll 0$ ) segue

$$I_{C1} = \alpha_1 I_{Es1} e^{\frac{V_{BE1}}{\eta V_T}}$$

$$I_{C2} = \alpha_2 I_{Es2} e^{\frac{V_{BE2}}{\eta V_T}}$$

e il rapporto tra le due equazioni fornisce:

$$k_1 = \frac{I_{C1}}{I_{C2}} = \frac{\alpha_1 I_{Es1}}{\alpha_2 I_{Es2}} e^{\frac{V_{BE1} - V_{BE2}}{\eta V_T}}$$

Essendo però  $V_{BE1} - V_{BE2} = R_0 I_{E2} \simeq R_0 I_{C2}$  e ricordando l'espressione di  $V_T$ , segue

$$R_0 I_{C2} = V_{BE1} - V_{BE2} = \eta \frac{k_B T}{q} \ln \left( k_1 \frac{\alpha_2 I_{Es2}}{\alpha_1 I_{Es1}} \right)$$

in cui  $k_B$  rappresenta la costante di Boltzmann e  $q$  la carica elementare.

Pertanto la corrente che scorre attraverso il terminale inferiore del circuito

$$I_0 = I_{E1} + I_{E2} \simeq I_{C1} + I_{C2} = (1 + k_1) I_{C2} = (1 + k_1) \eta \frac{k_B T}{q R_0} \ln \left( k_1 \frac{\alpha_2 I_{Es2}}{\alpha_1 I_{Es1}} \right) = k T$$

risulta proporzionale alla temperatura (assoluta!) di lavoro del dispositivo:  $I_0 = kT$ . Per il circuito AD 590, prodotto da Analog Devices, si ha, per il coefficiente di proporzionalità  $k = 1 \mu\text{A}/\text{K}$ . Il dispositivo si comporta così come un generatore di corrente controllato dalla temperatura (Figura 9(b)).

Nella realtà la struttura del circuito è molto più complessa, allo scopo di ottenere caratteristiche corrente-tensione quanto più possibile orizzontali, come quelle cioè di un generatore di corrente ideale.

Le caratteristiche corrente-tensione fornite dal costruttore (Figura 9(c)) evidenziano questo tipo di comportamento, ma solo per tensioni ai capi del dispositivo superiori a circa 4 V, mentre per tensioni inferiori la corrente erogata dipende sensibilmente dalla tensione; ciò è dovuto al fatto che alimentando il circuito con tensione inferiore a 4 V non sarebbe garantito il funzionamento dei due transistor in zona attiva diretta e quindi non sarebbero verificate tutte le ipotesi formulate precedentemente, con la conseguente perdita di validità dei risultati ottenuti. Il costruttore indica inoltre 30 V come massimo valore di tensione applicabile al dispositivo.

L'impiego più semplice del dispositivo è quello schematizzato in Figura 9(b): la corrente prodotta viene fatta scorrere attraverso una resistenza  $R$  (esterna al dispositivo stesso): la tensione ai capi di  $R$  fornisce una misura della temperatura di lavoro. In questa configurazione la tensione di alimentazione  $V^+$  deve essere scelta di valore adeguato a garantire che, alla più alta temperatura di funzionamento prevista per la specifica applicazione (cui corrisponde la massima corrente erogata) la tensione sulla resistenza sia tale da garantire che sul trasduttore cada una tensione non inferiore ai 4 V indicati dal costruttore.

L'impiego di un convertitore corrente-tensione (Figura 10) rende la tensione di trasduttore indipendente dalla caduta sulla resistenza, semplificando la progettazione del circuito di conversione. Nel circuito mostrato, se la sensibilità del dispositivo è  $k = 1 \mu\text{A}/\text{K}$ , scegliendo  $R = 10\text{k}\Omega$  si ottiene che la tensione d'uscita, espressa in decine millivolt, corrisponde alla temperatura espressa il kelvin.

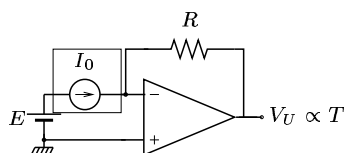


Figura 10 - Impiego del trasduttore integrato di temperatura con convertitore corrente-tensione.

L'impiego contemporaneo di  $N$  trasduttori del tipo AD 590 permette di misurare la media aritmetica o la temperatura minima tra le  $N$  temperature di lavoro dei singoli dispositivi, o di realizzare misure differenziali di temperatura<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>v. <http://www.analog.com>.

## Termocoppie

Le termocoppie costituiscono il sistema di misura della temperatura di più diffuso impiego, in particolare in ambito industriale e per applicazioni ad alte temperature, grazie al loro costo molto contenuto, alla loro versatilità e alle modalità di impiego relativamente semplici.

Il principio che sta alla base del funzionamento di questi dispositivi è il cosiddetto *Effetto Seebeck*, scoperto dal fisico estone Thomas Seebeck intorno al 1820, per il quale *ai capi di un conduttore metallico, sottoposto a un gradiente di temperatura, si genera una differenza di potenziale legata al salto termico tra le estremità e al particolare metallo utilizzato.*

Conseguenza di questo fenomeno è che *quando due fili di metalli diversi sono collegati fra loro ad una estremità, formando così una giunzione ( $J_1$ ), e quest'ultima viene portata a temperatura  $T_1$ , diversa da quella ( $T_2$ ) delle estremità libere dei due fili, si genera tra queste una differenza di potenziale, legata sia alla differenza di temperatura  $T_1 - T_2$ , sia alla natura del materiale di cui sono costituiti i fili (Figura 11a).*

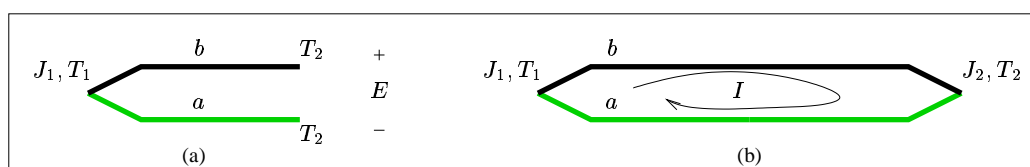


Figura 11 - Schematizzazione di una termocoppia

Se invece i due fili sono collegati fra loro a entrambe le estremità (Figura 11b), allora una differenza tra le temperature delle due giunzioni  $J_1$  e  $J_2$  così ottenute è causa di una corrente che scorre attraverso i due fili (effetto Peltier).

Poiché la tensione (o la corrente) sono generate dalla differenza di temperatura tra le due giunzioni (o tra l'unica giunzione e le estremità libere), il dispositivo può essere impiegato, in linea di principio per misurare la *differenza di temperatura* tra un corpo e un altro, mettendo a contatto con ciascuno di essi una delle due giunzioni della termocoppia.

Nella pratica, per misurare la temperatura di un corpo a contatto con una delle giunzioni, è necessario conoscere la temperatura dell'altra giunzione, che assumerà il ruolo di temperatura di riferimento. Si parlerà quindi di *giunzione di riferimento* (o giunzione “fredda”) per la giunzione mantenuta alla temperatura di riferimento e di *giunzione di misura* (o giunzione “calda”) per l'altra giunzione, ossia quella portata a contatto del corpo di cui si vuole misurare la temperatura<sup>2</sup>.

Nelle applicazioni di interesse pratico vengono impiegate termocoppie costituite da diversi tipi di metalli (o leghe metalliche); esse, classificate mediante una lettera (B, E, J, ecc.) diffe-

---

<sup>2</sup>L'impiego del termine “calda” per la giunzione di misura deriva dal fatto che le termocoppie sono spesso (ma non esclusivamente) utilizzate per misurare temperature superiori a quella ambiente (che invece costituisce generalmente la temperatura di riferimento), per cui la giunzione di misura si trova a temperatura superiore a quella della giunzione di riferimento.

riscono fra loro per la diversa relazione tra tensione generata e differenza di temperatura, per il costo, la maggiore o minore linearità, l'accuratezza ottenibile e anche per il diverso *range* di temperatura in cui possono essere utilizzate.

In Tabella 1 sono elencati i principali tipi di termocoppia con l'indicazione, per ciascuna, dei materiali di cui è costituita e dell'intervallo di temperature di impiego.

tipo	composizione		temperature (°C)
B	Pt-30% Rh	Pt-6% Rh	0 ÷ 1820
E	Ni-Cr	Cu-Ni	-270 ÷ 1000
J	Fe	Cu-Ni	-210 ÷ 1200
K	Ni-Cr	Ni-Al	-270 ÷ 1372
N	Ni-Cr-Si	Ni-Si-Mg	-270 ÷ 1300
R	Pt-13% Rh	Pt	-50 ÷ 1768
S	Pt-10% Rh	Pt	-50 ÷ 1768
T	Cu	Cu-Ni	-270 ÷ 400

Tabella 1 - Classificazione delle termocoppie e principali caratteristiche (fonte: NIST).

Le termocoppie di tipo R, S e B, realizzate con platino e rodio, sono dette “termocoppie a metalli nobili”; esse si caratterizzano per il costo più elevato rispetto ad altri tipi, ma anche per la maggiore stabilità del comportamento, cui consegue una maggiore accuratezza; per questa ragione vengono utilizzate per la calibrazione degli altri tipi di termocoppia. Esse hanno inoltre una temperatura massima di impiego superiore alle altre famiglie.

Poiché la tensione generata dipende fortemente dal tipo di materiale di cui i fili sono realizzati, le termocoppie sono sensibili alla presenza di impurezze nei materiali impiegati e di contaminanti nell'ambiente di misura. Il fenomeno può diventare particolarmente evidente alle temperature più elevate, per la maggiore presenza di vapori metallici (provenienti da altri oggetti in prossimità) e per la maggiore facilità con cui essi possono diffondere nei materiali di cui le termocoppie sono costituite. Pertanto esistono modelli di termocoppie in cui la giunzione calda è protetta da un'apposita guaina, la cui presenza ha a sua volta effetti sulla rapidità della risposta del trasduttore.

La relazione tra tensione di termocoppia  $E$  e temperature  $T_1$  della giunzione calda e  $T_0$  di riferimento può essere espressa in maniera piuttosto approssimativa utilizzando una relazione empirica nella forma

$$E = C_1(T_1 - T_0) + C_2(T_1^2 - T_0^2)$$

in cui i coefficienti  $C_1$  e  $C_2$  dipendono dal tipo di termocoppia. Derivando tale relazione rispetto a  $T_1$  (e dunque ancora considerando  $T_0$  temperatura di riferimento) si ottiene la *sensibilità* della termocoppia

$$S = \frac{dE}{dT_1} = C_1 + 2C_2T_1$$

il cui valore dipende come si vede anche dalla temperatura.

Una migliore approssimazione si può ottenere con uno sviluppo polinomiale di ordine superiore al secondo; se inoltre la temperatura di riferimento è assunta pari a  $0^\circ\text{C}$  (e  $T$  è la temperatura della giunzione calda, espressa in gradi centigradi), si ha in generale

$$E = \sum_{i=1}^n C_i T^i$$

I coefficienti  $C_i$ , caratteristici della termocoppia considerata, vengono detti *coefficienti di Seebeck*.

Il valore dei coefficienti di Seebeck è fornito dai costruttori di termocoppie per i vari tipi di dispositivo; viene inoltre indicato l'ordine del polinomio da utilizzare per ottenere una determinata accuratezza nella misura; la relazione temperatura-tensione è generalmente disponibile anche in forma tabellare. Analoghe tabelle (o approssimazioni polinomiali) consentono invece di ricavare dalla tensione misurata la temperatura della giunzione calda. In tutti i casi si assume che la giunzione di riferimento si trovi alla temperatura di  $0^\circ\text{C}$ . Tutti questi dati sono reperibili, per esempio, sul sito web del NIST<sup>3</sup>.

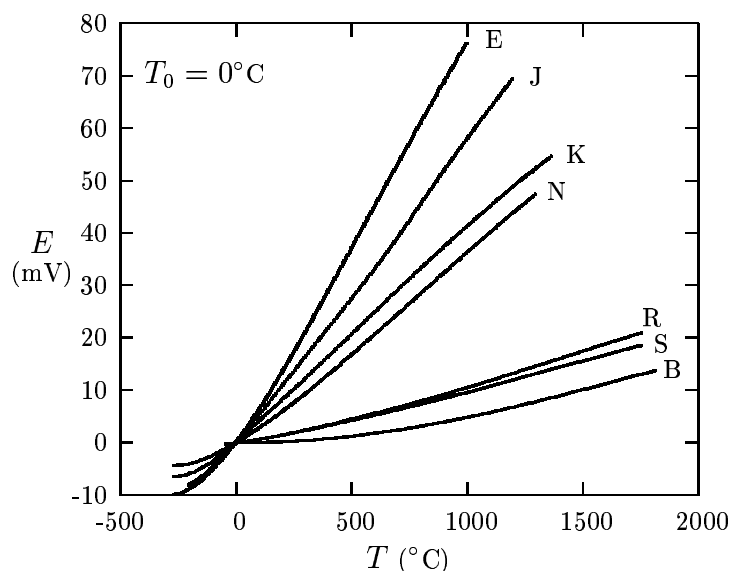


Figura 12 - Andamento della tensione d'uscita  $E$  in funzione della temperatura  $T$  della giunzione calda nei più comuni tipi di termocoppia (fonte: NIST).

In Figura 12 è riportato l'andamento delle tensione generata da diversi tipi di termocoppia in funzione della temperatura della giunzione calda e per temperatura di riferimento  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ . Come si vede, le tensioni sviluppate sono generalmente molto esigue, tipicamente dell'ordine

<sup>3</sup>all'indirizzo <http://srdata.nist.gov/its90/main/>

dei millivolt o delle decine di millivolt; le sensibilità (medie) sono dell'ordine della decina di microvolt per grado centigrado. Pertanto sono in generale necessarie opportune precauzioni per misurare con ragionevole affidabilità le tensioni prodotte.

In alcune situazioni (segnali particolarmente deboli, localizzazione della giunzione di misura a grande distanza dalla strumentazione e conseguente maggiore sensibilità ai disturbi) può essere utile un'adeguato condizionamento delle tensioni generate con operazioni di filtraggio e amplificazione (anche per la reiezione di disturbi a modo comune).

Dato il valore generalmente basso della resistenza d'uscita delle termocoppie, gli amplificatori da impiegare non richiedono resistenze d'ingresso particolarmente elevate. Inoltre esistono in commercio amplificatori da strumentazione integrati specificamente progettati per l'impiego con termocoppie. Per accrescere la tensione prodotta è anche possibile mettere in serie più termocoppie, ottenendo le cosiddette *termopile*.

Le termocoppie vengono realizzate generalmente comprimendo insieme le estremità dei due fili, oppure saldandole (con o senza un materiale di apporto o utilizzando un processo di saldatura mediante LASER) se la sezione dei fili è molto contenuta. Altra modalità è quella consistente nel deporre su un substrato opportuno i metalli di cui è costituita la termocoppia, realizzando in questo modo la giunzione.

Da un punto di vista pratico l'insieme dei fenomeni di interesse nel funzionamento delle termocoppie può essere riassunto nelle seguenti "leggi":

- Legge fondamentale: la d.d.p.  $E_\sigma$  generata ai capi di un conduttore metallico "a" come conseguenza di un gradiente di temperatura tra le sue estremità è data da

$$E_\sigma = \int_{T_1}^{T_2} \sigma_a(T) dT = E_a(T_2) - E_a(T_1)$$

in cui il coefficiente  $\sigma_a$ , tipico del metallo "a" considerato, è detto coefficiente di Seebeck; la d.d.p. generata è funzione delle temperature  $T_2$  e  $T_1$ , ma non del modo in cui la differenza è distribuita lungo il metallo. Se dunque il gradiente di temperatura viene annullato ( $T_2 = T_1$ ) la tensione risultante è nulla.

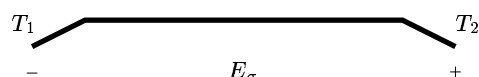


Figura 13 - Schematizzazione della legge fondamentale (effetto Seebeck).

Utilizzando invece un circuito costituito da due conduttori "a" e "b" e imponendo una differenza di temperatura tra la giunzione e le estremità libere (Figura 11a), si ottiene:

$$E = \int_{T_2}^{T_1} \sigma_a(T) dT + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_b(T) dT = E_a(T_1) - E_a(T_2) + E_b(T_2) - E_b(T_1) \quad (1)$$



Indicheremo questa tensione con  $E_{T_1}^{T_2}(a, b)$ . Si osservi che nell'espressione (e quindi nella definizione) di  $E_{T_1}^{T_2}(a, b)$ , non è influente l'ordine in cui vengono indicati i metalli ( $a$  e  $b$ ) e la successione delle temperature; infatti è immediato dimostrare che si ha

$$E_{T_1}^{T_2}(a, b) = -E_{T_2}^{T_1}(a, b) \quad \text{e} \quad E_{T_1}^{T_2}(a, b) = -E_{T_1}^{T_2}(b, a)$$

Inoltre è possibile dimostrare che la tensione generata da una termocoppia (a parità di metalli impiegati e di temperature  $T_1$  e  $T_2$ ) è la medesima, sia che essa venga prelevata tra i terminali (lasciati aperti) della seconda giunzione, sia che venga prelevata mantenendo tali le giunzioni e interrompendo la continuità fisica di uno dei conduttori (Figura 14), purché le estremità libere di questo si trovino alla stessa temperatura.

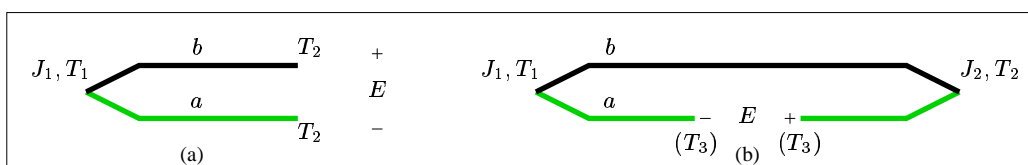


Figura 14 - La tensione di termocoppia non dipende dalla modalità di prelievo.

- Legge del terzo metallo: *il comportamento di una termocoppia non è influenzato dalla presenza di un terzo metallo, purché le estremità relative siano mantenute alla stessa temperatura*<sup>4</sup>.

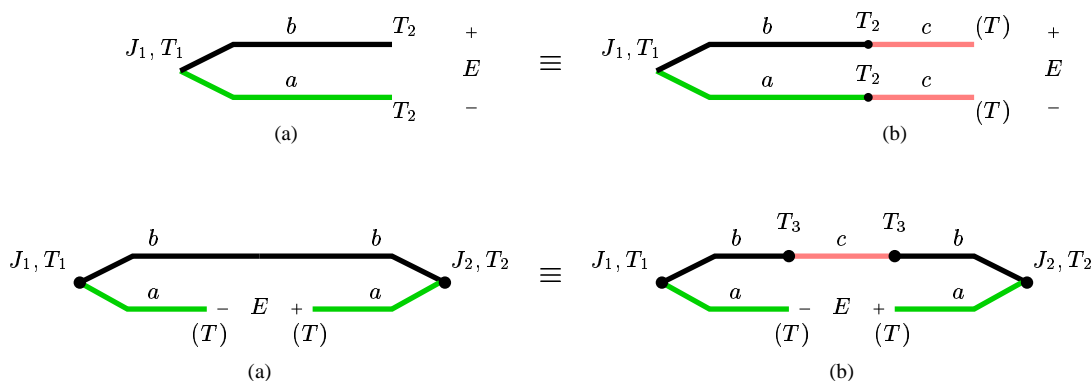


Figura 15 - Legge del terzo metallo.

- Legge della terza temperatura: *Se una termocoppia produce una tensione  $E_{T_1}^{T_2}$  lavorando tra le temperature  $T_1$  e  $T_2$  e una tensione  $E_{T_2}^{T_3}$  tra le temperature  $T_2$  e  $T_3$ , allora produrrà una tensione  $E_{T_1}^{T_3} = E_{T_1}^{T_2} + E_{T_2}^{T_3}$  se viene fatta lavorare tra le temperature  $T_1$  e  $T_3$*  (Figura 16)<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>La dimostrazione segue banalmente dalla (1).

<sup>5</sup>Anche per questa legge la dimostrazione segue banalmente dalla (1).

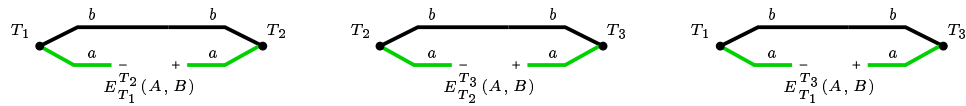


Figura 16 - Legge della terza temperatura.

La legge del terzo metallo è di particolare interesse pratico, dal momento che nell'impiego delle termocoppie come dispositivo per la misura di temperatura è inevitabile la presenza di uno strumento di misura (o di un amplificatore) collegato ai terminali della giunzione fredda. Ciò determina dunque la presenza di almeno un'altra giunzione nell'intero sistema.

Se infatti il materiale di cui sono costituiti i terminali d'ingresso dello strumento è lo stesso impiegato per uno dei fili della termocoppia (a titolo di esempio in Figura 17a è rappresentato il caso di una termocoppia Rame-Costantina collegata a uno strumento con i terminali d'ingresso in rame), allora il collegamento allo strumento determina la presenza di una terza giunzione ( $J_3$ ). La configurazione ottenuta è però ancora quella di una termocoppia di Rame-Costantina che lavora tra le temperature  $T_1$  e  $T_2$ , dal momento che la "giunzione"  $J_3$  collega due fili dello stesso metallo. Inoltre la presenza di una (eventuale) terza temperatura  $T_3$  nel tratto di Rame (in  $J_3$ ) non ha effetti sul comportamento della termocoppia, per quanto affermato in precedenza. È peraltro ragionevole assumere che le due estremità libere (corrispondenti ai terminali di ingresso dello strumento di misura) si trovino alla medesima temperatura, per cui la situazione ottenuta è ancora quella rappresentata in Figura 14b.

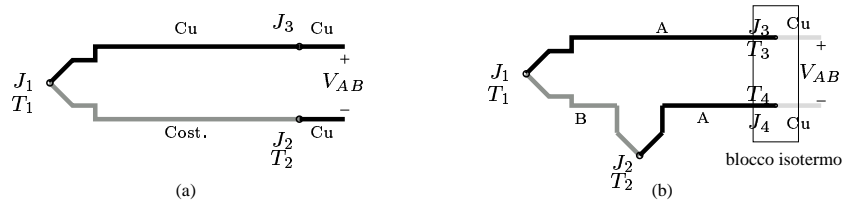


Figura 17 - Collegamento della termocoppia allo strumento di misura della tensione generata: in (a) i terminali del voltmetro sono dello stesso materiale di cui è costituito uno dei fili della termocoppia; in (b) la diversa natura dei tre metalli determina la presenza di due ulteriori giunzioni non intenzionali.

Se invece i terminali d'ingresso del voltmetro sono realizzati con un materiale differente da quello di entrambi i fili della termocoppia (Figura 17b), allora il collegamento allo strumento di misura produce altre due giunzioni non intenzionali ( $J_3$  e  $J_4$ ). La legge del terzo metallo assicura però che la presenza di tali giunzioni non influisce sul risultato della misura, purché esse si trovino alla stessa temperatura  $T_3 = T_4$ .

Questa condizione può essere favorita dall'utilizzo del cosiddetto *blocco isoterma*, cioè un blocco di materiale che sia un buon isolante elettrico, ma anche buon conduttore del calore, su cui si trovano i morsetti di collegamento delle estremità della termocoppia con i terminali dello strumento e la cui funzione è proprio quella di permettere il collegamento della termocoppia allo strumento di misura, garantendo al contempo l'isoterma delle due giunzioni in questione.

Il blocco isoterma è un dispositivo spesso disponibile come accessorio dei multimetri progettati per l'utilizzo con termocoppie.

Dal momento che i costruttori di termocoppie forniscono i relativi dati di calibrazione (tensione di termocoppia in funzione della temperatura e viceversa) per temperatura di riferimento pari a  $0^\circ\text{C}$ , per poter utilizzare tali dati (senza ulteriore elaborazione, come invece si vedrà in seguito) è necessario che nelle condizioni effettive di impiego, la giunzione "fredda" sia mantenuta proprio a questa temperatura.

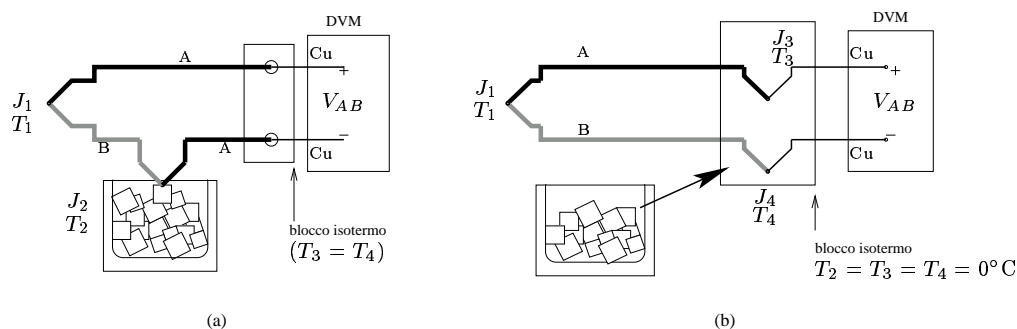


Figura 18 - Misura con la giunzione di riferimento alla temperatura di  $0^\circ\text{C}$ : in (a) il blocco isoterma è a temperatura diversa da quella della giunzione di riferimento, mantenuta a  $0^\circ\text{C}$ ; in (b) anche il blocco isoterma si trova a  $0^\circ\text{C}$ .

Tale risultato può essere ottenuto mantenendo la giunzione di riferimento in una cella di acqua al punto triplo<sup>6</sup>, la quale garantisce (per definizione!) una temperatura di  $0^\circ\text{C}$ , riproducibile a meno di un errore inferiore al centesimo di grado centigrado; un risultato analogo può essere ottenuto con un bagno di ghiaccio fondente, più semplice da realizzare, il quale permette un'accuratezza e una riproducibilità confrontabili con quelli detti, a patto che sia prestata particolare attenzione nella preparazione e nell'impiego della miscela, curando l'isolamento termico verso l'ambiente circostante, la rimozione del liquido in eccesso e l'omogeneità della miscela stessa (Figura 18a). Alla stessa temperatura è possibile mantenere anche le giunzioni di collegamento con lo strumento, cosa che equivale a realizzare il blocco isoterma nella cella termostatica (Figura 18b).

In realtà è possibile effettuare correttamente la misura della temperatura  $T_1$  anche se la temperatura ( $T_2$ ) della giunzione di riferimento è diversa da  $0^\circ\text{C}$ , rispetto alla quale - lo ricordiamo - sono fornite dai costruttori le relazioni temperatura-tensione (e tensione-temperatura) citate in precedenza; questo risultato può essere ottenuto purché sia nota (mediante misura diretta) la temperatura della giunzione di riferimento.

Infatti, quale che sia la temperatura  $T_{\text{ref}}$  della giunzione di riferimento in Figura 19, la tensione  $V_{AB} = E_{T_1}^{T_{\text{ref}}}(A, B)$  misurata dal voltmetro, può essere scritta, utilizzando la legge

<sup>6</sup>nel quale, come è noto, si trova contemporaneamente acqua nei tre stati di aggregazione.

della terza temperatura, nella forma

$$V_{AB} = E_{T_1}^{T_{\text{ref}}}(A, B) = E_{T_1}^{0^\circ\text{C}}(A, B) + E_{0^\circ\text{C}}^{T_{\text{ref}}}(A, B)$$

In questa espressione, se è appunto nota la temperatura  $T_{\text{ref}}$  della giunzione di riferimento (misurata sul blocco isoterma, se presente, o comunque in prossimità dei terminali d'ingresso dello strumento di misura), dalle tabelle che forniscono per una data temperatura (in questo caso  $T_{\text{ref}}$ ) la tensione di termocoppia corrispondente, è possibile ricavare il termine  $E_{0^\circ\text{C}}^{T_{\text{ref}}}(A, B)$ . Poiché il valore di  $V_{AB}$  è noto (perché misurato), è possibile adesso ricavare per differenza il valore del termine  $E_{T_1}^{0^\circ\text{C}}(A, B)$  e da questo (utilizzando le tabelle tensione-temperatura) la temperatura  $T_1$  corrispondente.

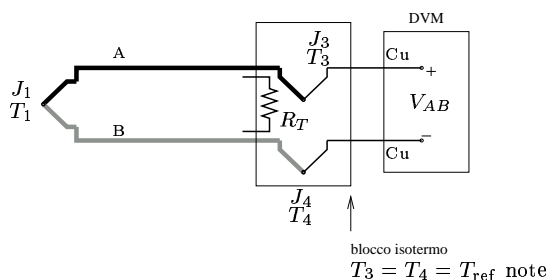


Figura 19 - Misura con la giunzione di riferimento a temperatura ambiente.

Poiché la temperatura di riferimento è generalmente prossima a quella ambiente (o coincidente con essa), la sua misura non comporta particolari difficoltà e può essere agevolmente effettuata, per esempio, con trasduttori a semiconduttori.

La procedura descritta prende il nome di *compensazione della temperatura della giunzione fredda* (o in breve *compensazione della giunzione fredda*) e si basa su un semplice calcolo; essa può essere automatizzata se nel sistema di misura è presente una unità programmabile (come per esempio un microcontrollore) nella cui memoria siano stati collocati i dati necessari per ricavare dalla tensione  $E_{T_1}^{0^\circ\text{C}}(A, B)$  la temperatura ricercata.

La compensazione può anche essere effettuata per via elettrica e si parla in questo caso di *compensazione hardware*. Il metodo si basa sulla *generazione* della tensione  $E_{0^\circ\text{C}}^{T_{\text{ref}}}(A, B)$  in serie (e in opposizione) alla tensione prodotta dalla termocoppia. In questo modo lo strumento misura

$$V'_{AB} = E_{T_1}^{T_{\text{ref}}}(A, B) - E_{0^\circ\text{C}}^{T_{\text{ref}}}(A, B) = E_{T_1}^{0^\circ\text{C}}(A, B)$$

e l'intero sistema si comporta come se la giunzione di riferimento lavorasse effettivamente a  $0^\circ\text{C}$ . La generazione della tensione di compensazione richiede ovviamente un'apposita circuiteria che è in sostanza un generatore di tensione controllato dalla temperatura (misurata dal trasduttore  $R_T$ ).

La tensione  $V'_{AB}$  così ottenuta può direttamente essere convertita nella temperatura  $T_1$  corrispondente. A questo proposito è utile ricordare che i voltmetri specificamente progettati

per essere impiegati nelle misure con termocoppie hanno scale (eventualmente differenti per i diversi tipi di termocoppia) tarate direttamente in gradi centigradi. Negli strumenti elettronici la conversione dalla tensione alla temperatura corrispondente viene ovviamente effettuata per via software.

L'impiego delle termocoppie si rivela particolarmente utile quando è necessario misurare più temperature contemporaneamente. In questo caso è possibile utilizzare un unico blocco isoterma per tutte le termocoppie impiegate (anche di tipo diverso fra loro) e un unico multimetro, al quale, mediante un opportuno sistema di commutazione, vengono collegate in sequenza le diverse termocoppie. Questa situazione è schematizzata in Figura 20, per il caso relativo alla misura di due temperature. L'intero sistema di misura è controllato via software, in modo che sia possibile la compensazione della giunzione fredda per tutte le termocoppie presenti.

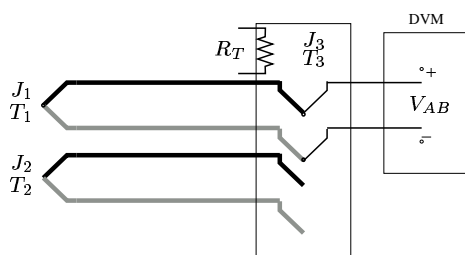


Figura 20 - Misura contemporanea di due temperature con il medesimo voltmetro; mediante un opportuno sistema di commutazione, il voltmetro viene collegato, in sequenza, ai terminali delle diverse termocoppie.

Per le loro ridotte dimensioni (visto che sono costituite essenzialmente da due fili) le termocoppie si prestano anche a misure in ambito biomedico, effettuate per esempio mediante l'utilizzo di cateteri o aghi: come già detto soffrono dell'inconveniente del valore molto esiguo della tensione prodotta (in particolare per differenze di temperatura contenute) oltre che della necessità di utilizzare un riferimento di temperatura o di provvedere alla compensazione.

## Altre applicazioni delle termocoppie

Le termocoppie sono state utilizzate in passato anche per la realizzazione di rivelatori a vero valore efficace, basati sulla definizione "energetica" del valore efficace di una tensione (o corrente). In questo caso la tensione da misurare viene applicata a una opportuna resistenza, nella quale determina una dissipazione di energia per effetto Joule che produce un riscaldamento del dispositivo. Se a contatto della resistenza è posta la giunzione "calda" di una termocoppia, dalla misura della tensione termoelettrica è possibile (sebbene in modo solo concettualmente semplice) risalire alla potenza dissipata e dunque al valore *efficace* della tensione da misurare. Il vantaggio della procedura descritta consiste nel fatto che essa permette di misurare il valore efficace di una tensione (o corrente) indipendentemente dalla forma della grandezza in que-

stione. Ciò consente di ovviare agli errori tipici dei metodi nei quali si ricava il valore efficace dalla conoscenza (per esempio) del valore medio raddrizzato, metodi che portano a un risultato corretto solo se è noto il *fattore di forma*<sup>7</sup> della grandezza da misurare e dunque il suo effettivo andamento.

Altra applicazione dei trasduttori a termocoppia è quella di sensori di vuoto. La giunzione calda, che si trova nella camera in cui è fatto il vuoto, viene scaldata mediante un filamento percorso da corrente. Al diminuire della pressione nella camera diminuisce la dissipazione termica e quindi la temperatura (della giunzione) tende ad aumentare. Con questa tecnica si misurano pressioni nel range da 2 a  $10^{-3}$  torr.

---

<sup>7</sup>ossia il coefficiente che lega il valore medio raddrizzato al valore efficace, e che è caratteristico della forma della grandezza alternata considerata.