ESERCIZIO 1

1.1 - Risposta in frequenza (A. O. ideale)

$$v^-(s) = v_s(s)\frac{R_2}{R_1+R_2}+v_u(s)\frac{R_1}{R_1+R_2} \qquad v^+(s) = v_u(s)\frac{\frac{1}{Cs}}{R_5+\frac{1}{Cs}+(R_3\|R_4)}\cdot\frac{R_4}{R_3+R_4}$$

Eguagliando ($v^+(s) = v^-(s)$):

$$v_s(s)\frac{R_2}{R_1+R_2}+v_u(s)\frac{R_1}{R_1+R_2} = v_u(s)\frac{\frac{1}{Cs}}{R_5+\frac{1}{Cs}+(R_3\|R_4)}\cdot\frac{R_4}{R_3+R_4}$$

segue

$$v_u(s)\left[\frac{R_4}{R_3+R_4}\cdot\frac{\frac{1}{Cs}}{R_5+\frac{1}{Cs}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}}-\frac{R_1}{R_1+R_2}\right] = v_s(s)\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

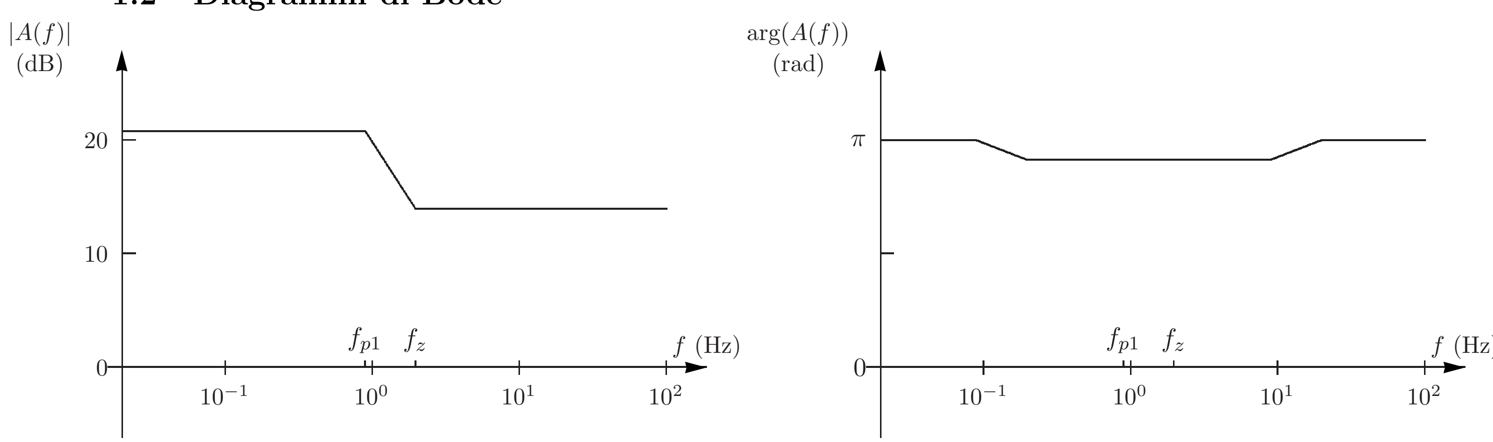
$$v_u(s)\left[\frac{R_4}{R_5Cs(R_3+R_4)+R_3+R_4+R_3R_4Cs}-\frac{R_1}{R_1+R_2}\right] = v_s(s)\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$\begin{aligned} A(s) &= -\frac{R_2\left\{Cs\left[R_5(R_3+R_4)+R_3R_4\right]+R_3+R_4\right\}}{R_1R_3-R_2R_4+CsR_1[R_5(R_3+R_4)+R_3R_4]} \\ &= \frac{-R_2(R_3+R_4)}{R_1R_3-R_2R_4}\cdot\frac{1+\frac{R_5(R_3+R_4)+R_3R_4}{R_3+R_4}Cs}{1+R_1\frac{R_5(R_3+R_4)+R_3R_4}{R_1R_3-R_2R_4}Cs} \end{aligned}$$

$$A(f) = A_0\frac{\left(1+j\frac{f}{f_z}\right)}{\left(1+j\frac{f}{f_{p1}}\right)} \qquad A_0 = \frac{-R_2(R_3+R_4)}{R_1R_3-R_2R_4} = -11 \quad (20.83\,\mathrm{dB})$$

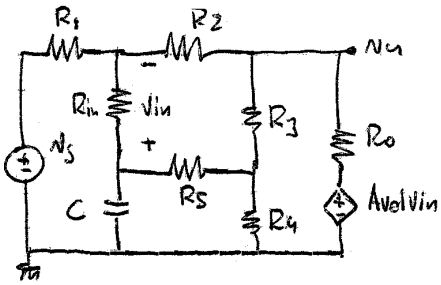
$$f_z = \frac{R_3+R_4}{2\pi C[R_5(R_3+R_4)+R_3R_4]} = 1.97\ \mathrm{Hz} \qquad f_{p1} = \frac{R_1R_3-R_2R_4}{2\pi CR_1[R_5(R_3+R_4)+R_3R_4]} = 0.894\ \mathrm{Hz}$$

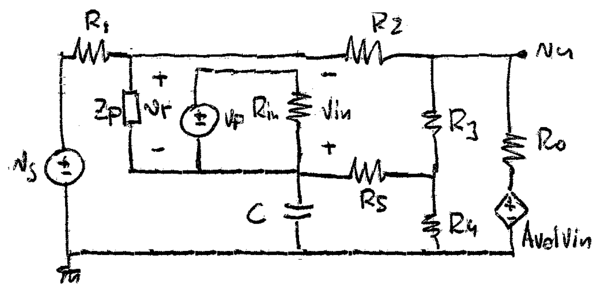
1.2 - Diagrammi di Bode



1.3 - Limiti di applicabilità del metodo del cortocircuito virtuale.

Circuito equivalente, scomposizione tra gli ingressi dell'A.O.:





$$\rho = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Z_p = Z_i = R_{in} \to \infty$$

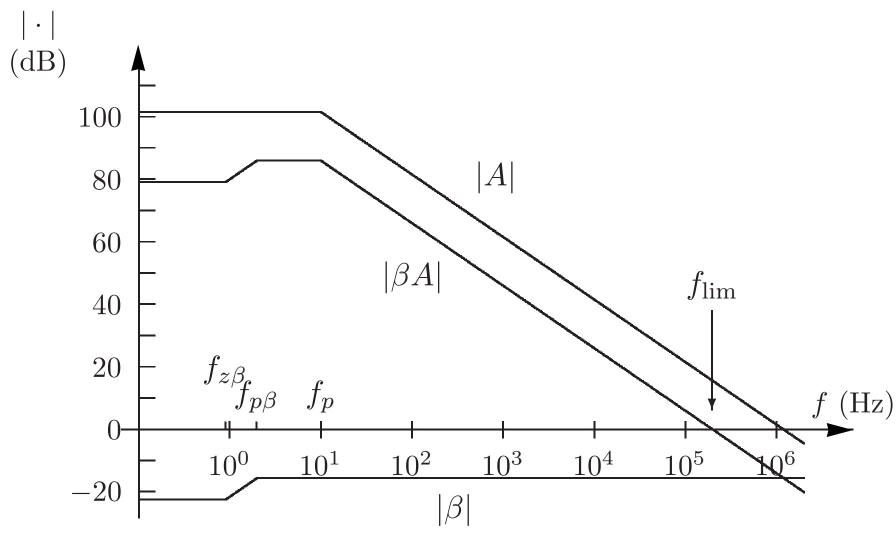
$$\beta_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{11} = 0.0758 \quad (= -22.4\,\text{dB}) \qquad \beta_\infty = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{6} = 0.167$$

$$f_{p\beta} = \frac{1}{2\pi C[R_5 + (R_3 \| R_4)]} = 1.967 \text{ Hz} \qquad f_{z\beta} = f_{p\beta}\frac{\beta_0}{\beta_\infty} = 0.894 \text{ Hz} \quad (= f_{p1})$$

Dunque

$$\beta(f) = \beta_0 \frac{1 + j\dfrac{f}{f_{z\beta}}}{1 + j\dfrac{f}{f_{p\beta}}} \qquad A(f) = -A_{vol}(f) = -A_{vol0}\frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_p}}$$

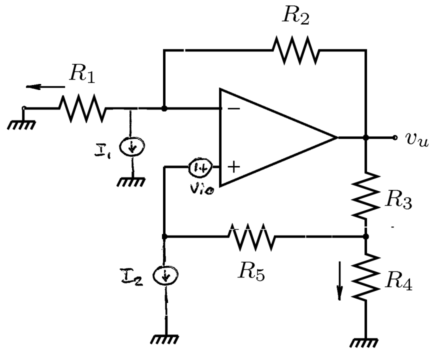
Diagrammi di Bode:



$f_{lim} = A_{vol0} f_p \beta_\infty = \beta_\infty \cdot \text{PGB} = 200$ kHz.

e il metodo del cortocircuito virtuale è applicabile nel range di frequenze compreso tra 0 ed f_{lim}.

1.4 - Massimo sbilanciamento



- Contributo di I_1:

$V^+ = \dfrac{R_4}{R_3+R_4}V_U$ (R_5 non è percorsa da corrente).

$$I_{R1} = \frac{V^-}{R_1} = \frac{V^+}{R_1} = \frac{V_U}{R_1}\cdot\frac{R_4}{R_3+R_4}$$

$$V_U = V^- + R_2(I_1 + I_{R1}) = V^+ + R_2(I_1 + I_{R1})$$

Dunque

$$V_U = \frac{R_4}{R_3+R_4}V_U + R_2\left(I_1 + \frac{V_U}{R_1}\cdot\frac{R_4}{R_3+R_4}\right)$$

da cui

$$V_U\left[1 - \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_4}{R_3+R_4}\right] = R_2 I_1 \quad\Rightarrow\quad V_U = k_1 I_1, \qquad k_1 = \frac{R_1R_2(R_3+R_4)}{R_1R_3 - R_2R_4} = 110\,\mathrm{k}\Omega.$$

- Contributo di I_2:

$$V^- = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_U, \quad V_A = V^+ + R_5I_2 = V^- + R_5I_2, \quad I_{R_4} = \frac{V_A}{R_4}, \quad V_U = V_A + R_3(I_2 + I_{R_4})$$

Dunque

$$V_U = V_U\frac{R_1}{R_1+R_2} + R_5I_2 + R_3\left[I_2 + \frac{1}{R_4}\left(V_U\frac{R_1}{R_1+R_2} + R_5I_2\right)\right]$$

da cui

$$V_U\frac{R_4(R_1+R_2) - R_1(R_4+R_3)}{R_1+R_2} = I_2\left[R_5R_4 + R_3(R_5+R_4)\right]$$

$$\Rightarrow\quad V_U = k_2I_2, \qquad k_2 = \frac{(R_1+R_2)[R_5R_4 + R_3(R_5+R_4)]}{R_2R_4 - R_1R_3} = -1068\,\mathrm{k}\Omega$$

- Contributo di V_{io}:

$$V^- = V_U\frac{R_1}{R_1+R_2} = V^+ = V_U\frac{R_4}{R_3+R_4} + V_{io}$$

Così

$$V_U\frac{R_4(R_1+R_2) - R_1(R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} = -V_{io}$$

$$\text{e} \qquad V_U = k_3V_{io}, \qquad\qquad k_3 = \frac{(R_3+R_4)(R_1+R_2)}{R_1R_3 - R_2R_4} = 13.2$$

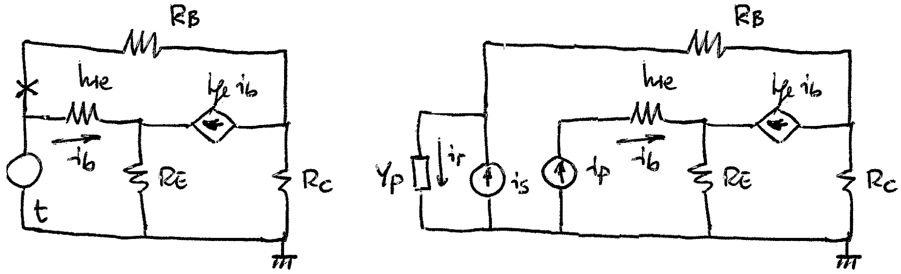
Tenendo conto dei tre contributi si ottiene: $V_U = k_1I_1 + k_2I_2 + k_3V_{io}$, che risulta massimo (in valore assoluto) per

$$V_{io} = -5\ \mathrm{mV}, I_1 = 40\,\mathrm{nA}, I_2 = 60\,\mathrm{nA}, \qquad \text{con} \qquad |V_U|_{\max} = 125.7\ \mathrm{mV}.$$

ESERCIZIO 2

2.1 - Resistenza d'ingresso

Circuito equivalente e scomposizione in corrente tra base e massa:



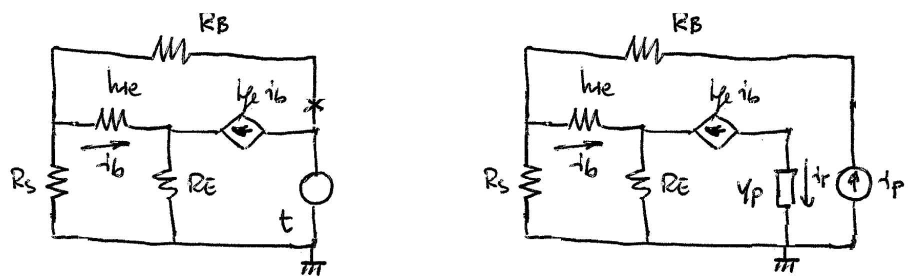
$$\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_p = Y_i = [h_{ie} + R_E(h_{fe}+1)]^{-1} = 3.054\,\mu\text{S} \qquad Y_b = (R_B + R_C)^{-1} = 34.25\,\mu\text{S}$$

$$\beta A = \left.\frac{i_r}{i_p}\right|_{i_s=0} = -\frac{h_{fe}R_C}{R_C + R_B + Y_p^{-1}} = -1.665 \qquad \text{(reazione negativa parallelo)}$$

$$Y_{in} = (Y_b + Y_P)(1-\beta A) = 99.42\,\mu\text{S} \quad \Rightarrow \quad R_{in} = Y_{in}^{-1} = 10.06\,\text{k}\Omega.$$

2.2 - Resistenza d'uscita

Circuito equivalente e scomposizione in corrente tra collettore e massa:



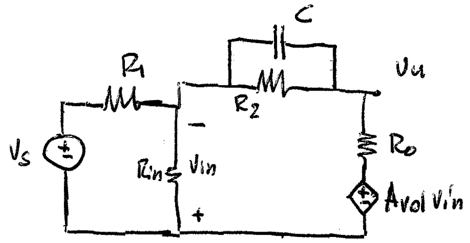
$$\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_p = Y_i = \{R_B + \{R_S \| \,[h_{ie} + R_E(h_{fe}+1)]\}\}^{-1} = 35.1\,\mu\text{S} \qquad Y_b = 0$$

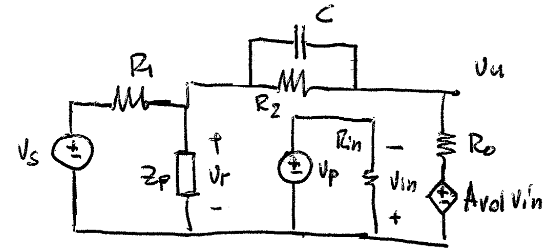
$$\beta A = \left.\frac{i_r}{i_p}\right|_{i_s=0} = \frac{-h_{fe}R_S}{R_S + h_{ie} + R_E(h_{fe}+1)} = -1.23 \qquad \text{(reazione negativa di tensione)}$$

$$Y_{out} = (Y_p + Y_b)(1-\beta A) = 78.3\,\mu\text{S} \quad \Rightarrow \quad R_o = Y_{out}^{-1} = 12.77\,\text{k}\Omega$$

ESERCIZIO 3

Circuito equivalente, scomposizione tra gli ingressi dell'A.O.:





$$\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_p = Z_i = R_{in} \to \infty \qquad\qquad \gamma = 0, \qquad A(f) = -A_{vol}(f) = \frac{-A_{vol0}}{1 + j\dfrac{f}{f_p}}$$

$$\beta_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3}, \quad \beta_\infty = 1, \quad f_{p\beta} = \frac{1}{2\pi C(R_1 \| R_2)} = 238.7\,\text{Hz}, \quad f_{z\beta} = \frac{1}{2\pi C R_2} = f_{p\beta}\frac{\beta_0}{\beta_\infty} = 79.6\,\text{Hz}$$

$$\beta(f) = \beta_0 \frac{1 + j\dfrac{f}{f_{z\beta}}}{1 + j\dfrac{f}{f_{p\beta}}}$$

$$\alpha_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3}, \quad \alpha_\infty = 0, \quad f_{p\alpha} = \frac{1}{2\pi C(R_1 \| R_2)} = f_{p\beta}, \qquad\qquad \alpha(f) = \frac{\alpha_0}{1 + j\dfrac{f}{f_{p\beta}}}$$

Guadagno ad anello chiuso (esempio di risoluzione "in s"):

Le funzioni di taglio determinate hanno, nel dominio s, espressione:

$$A(s) = \frac{-A_{vol0}}{1 + s/s_p}, \qquad \alpha(s) = \frac{\alpha_0}{1 + s/s_{p\beta}}, \qquad \beta(s) = \beta_0 \frac{1 + s/s_{z\beta}}{1 + s/s_{p\beta}}$$

con $s_p = 2\pi f_p = 75.40\,\text{rad/s}$, $\quad s_{p\beta} = 2\pi f_{p\beta} = 1500\,\text{rad/s}$, $\quad s_{z\beta} = 2\pi f_{z\beta} = 500\,\text{rad/s}$.

Dunque

$$\begin{aligned}
A_f(s) &= \frac{\alpha(s)A(s)}{1 - \beta(s)A(s)} = \frac{-\dfrac{\alpha_0 A_{vol0}}{(1 + s/s_p)(1 + s/s_{p\beta})}}{1 + \beta_0 A_{vol0}\dfrac{1 + s/s_{z\beta}}{(1 + s/s_p)(1 + s/s_{p\beta})}} \\
&= \frac{-\alpha_0 A_{vol0}}{(1 + s/s_p)(1 + s/s_{p\beta}) + \beta_0 A_{vol0}(1 + s/s_{z\beta})} \\
&= \frac{-\alpha_0 A_{vol0}}{1 + \beta_0 A_{vol0}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{s}{1 + \beta_0 A_{vol0}}\left(\dfrac{1}{s_{p\beta}} + \dfrac{1}{s_p} + \dfrac{\beta_0 A_{vol0}}{s_{z\beta}}\right) + s^2 \dfrac{1}{s_p s_{p\beta}(1 + \beta_0 A_{vol0})}}
\end{aligned}$$

Le radici del denominatore (poli del sistema) sono $s' = -500\,\text{rad/s}$ e $s'' = -9.05 \times 10^6\,\text{rad/s}$, cui corrispondono le frequenze $f' = 79.58$ Hz ed $f'' = 1.44$ MHz.

Guadagno ad anello chiuso (esempio di risoluzione "in f"):

$$A_f(f) \quad = \quad \frac{\alpha A}{1-\beta A} = \frac{-\dfrac{\alpha_0 A_{vol0}}{\left(1+j\dfrac{f}{f_{p\beta}}\right)\left(1+j\dfrac{f}{f_p}\right)}}{1+\beta_0 A_{vol0}\dfrac{\left(1+j\dfrac{f}{f_{z\beta}}\right)}{\left(1+j\dfrac{f}{f_{p\beta}}\right)\left(1+j\dfrac{f}{f_p}\right)}} =$$

$$= \quad \frac{-\alpha_0 A_{vol0}}{\left(1+j\dfrac{f}{f_{p\beta}}\right)\left(1+j\dfrac{f}{f_p}\right)+\beta_0 A_{vol0}\left(1+j\dfrac{f}{f_{z\beta}}\right)} =$$

$$= \quad \frac{-\alpha_0 A_{vol0}}{1+\beta_0 A_{vol0}} \cdot \frac{1}{1+j\dfrac{f}{1+\beta_0 A_{vol0}}\left(\dfrac{1}{f_{p\beta}}+\dfrac{1}{f_p}+\dfrac{\beta_0 A_{vol0}}{f_{z\beta}}\right)-f^2\left[\dfrac{1}{f_{p\beta}f_p(1+\beta_0 A_{vol0})}\right]}$$

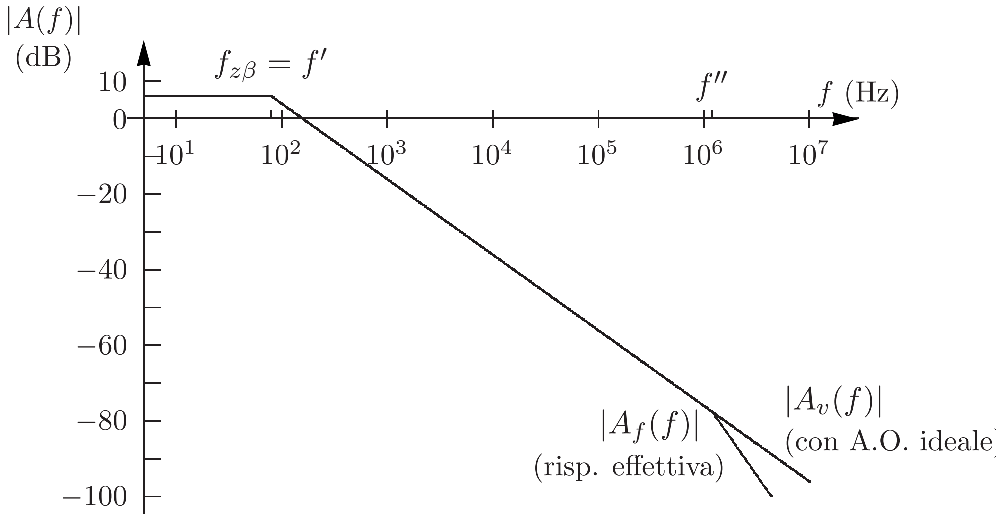
si tratta di un sistema a due poli, dunque con risposta del tipo:

$$A_f(f) = \frac{-\alpha_0 A_{vol0}}{1+\beta_0 A_{vol0}} \cdot \frac{1}{\left(1+j\dfrac{f}{f'}\right)\left(1+j\dfrac{f}{f''}\right)}$$

Eguagliano i due denominatori e risolvendo la relativa equazione di secondo grado, si ottiene

$$f' = 79.58 \text{ Hz} \qquad \text{ed} \qquad f'' = 1.44 \text{ MHz.}$$

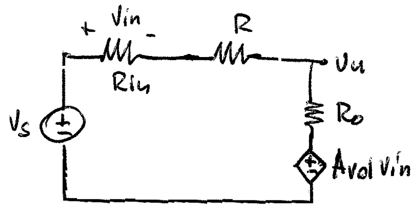
Si vede che la prima frequenza di polo è quella ricavabile anche considerando ideale l'amplificatore operazionale (e dunque applicando il metodo del cortocircuito virtuale), mentre la seconda è di fatto il limite di applicabilità del metodo stesso [$f^* = A_{vol0} f_p \beta_\infty$], cioè la frequenza a partire dalla quale si ha un apprezzabile scostamento dell'andamento della risposta ricavata mediante il metodo del cortocircuito virtuale da quello effettivo ($A_f(f)$). In figura sono riportati i diagrammi di Bode di $|A_f(f)|$ e del modulo della risposta ricavata considerando ideale l'amplificatore operazionale ($|A_v(f)|$).

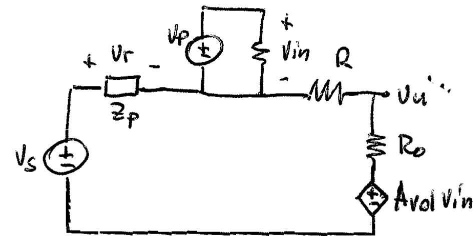

$|A(f)|$
(dB)
10
0
−20
−40
−60
−80
−100
$f_{z\beta} = f'$
f''
f (Hz)
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
$|A_v(f)|$
(con A.O. ideale)
$|A_f(f)|$
(risp. effettiva)

ESERCIZIO 4

4.1 - Resistenza d'ingresso in bassa frequenza

Circuito equivalente, scomposizione tra gli ingressi dell'A.O.:





$$\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_p = Z_i = R_{in} = 10\,\mathrm{M\Omega}, \qquad Z_b = R + R_o = 10.1\,\mathrm{k\Omega},$$

$$A(f) = A_{vol0} \quad \text{(si trascura la dipendenza dalla frequenza)}$$

$$\beta = -\frac{Z_p}{Z_p + R_o} = -999.99 \times 10^{-3} (\simeq 1),$$

Segue

$$Z_{in} = (Z_p + Z_b)(1 - \beta A) = (R_{in} + R_o + R)\left(1 + \frac{Z_p}{Z_p + R_o} A_{vol0}\right) = 1.001 \times 10^{12}\,\Omega \qquad (1)$$

4.2 - Guadagno in bassa frequenza (stessa scomposizione)

$$\alpha = \frac{Z_p}{Z_p + R + R_o} = 998.99 \times 10^{-3} \simeq 1, \qquad \gamma = \frac{R_o}{R_o + R + R_{in}} = 9.99 \times 10^{-6} (\simeq 0)$$

$$A_f = \frac{\alpha A}{1 - \beta A} + \gamma = \frac{\dfrac{Z_p}{Z_p + R + R_o} A_{vol0}}{1 + \dfrac{Z_p}{Z_p + R_o A_{vol0}}} + \frac{R_o}{R_o + R + R_{in}} = 999.0 \times 10^{-3} (\simeq 1).$$

4.3 - Andamento con la frequenza dell'impedenza d'ingresso

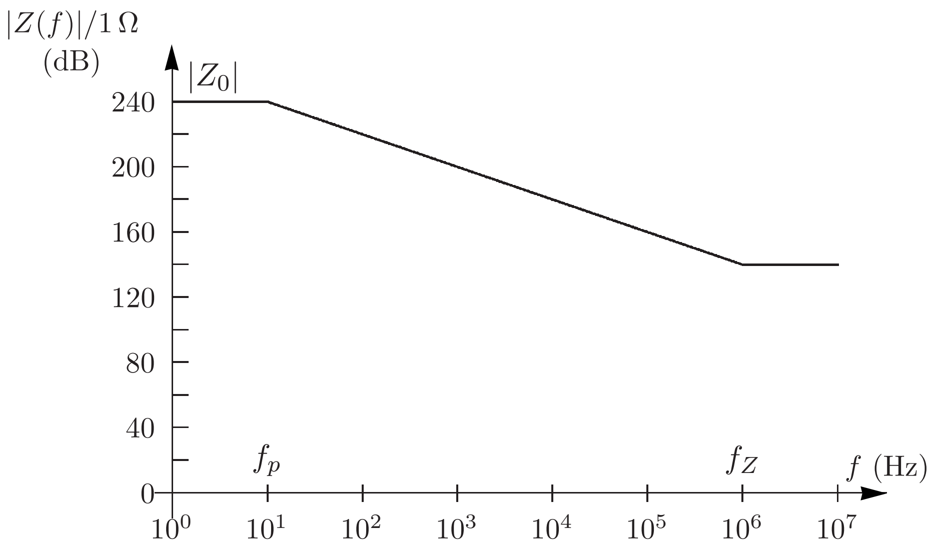
Nell'espressione (1) è necessario adesso considerare la dipendenza di A dalla frequenza.

Si ottiene così

$$
\begin{aligned}
Z_{in}(f) &= (Z_p + Z_b)[1 - \beta A(f)] = (R_{in} + R_o + R)\left(1 + \frac{Z_p}{Z_p + R_o}\cdot\frac{A_{vol0}}{1 + j\dfrac{f}{f_p}}\right)\\
&= (R_{in} + R_o + R)\left[\frac{(R_{in} + R_o)\left(1 + j\dfrac{f}{f_p}\right) + R_{in}A_{vol0}}{(R_{in} + R_o)\left(1 + j\dfrac{f}{f_p}\right)}\right]\\
&= \underbrace{(R_{in} + R_o + R)\frac{R_O + R_{in}(1 + A_{vol0})}{R_{in} + R_o}}_{Z_0}\cdot\frac{1 + j\dfrac{f}{f_Z}}{1 + j\dfrac{f}{f_p}}
\end{aligned}
$$

Dunque l'impedenza d'ingresso presenta un polo e uno zero. Si osservi che il valore in corrente continua ($Z_0 = 1 \times 10^{12}\,\Omega$) coincide con quello calcolato al precedente punto 4.1.

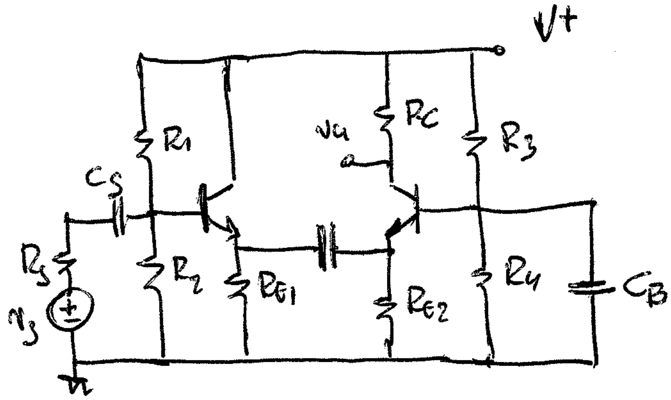
$$
f_Z = f_p\frac{R_o + R_{in}(1 + A_{vol0}}{R_o + R_{in}} = 1 \text{ MHz}, \qquad f_p = 10 \text{ Hz},
$$



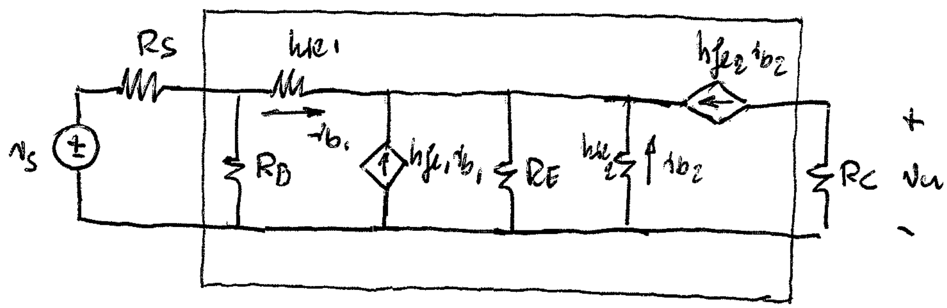
Poiché il polo e lo zero sono molto distanti fra loro (4 decadi), il valore assoluto dell'impedenza si riduce di un fattore 1000 3 decadi dopo la frequenza di polo, e dunque per $f^* = 1000 f_p = 10$ kHz. A questa frequenza la fase di $Z(f)$ è praticamente pari a $-\pi/2$ e dunque l'impedenza ha carattere puramente capacitivo.

ESERCIZIO 5

Si fa riferimento al circuito:



e al suo circuito equivalente:



$$h_i = R_B \| \left[h_{ie1} + (h_{fe1}+1)\left(\frac{h_{ie2}}{h_{fe2}+1}\right)\right] \simeq R_B \| 2h_{ie1} \quad \text{se} \;\; h_{fe1} = h_{fe2} \text{ ed } h_{ie1} = h_{ie2}.$$

Al nodo E: $(h_{fe1}+1)i_{b1} + (h_{fe2}+1)i_{b2} = 0$, da cui

$$i_{b2} = -i_{b1}\frac{h_{fe1}+1}{h_{fe2}+1}$$

Detta R' la resistenza vista, a destra, in parallelo ad R_B: $R' = h_{ie1} + (h_{fe1}+1)\left(\frac{h_{ie2}}{h_{fe2}+1}\right)$,

$$h_f = \frac{h_{fe2}i_{b2}}{i_{b1}+i'} = \frac{h_{fe2}i_{b2}}{i_{b1}\left(1+\frac{R'}{R_B}\right)} = -h_{fe2}\frac{h_{fe1}+1}{h_{fe2}+1}\cdot\frac{R_B}{R'+R_B} \simeq -h_{fe2}\frac{R_B}{R'+R_B} \quad \text{se} \;\; h_{fe1} = h_{fe2}.$$

Inoltre $h_o = 0$ e $h_r = 0$, poiché nelle condizioni richieste dalla definizione di questo due parametri il transistor sull'uscita è pilotato dal collettore e quindi $i_{b2} = 0$.

Il risultato trovato permette di dire che la configurazione in questione ha le prestazioni di un amplificatore a emettitore comune, con una resistenza d'ingresso intrinseca maggiorata ($h_i = 2h_{ie}$), e con guadagno di segno opposto ($h_f \simeq -h_{fe2}$).