Modelli Matematici per il Moto di Fluidi

1. Leggi fondamentali per l'analisi della dinamica dei fluidi

L'esperienza mostra che i principi cui si richiamano le equazioni da applicare per risolvere i problemi di dinamica dei fluidi fanno capo a note leggi fondamentali della natura:

- ***Conservazione della massa***

  La massa non può essere creata né distrutta, ma solo trasportata.

- ***Leggi della dinamica***
  - **Principio di inerzia: un corpo resta in quiete o in moto rettilineo uniforme fino a quando forze esterne non ne modificano lo stato**
  - **2ª legge della dinamica o (meglio) il principio di conservazione della quantità di moto:**

    $$\vec{F} = M\,\frac{d\vec{w}}{dt} \quad \mathbf{o} \qquad \vec{F} = \frac{d\left(M\vec{w}\right)}{dt}$$

  - **Principio di azione e reazione: ad ogni forza (azione) corrisponde una reazione uguale ed opposta.**

- ***Principi della termodinamica***
  - **Primo principio: l'energia non può né essere creata né distrutta, ma solo trasportata, trasformata o immagazzinata.**

    $$\delta Q = dU + \delta L$$

  - **Secondo principio:**

    In un senso generale, questo principio afferma che, nonostante l'energia non si crei né si distrugga, essa tende a *degradarsi* da forme più elevate (energia cinetica o potenziale) a forme meno elevate (calore ed energia interna a basse temperature).

Sono inoltre necessarie equazioni aggiuntive per "chiudere" il problema:

- ***Equazioni di stato***

  Esse sono necessarie per definire le relazioni tra le varie proprietà di un fluido dato un numero minimo di variabili (ad es., due)

$$\rho = \rho(p, T) \qquad\qquad s = s(p, T)$$

- ***Equazioni costitutive***

  Sono necessarie per definire variabili aggiuntive chiamate in causa dalle equazioni di bilancio, quali ad es., gli sforzi viscosi e i flussi termici che non possono essere direttamente determinate sulla base delle variabili indipendenti

A questo proposito è bene distinguere tra:

- **Proprietà estensive ed intensive**

  a) ***Estensive*: il loro valore dipende dall'estensione (in massa o volume) e *sono additive***

  Ad es.: $U, H, S, E, E_p, E_c, V, M$

  e dato un sistema $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \Sigma_i$ **si ha** $M_{tot} = \sum_i M_i$ **,** $E_{tot} = \sum_i E_i$ **, ecc.**

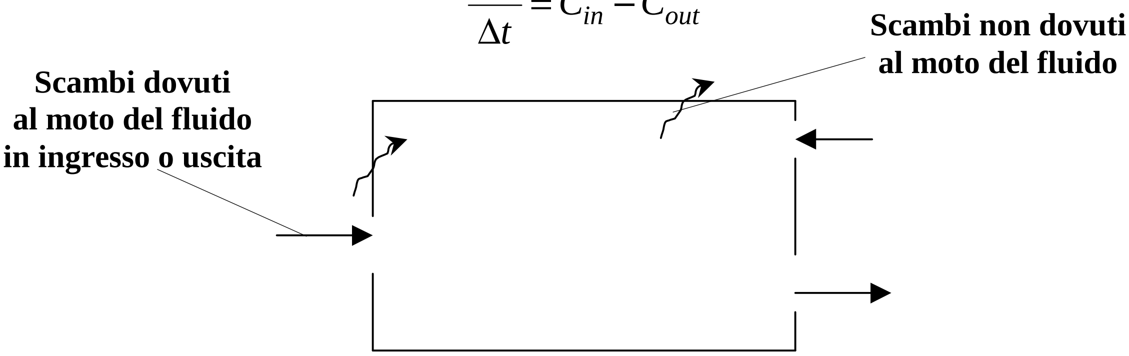
  b) ***Intensive*: il loro valore non dipende dall'estensione ma esprime, in genere, una proprietà locale**

  Ad es.: $p, T, \vec{w}$ **e i valori specifici delle proprietà estensive** $u, h, s, e, e_p, e_c, v, \rho$ **e dato un sistema** $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \Sigma_i$ **si ha, in generale,** $T_{tot} \neq \sum_i T_i$ **,** $p_{tot} \neq \sum_i p_i$ **, ecc.**

2. Generalità sulle equazioni di bilancio della fluidodinamica

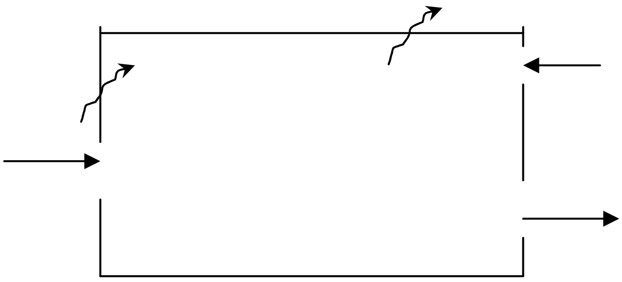
- **Sono basate sul *concetto di bilancio*, che si applica alle proprietà estensive di sistemi, in generale, *aperti* cioè che consentono scambi di massa ed energia**

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \dot{C}_{in} - \dot{C}_{out}$$

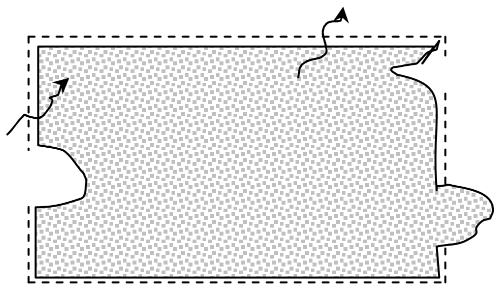


Ciascuno dei principi fondamentali della fisica può essere espresso in forma di bilancio per ottenere una corrispondente equazione.
Si possono avere:

- ***Equazioni per volumi o masse di controllo finiti (Integrali)***



Volume di controllo (forma Euleriana)



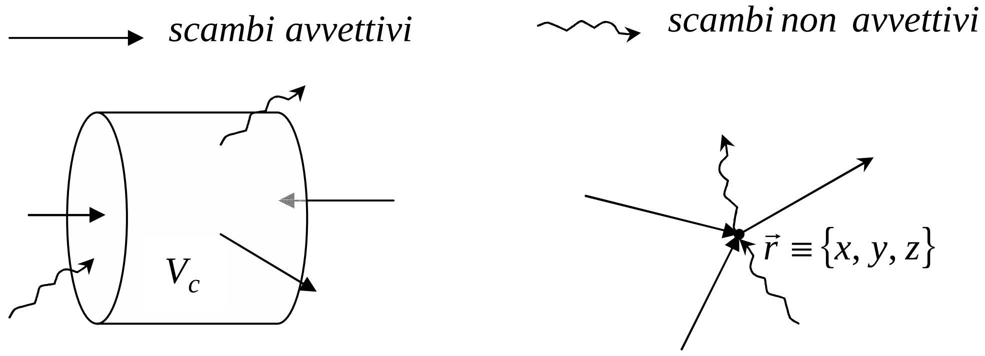
Massa di controllo (forma Lagrangiana)

- ***Equazioni Differenziali***
  - ♦ **Si tratta di relazioni *locali* ed *istantanee*, anche se ottenute come limite di bilanci su volumi (o masse) finiti che spesso richiedono una soluzione numerica (basata su volumi o masse finite)**

Nello scrivere le equazioni è possibile adottare due diversi punti di vista:

♦ ***Punto di vista EULERIANO (o spaziale o locale)***

Si fa riferimento ad un *volume di controllo* o ad *un punto nello spazio* $\vec{r} \equiv \{x, y, z\}$ per scrivere equazioni (integrali o differenziali rispettivamente) che riguardano il fluido ad essi associato



Volume di Controllo **Punto nello spazio**

Nelle equazioni di bilancio, in questo caso, compaiono esplicitamente termini legati sia a scambi *avvettivi* (coinvolgenti scambio di fluido) che *non avvettivi*.

Per la generica variabile intensiva c si ha

$$c = c\{x, y, z, t\}$$

e la sua derivata temporale è semplicemente la derivata parziale

$$\frac{\partial c}{\partial t}$$

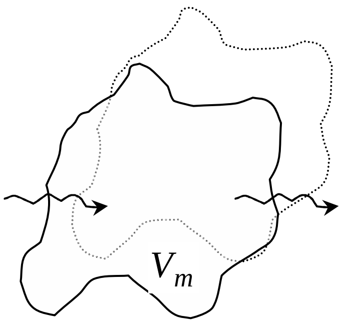
<u>Esempio</u>:

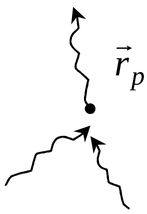
Il bilancio termico di una stanza con porte e finestre rappresenta una forma euleriana di bilancio di energia, perché è scritto facendo riferimento ad un volume ben definito.

♦ ***Punto di vista LAGRANGIANO (o materiale o sostanziale)***

Si fa riferimento ad una *massa di controllo* o ad una *particella materiale di fluido* (che si muovono quindi con la velocità del fluido rispetto al sistema di riferimento*)* per le quali si scrivono equazioni (integrali o differenziali rispettivamente) che riguardano il fluido ad esse associato

scambi non avvettivi





$$\vec{r}_p(t) = \{x_p(t), y_p(t), z_p(t)\}$$

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{w}_p = \vec{w}$$

Massa di Controllo **Particella**

Le equazioni in questo caso <u>non</u> coinvolgono esplicitamente termini legati a scambi avvettivi, perché gli scambi di fluido con l'esterno sono per definizione nulli.

Risulta:

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{w}_p = \vec{w} = velocità\ del\ \ fluido$$

Per la generica variabile intensiva $c[x_p(t), y_p(t), z_p(t), t]$ **si ha:**

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \dot{x}_p \frac{\partial c}{\partial x} + \dot{y}_p \frac{\partial c}{\partial y} + \dot{z}_p \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla c$$

dove Dc/Dt **è detta *derivata lagrangiana*.**

Esempio:

Il bilancio di energia su di una massa di fluido (ad es., 1 kg) che percorre un condotto rappresenta una forma lagrangiana di bilancio.

Si ha anche un punto di vista "generale" di cui quelli visti sono casi particolari $\vec{r}_{obs}(t) = \{x_{obs}(t), y_{obs}(t), z_{obs}(t)\}$ **(obs=osservatore generico)**

Esempio riassuntivo:

- **Monitorare la concentrazione di pesci nel tempo in diversi punti di un corso d'acqua (ad esempio da diversi pontili) traduce *un punto di vista euleriano*: si può ottenere una mappatura di valori di concentrazione in *n* punti ad *m* istanti temporali**

$$
\begin{array}{ccc}
c_1(t_1) = c(x_1, y_1, z_1, t_1) & \ldots & c_n(t_1) = c(x_n, y_n, z_n, t_1) \\
 & \ldots & \\
c_1(t_m) = c(x_1, y_1, z_1, t_m) & \ldots & c_n(t_m) = c(x_n, y_n, z_n, t_m)
\end{array}
$$

- **Monitorare la concentrazione dei pesci nel tempo a bordo di una barca che viene trasportata dalla corrente d'acqua senza scorrimento relativo traduce *un punto di vista lagrangiano*: si può ottenere un insieme di valori ad *m* istanti temporali**

$$c(t_1) = c\left[x_p(t_1), y_p(t_1), z_p(t_1), t_1\right] \qquad \ldots \qquad c(t_m) = c\left[x_p(t_m), y_p(t_m), z_p(t_m), t_m\right]$$

- **Monitorare la concentrazione dei pesci nel tempo a bordo di una barca a motore che segue un percorso arbitrario traduce *un punto di vista generale*: si può ottenere un insieme di valori ad *m* istanti temporali**

$$c(t_1) = c\left[x_{obs}(t_1), y_{obs}(t_1), z_{obs}(t_1), t_1\right] \quad \ldots \quad c(t_m) = c\left[x_{obs}(t_m), y_{obs}(t_m), z_{obs}(t_m), t_m\right]$$

3. Equazioni di bilancio in forma integrale

- ***Le equazioni di bilancio scritte in forma lagrangiana coincidono sostanzialmente con i principi di base della Fisica cui fanno riferimento***
  - **si considera una massa che non varia nel tempo**
  - **gli scambi avvengono solo per meccanismi *"non avvettivi"* (senza scambio di fluido) cioè di tipo *"diffusivo"***

- ***Le equazioni in forma euleriana possono essere ottenute* da quelle in forma lagrangiana *aggiungendo i termini di "flusso"* attraverso le superfici delle aperture che collegano il sistema all'esterno**
  - **si devono aggiungere i contributi dovuti all'ingresso e all'uscita di fluido**
  - **infatti, il fluido entrante o uscente trasporta con sé massa, quantità di moto, energia, …**

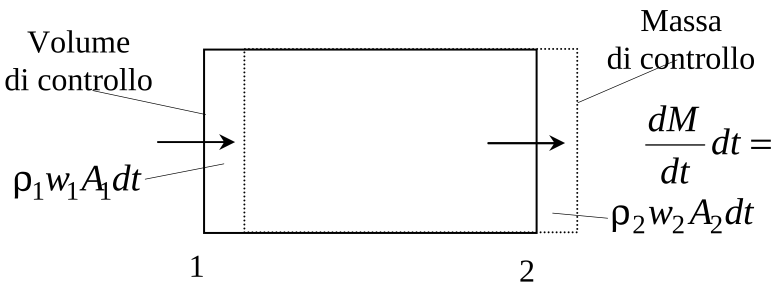
- ***Bilancio di massa:***

Per definizione, la massa di controllo non perde né acquista massa. Si considera un sistema aperto con N_j luci di entrata ed uscita del fluido

Forma Lagrangiana	Forma Euleriana
$\boxed{\dfrac{DM}{Dt}=0}$ **Con D/Dt intendiamo la derivata sulla "massa di controllo" $(d/dt)_{m.c.}$**	$\dfrac{dM}{dt}=\dfrac{DM}{Dt}-\int_S \rho\vec{w}\cdot\vec{n}dS$ $\int_S \rho\,\vec{w}\cdot\vec{n}dS=-\sum_{j=1}^{N_j} W_j$ $(assumiamo\ W_j>0\ se\ entrante)$ $\boxed{\dfrac{dM}{dt}=\sum_{j=1}^{N_j} W_j}$

Il termine $\int_S \rho\vec{w}\cdot\vec{n}dS$ rappresenta il netto dei contributi in uscita della massa. Scritto per N_j luci di comunicazione con l'esterno viene espresso come somma di portate.

Per un sistema continuo si ha: $\boxed{\int_V \dfrac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_S \rho\vec{w}\cdot\vec{n}dS=0}$



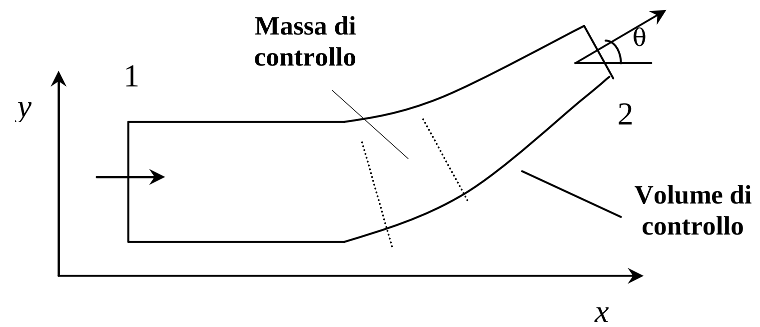
$$\frac{dM}{dt}dt = \frac{DM}{Dt}dt + \left(\rho_1 w_1 A_1 - \rho_2 w_2 A_2\right)dt$$

- ***Bilancio di quantità di moto***

Per la massa di controllo, l'equazione si riduce alla 2ª Legge della Dinamica

Forma Lagrangiana	Forma Euleriana
$\boxed{\dfrac{D\left(M\vec{w}\right)}{Dt} = M\,\dfrac{D\vec{w}}{Dt} = \sum_{k=1}^{N_F}\vec{F}_k}$	$\dfrac{d\left(M\vec{w}\right)}{dt} = \dfrac{D\left(M\vec{w}\right)}{Dt} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \vec{w}_j$ $\boxed{\dfrac{d\left(M\vec{w}\right)}{dt} = \sum_{k=1}^{N_F}\vec{F}_k + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \vec{w}_j}$

<u>Esempio: Fluido in un condotto curvo in moto stazionario</u>



Da un punto di vista euleriano, si ha:

$$\sum_{k=1}^{N_F}\vec{F}_k + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \vec{w}_j = 0$$

Questa relazione esprime che, non variando la quantità di moto nel tempo, forze e contributi in entrata ed uscita si devono fare equilibrio.

Le forze in gioco sono quelle di pressione sulle due aree terminali e quelle delle pareti. Trascureremo il peso (ad es., curva orizzontale).

$$\sum_{k=1}^{N_F} F_{k,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta + F_{p,x} \qquad \sum_{k=1}^{N_F} F_{k,y} = -p_2 A_2 \sin\theta + F_{p,y}$$

I contributi in ingresso ed uscita sono dati da:

$$\sum_{j=1}^{N_j} W_j w_{j,x} = \rho_1 A_1 w_1^2 - \rho_2 A_2 w_2^2 \cos\theta \qquad \sum_{j=1}^{N_j} W_j w_{j,y} = -\rho_2 A_2 w_2^2 \sin\theta$$

Si ha quindi:

$$\sum_{k=1}^{N_F} F_{k,x} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j w_{j,x} = 0 \Rightarrow p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta + F_{p,x} + \rho_1 A_1 w_1^2 - \rho_2 A_2 w_2^2 \cos\theta = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N_F} F_{k,y} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j w_{j,y} = 0 \Rightarrow -p_2 A_2 \sin\theta + F_{p,y} - \rho_2 A_2 w_2^2 \sin\theta = 0$$

Le forze di parete agenti sul fluido sono:

$$F_{p,x} = p_2 A_2 \cos\theta - p_1 A_1 + \rho_2 A_2 w_2^2 \cos\theta - \rho_1 A_1 w_1^2$$

$$F_{p,y} = p_2 A_2 \sin\theta + \rho_2 A_2 w_2^2 \sin\theta$$

Le forze applicate alle pareti del condotto dal fluido sono uguali ed opposte a quelle applicate dal fluido al condotto:

$$R_x = -F_{p,x} \qquad R_y = -F_{p,y}$$

In forma lagrangiana, considerata una massa che attraversa il condotto, potremmo considerare le forze ad essa applicate in ogni configurazione come responsabili della variazione della sua q. di moto:

- **pressione**
- **sforzi tangenziali**
- **peso**

L'equazione di bilancio della quantità di moto in forma integrale euleriana può essere scritta con maggiore generalità:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho \vec{w}\, dV}_{\text{variazione temporale}} + \underbrace{\int_S \vec{w} \rho \vec{w} \cdot \vec{n}\, dS}_{\text{contributi in ingresso ed uscita}} = \underbrace{\int_S \vec{f}_s\, dS}_{\text{forze superficiali}} + \underbrace{\int_V \rho \vec{g}\, dV}_{\text{forza di massa}}$$

in cui $\vec{f}_S$ **rappresenta la forza superficiale specifica agente sull'elemento di superficie** dS**.**

- ***Bilancio di energia (termica + meccanica):***

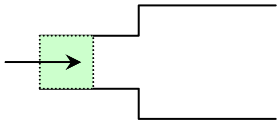
Per la massa di controllo si ha il 1° Principio della Termodinamica

Si considera l'energia totale, termica più meccanica, $E = Me = M\left(u + w^2/2 + gz\right)$

Forma Lagrangiana	**Forma Euleriana**
$\boxed{\frac{DE}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} - \frac{DL}{Dt}}$ $\frac{DL}{Dt} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{albero} + \left(\frac{dL}{dt}\right)_{f.normali} + \left(\frac{dL}{dt}\right)_{f.tang.}$ $\frac{DQ}{Dt} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{ext} + \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{gen}$	$\frac{dE}{dt} = \frac{DE}{Dt} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \left(u_j + \frac{w_j^2}{2} + gz_j\right)$ $\frac{DL}{Dt} = \frac{dL}{dt} - \sum_{j=1}^{N_j} W_j (pv)_j$ $\frac{DQ}{Dt} = \frac{dQ}{dt}$ $\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dL}{dt} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \left[u_j + \frac{w_j^2}{2} + gz_j + (pv)_j\right]}$ $\frac{dE}{dt} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{ext} + \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{gen} - \left(\frac{dL}{dt}\right)_{albero} - \left(\frac{dL}{dt}\right)_{f.normali} - \left(\frac{dL}{dt}\right)_{f.tang.} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \left[u_j + \frac{w_j^2}{2} + gz_j + (pv)_j\right]$

Il *lavoro di pulsione* è il prodotto *pv* e rappresenta il lavoro fatto sul sistema o sull'esterno quando il fluido attraversa una delle luci di ingresso o uscita. Si ha:

$pdV = pwAdt = (pv)\rho wAdt = (pv)Wdt$



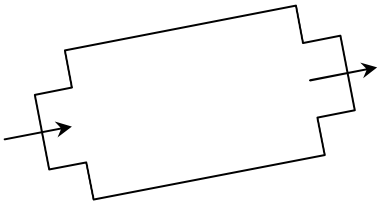
$h = entalpia = u + pv$

Un modo equivalente di vedere le cose è scrivere direttamente il bilancio per un sistema continuo:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho\, e\, dV}_{\substack{variazione\\ temporale\\ dell'energia}} = \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{\substack{variazione\ temporale\\ della\ quantità\\ di\ calore}} - \underbrace{\frac{dL}{dt}}_{\substack{variazione\ temporale\\ del\ lavoro\ verso\\ l'esterno}} - \underbrace{\int_S (e+pv)\rho\vec{w}\cdot\vec{n}\, dS}_{\substack{trasporto\ dell'energia\\ dovuto\ al\ moto\ del\ fluido\\ in\ uscita}}$$

in cui $e = u + \frac{w^2}{2} + gz$ **.**

Per un sistema stazionario con una entrata ed una uscita si ha:



$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dL}{dt} = \int_S \left(pv + u + \frac{w^2}{2} + gz \right) \rho\vec{w}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dL}{dt} = \left[p_2 v_2 + u_2 + \frac{w_2^2}{2} + gz_2 \right] W - \left[p_1 v_1 + u_1 + \frac{w_1^2}{2} + gz_1 \right] W$$

Dalla conservazione della massa si ha infatti: $W_1 = W_2 = W$ **. Per un *fluido incomprimibile*, dividendo ambo i membri per *W*, cioè ragionando in termini di una massa unitaria che fluisce nel sistema (punto di vista lagrangiano) si ha:**

$$q - l = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + u_2 - u_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

$$-l = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \underbrace{u_2 - u_1 - q}_{\substack{differenza\ tra\\ l'aumento\ di\ energia\ interna\\ ed\ il\ calore\ ceduto\\ =gH_L}}$$

Il termine gH_L **rappresenta la perdita di carico derivante dalla conversione di energia meccanica in termica.**

Per fluido incomprimibile ed inviscido in assenza di lavoro si ha:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0$$

che rappresenta una forma del *teorema di Bernoulli* per fluido incomprimibile ed inviscido:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho w_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho w_2^2 + \rho g z_2 = cost.$$

Esso stabilisce che:

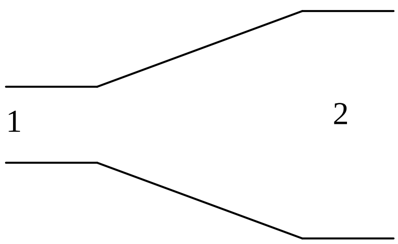
La somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante in tutti i punti di un tubo di flusso elementare di un fluido non viscoso, incomprimibile e in condizioni di regime.

Si può esprimere anche nella forma:

$$\underbrace{z}_{\substack{altezza\\geometrica}} + \underbrace{\frac{p}{\rho g}}_{\substack{alezza\\piezometrica}} + \underbrace{\frac{w^2}{2g}}_{\substack{altezza\\cinetica}} = cost$$

<u>Applicazioni del T. di Bernoulli per fluido incomprimibile:</u>

a) Variazioni di sezione in condotti



Dal T. di Bernoulli si ha

$$\frac{1}{2}\rho w_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho w_2^2 + p_2$$

Per la conservazione della massa in condizioni stazionarie

$$\rho w_1 A_1 = \rho w_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{A_1}{A_2} w_1 < w_1$$

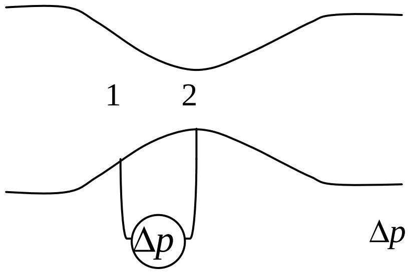
Perciò:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(w_1^2 - w_2^2\right) = p_1 + \frac{1}{2}\rho w_1^2\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] > p_1$$

Perciò in un allargamento (diffusore) la pressione aumenta grazie ad una corrispondente diminuzione di energia cinetica.

Dalle formule precedenti si nota che in un restringimento la pressione diminuisce perché l'energia cinetica aumenta (basta invertire il verso della velocità).

b) Il tubo di Venturi



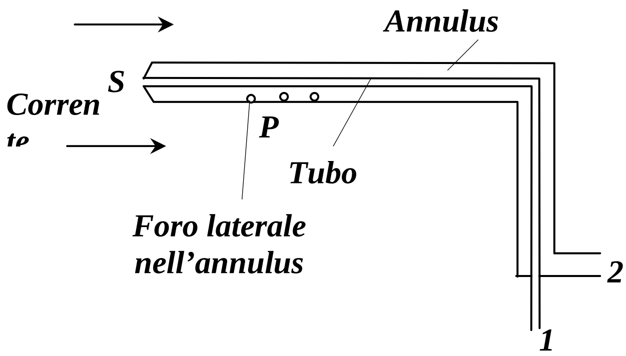
Lo scopo è misurare la portata nel condotto sulla base della variazione della pressione. Si ha ancora:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho w_1^2\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] < 0$$

Essendo $Q = w_1 A_1$ ***cambiando segno si ha***

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{A_1^2}\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(1/A_2^2 - 1/A_1^2\right)}}$$

c) Il tubo di Pitot

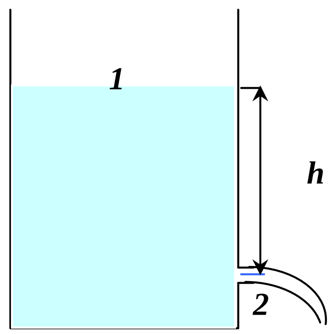


Lo scopo è misurare la velocità della corrente fluida. In S la velocità è nulla per cui:

$$p_s = \frac{1}{2}\rho w^2 + p$$

I forellini sull'annulus permettono la misura di p ***in 2 mentre*** p_s ***è misurato in 1. Se ne deduce*** w***.***

d) Teorema di Torricelli



Si deve calcolare la velocità di uscita di un getto d'acqua proveniente da un recipiente con un'apertura. Applicando il T. di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2 si ha:

$$p_{atm} + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho w_1^2 = p_{atm} + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho w_2^2$$

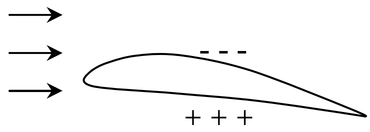
Essendo

$$z_1 - z_2 = h \qquad\qquad w_1 \approx 0$$

si ha

$$w_2 = \sqrt{2gh}$$

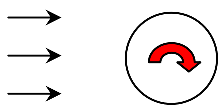
e) Portanza su di un profilo alare



Il fluido si muove più velocemente lungo la parte convessa e più lentamente lungo quella concava.

La pressione perciò è più elevata sulla superficie inferiore che su quella superiore, dando luogo ad una forza diretta verso l'alto (*portanza*).

f) Corpi rotanti in correnti fluide



Un cilindro rotante in una corrente di fluido tende a fare aumentare la velocità del fluido su di un lato e a farla diminuire sull'altro, con un corrispondente effetto sulla pressione che dà luogo ad una forza trasversale.

- **<u>Momento della quantità di moto</u>**

Dalla Fisica Generale sappiamo che la derivata temporale del momento angolare di un sistema è pari al momento delle forze agenti su di esso

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}$$

Nel caso di un punto materiale si ha

$$\vec{K} = \vec{r} \times M\vec{w} \qquad \textbf{e} \qquad \vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

in cui il simbolo $\times$ indica il prodotto vettoriale.

Una relazione analoga vale anche per i fluidi ed è importante nel caso di sistemi rotanti (pompe, turbine, ecc.). Essa può essere ottenuta in analogia al bilancio di quantità di moto

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \vec{r} \times \rho\,\vec{w}\,dV}_{\substack{\textit{variazione}\\ \textit{temporale}}} + \underbrace{\int_S \vec{r} \times \vec{w}\,\rho\,\vec{w}\cdot\vec{n}\,dS}_{\substack{\textit{contributi in}\\ \textit{ingresso ed}\\ \textit{uscita}}} = \underbrace{\int_S \vec{r} \times \vec{f}_s\,dS}_{\textit{forze superficiali}} + \underbrace{\int_V \vec{r} \times \rho\,\vec{g}\,dV}_{\textit{forza di massa}}$$

Nel caso di sistemi che ruotano intorno ad un'asse (ad es., pompe, turbine, ecc.) in cui una portata di fluido entra ed esce dal sistema a raggi diversi, in condizioni stazionarie, trascurando l'effetto del peso si ha:

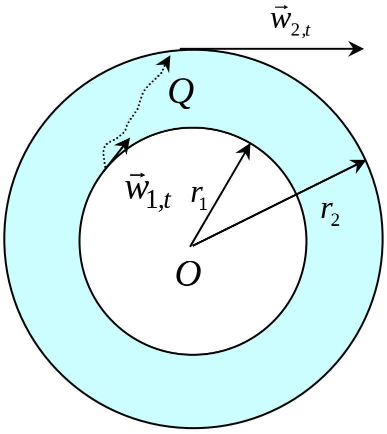
$$\underbrace{\int_S \vec{r} \times \vec{w}\,\rho\,\vec{w}\cdot\vec{n}\,dS}_{\substack{\textit{contributi in}\\ \textit{ingresso ed}\\ \textit{uscita}}} = \underbrace{\int_S \vec{r} \times \vec{f}_s\,dS}_{\textit{forze superficiali}}$$

Il secondo membro di questa relazione, rappresentando il momento delle forze agenti sul fluido, può essere interpretato anche come il momento ("coppia") $\vec{\mathcal{M}}$ che è necessario applicare per mantenere in rotazione con velocità angolare costante il sistema.

Il primo membro rappresenta invece la variazione del momento angolare del fluido tra ingresso ed uscita.

Con riferimento alla figura, nell'ipotesi di flusso verso l'esterno (pompa), la relazione precedente diventa

$$\left|\vec{\mathcal{M}}\right| = \rho Q\left(r_2 w_{2,t} - r_1 w_{1,t}\right) \qquad (°)$$



in cui Q **è la portata volumetrica che attraversa il sistema e** $w_{1,t}$ **e** $w_{2,t}$ **sono le velocità *tangenziali assolute* del fluido al raggio intero ed esterno.**

Il motivo per cui solo le velocità tangenziali compaiono nella formula è ovviamente legato al fatto che il momento della quantità di moto rispetto al punto *O*, essendo definito come il prodotto vettoriale del raggio vettore per la quantità di moto, non è in alcun modo influenzato dalla presenza di una componente radiale. Si ricorda infatti che si ha

$$\left|\vec{r} \times \vec{w}\right| = r\, w \left|\sin\varphi\right|$$

in cui φ **è l'angolo compreso tra i due vettori. La formula (°) si presta a trattare casi diversi, includendo quello di una pompa (v. figura) o di una turbina, in cui si può pensare che il flusso avvenga dall'esterno verso l'interno:**

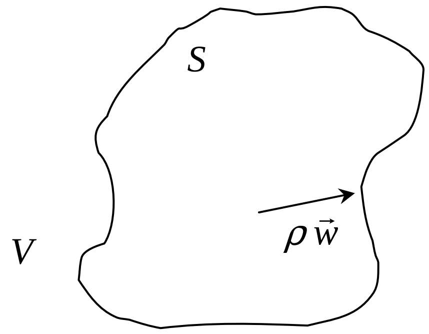
- **nel caso della pompa, il momento applicato alla "girante" è "motore", in quanto concorde alla velocità angolare di rotazione**
- **nel caso della turbina il momento applicato al "rotore" è "resistente", in quanto discorde con la velocità angolare**

Nel primo caso, infatti, il fluido riceve energia che verrà opportunamente trasformata in un carico di pressione; nel secondo è il fluido a cedere energia per mantenere in rotazione il rotore soggetto ad un carico esterno (ad. es., coppia di una macchina elettrica)

Molti problemi possono essere risolti in base a considerazioni simili alle precedenti. Nel caso di turbomacchine, è consigliabile disegnare i vettori che rappresentano le velocità del fluido sia assolute e che relative in modo da comprendere esattamente le loro mutue relazioni, considerando anche la forma delle palette.

4. Equazioni di bilancio in forma differenziale

- **<u>Bilancio di massa</u>**
  Considerato un volume *V* delimitato da una superficie chiusa *S*, la variazione della massa nel tempo è uguale al flusso del fluido attraverso la superficie esterna.



$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_S \rho \vec{w}\cdot\vec{n} dS$$

ovvero

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{w}\cdot\vec{n} dS = 0$$

Applicando il Teorema della divergenza (di Gauss) si ha:

$$\int_S \rho \vec{w}\cdot\vec{n} dS = \int_V \nabla\cdot\rho\vec{w}\, dV$$

Perciò:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\vec{w}\right] dV = 0$$

Poiché il volume considerato è arbitrario, deve essere:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\vec{w} = 0}$$

Nell'equazione si riconoscono:

- **il termine di variazione temporale;**
- **il termine di flusso legato al moto del fluido.**

Si ha:

$$\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{w} = \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) + w_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + w_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + w_z\frac{\partial \rho}{\partial z}$$
$$= \rho\nabla\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\nabla\rho$$

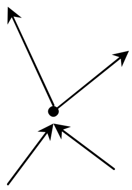
Perciò, si ha:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\nabla\rho = 0 \;\Rightarrow\; \nabla\cdot\vec{w} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{w}\cdot\nabla\rho\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

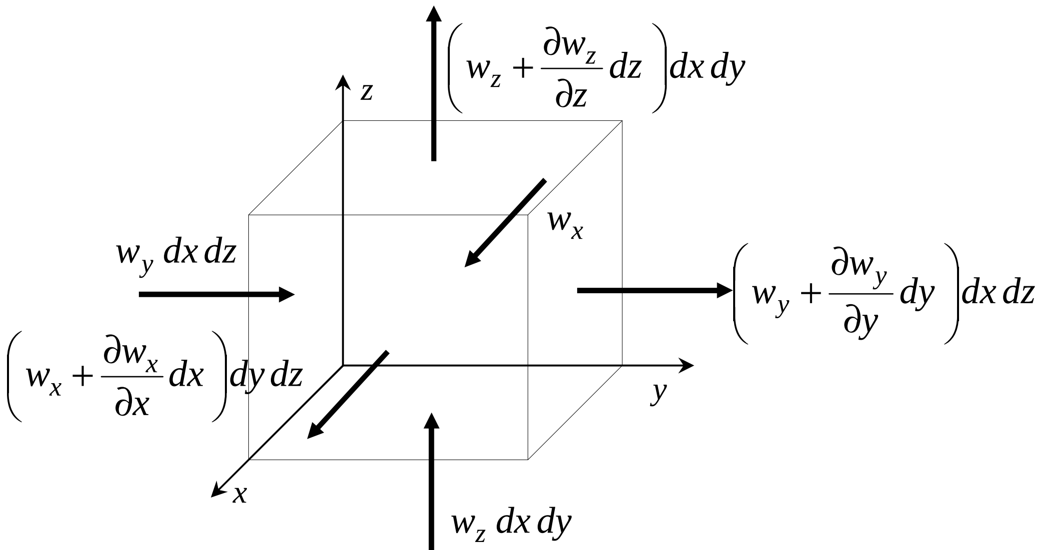
Per fluido incomprimibile si ha dunque:

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{w} = 0}$$

Questa equazione ha un significato intuitivo:



in un fluido incomprimibile la somma delle portate entranti in un volume infinitesimo è uguale alla somma delle portate uscenti



$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

- **<u>Bilancio di quantità di moto</u>**
  Riprendiamo l'equazione scritta in termini integrali

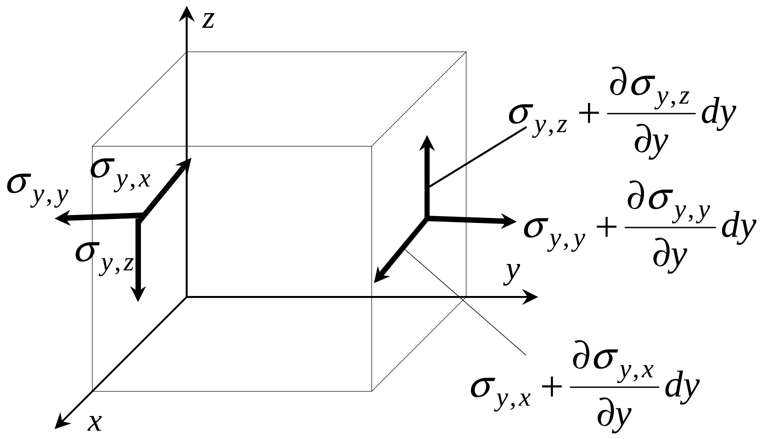
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho \vec{w}\, dV}_{\substack{\text{variazione}\\ \text{temporale}}} + \underbrace{\int_S \vec{w}\rho\vec{w}\cdot\vec{n}\, dS}_{\substack{\text{contributi in}\\ \text{ingresso ed}\\ \text{uscita}}} = \underbrace{\int_S \vec{f}_s\, dS}_{\text{forze superficiali}} + \underbrace{\int_V \rho\vec{g}\, dV}_{\text{forza di massa}}$$

Le forze agenti sulla superficie esterna del volume possono essere calcolate tendendo conto che in un continuo deformabile gli sforzi locali sono rappresentati dal *tensore degli sforzi di Cauchy*

Il tensore degli sforzi, $\vec{\vec{\sigma}}$ è costituito da 9 componenti $\sigma_{i,j}$

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z} \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_{z,z} \end{bmatrix}$$

che rappresentano gli sforzi agenti sulla superficie la cui normale è parallela all'asse *i*-esimo nella direzione positiva dell'asse *j*-esimo



La figura riporta le componenti del tensore degli sforzi sulle superfici ortogonali all'asse *y* di un volume elementare. Sulle altre facce la distribuzione è simile.

Si nota che sulla faccia che ha normale opposta al versore dell'asse le componenti del tensore sono dirette in senso opposto ai rispettivi assi.

Nonostante le componenti del tensore siano 9, solo 6 sono indipendenti perché *il tensore è simmetrico*; se così non fosse potrebbero sorgere accelerazioni angolari infinite:

$$\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$$

La forza per unità di area agente su ogni superficie *S* di normale $\vec{n}$ è:

$$\vec{f}_s = \vec{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}}$$

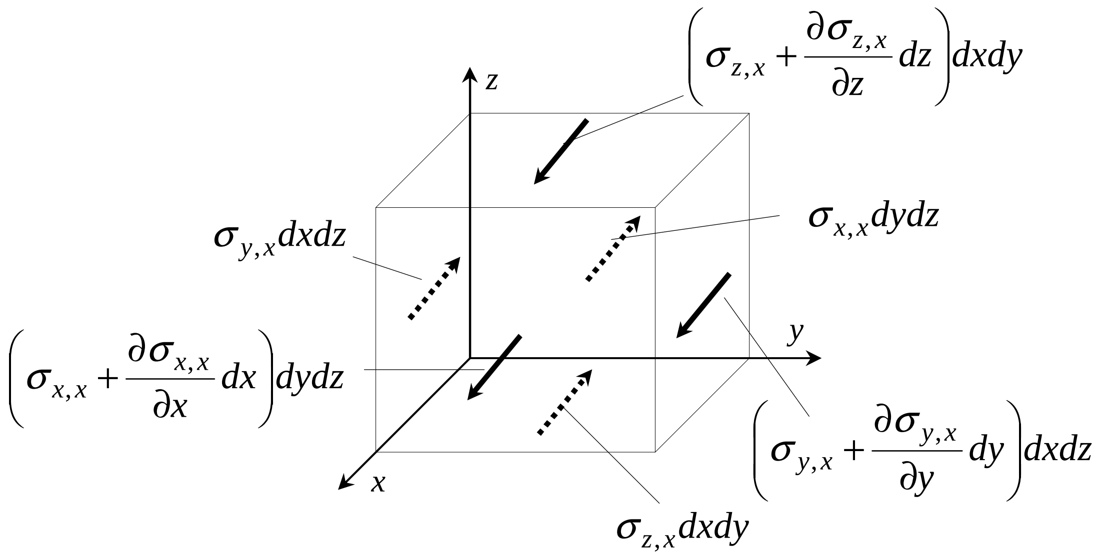
Se si esegue quindi un bilancio per la quantità di moto lungo l'asse *x* in un volume elementare di spigoli *dx*, *dy*, *dz*, che si esprime nella forma:

$$\begin{pmatrix} variazione\ temporale \\ della\ q.di\ m.\ lungo\ x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} netto\, dei\ contributi \\ avvettivi\,(in\, uscita)\, della \\ q.di\, m.\ lungo\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} somma\, delle\ forze \\ agenti\, sul\, sistema \end{pmatrix}$$

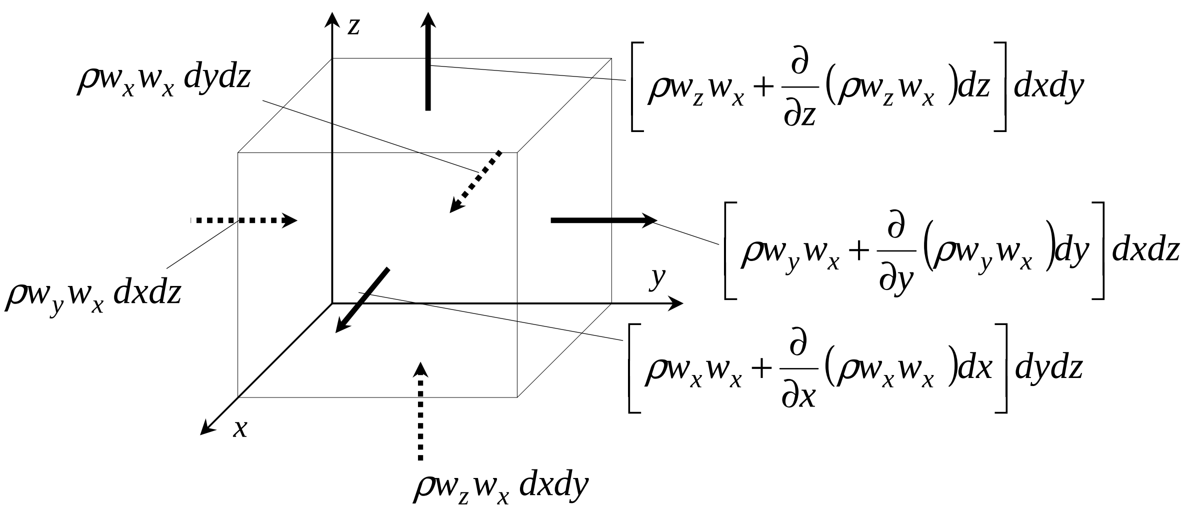
I contributi avvettivi sono rappresentati dalle portate in ingesso ed uscita da ciascuna faccia del volume elementare per la velocità lungo x.

Le forze agenti sul sistema sono la forza di massa e il netto delle forze superficiali.

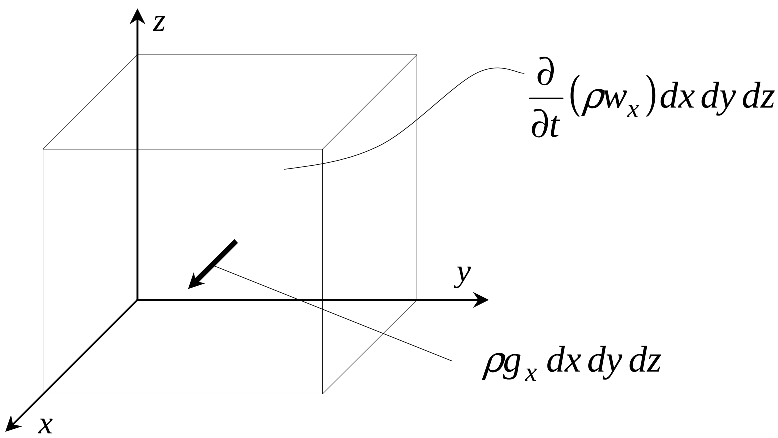
Le figure seguenti chiariscono la situazione.



Forze superficiali agenti sul volume elementare nella direzione x



Contributi avvettivi (dovuti al moto del fluido) alla quantità di moto lungo x nel volume elementare



Variazione per unità di tempo della quantità di moto lungo x e contributo della forza di massa lungo x nel volume elementare

Risulta quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w_x)dx\,dy\,dz = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x w_x)dx\,dy\,dz - \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y w_x)dx\,dy\,dz - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z w_x)dx\,dy\,dz$$
$$+\frac{\partial \sigma_{x,x}}{\partial x}dx\,dy\,dz + \frac{\partial \sigma_{y,x}}{\partial y}dx\,dy\,dz + \frac{\partial \sigma_{z,x}}{\partial z}dx\,dy\,dz + \rho g_x dx\,dy\,dz$$

e quindi

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho w_x)}_{\substack{\textit{variazione}\\ \textit{temporale}\\ \textit{della q.di.m.}\\ \textit{lungo } x}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y w_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z w_x)}_{\substack{\textit{differenza tra gli apporti della q.di m. lungo } x \textit{ in ingresso ed uscita}\\ \textit{dalle superfici normali agli assi coordinati del volume elementare}}}$$
$$= \underbrace{\frac{\partial \sigma_{x,x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y,x}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z,x}}{\partial z}}_{\substack{\textit{variazione delle componenti di } \vec{\vec{\sigma}}\\ \textit{lungo } x \textit{ sulle superfici del volume}\\ \textit{elementare}}} + \underbrace{\rho g_x}_{\substack{\textit{forza peso}\\ \textit{per unità di volume}\\ \textit{lungo } x}}$$

Il primo membro dell'equazione può essere elaborato come segue

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y w_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z w_x)$$
$$= w_x \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}$$
$$+ w_x \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_x \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) + \rho w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}$$
$$= w_x \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z)\right]$$
$$+ \rho \left[\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}\right]$$
$$= w_x \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w})\right]}_{\substack{=0 \textit{ per l'equazione}\\ \textit{di continuità}}} + \rho \underbrace{\left[\frac{\partial w_x}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla w_x\right]}_{\substack{= \textit{derivata lagrangiana}\\ \textit{di } w_x}}$$

Perciò si ha

$$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{x,x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y,x}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z,x}}{\partial z} + \rho g_x$$

e, considerando tutte le componenti,

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \rho \vec{g}}$$

La precedente rappresenta la forma lagrangiana dell'equazione del moto equivalente alla seconda Legge della Dinamica.

Scritta per componenti l'equazione assume la forma

$$\rho\left[\frac{\partial w_x}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}\right]=\frac{\partial\sigma_{x,x}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{y,x}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{z,x}}{\partial z}+\rho g_x$$

$$\rho\left[\frac{\partial w_y}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}\right]=\frac{\partial\sigma_{x,y}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{y,y}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{z,y}}{\partial z}+\rho g_y$$

$$\rho\left[\frac{\partial w_z}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}\right]=\frac{\partial\sigma_{x,z}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{y,z}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{z,z}}{\partial z}+\rho g_z$$

In fluidodinamica il tensore degli sforzi viene poi decomposto in una *componente viscosa ad una di pressione*:

$$\boxed{\vec{\vec{\sigma}}=\vec{\vec{\tau}}-p\vec{\vec{I}}}$$

$$\vec{\vec{\sigma}}=\begin{bmatrix}\sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z}\\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z}\\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_{z,z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_{x,x} & \tau_{x,y} & \tau_{x,z}\\ \tau_{y,x} & \tau_{y,y} & \tau_{y,z}\\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & \tau_{z,z}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p & 0 & 0\\ 0 & p & 0\\ 0 & 0 & p\end{bmatrix}$$

La componente viscosa, $\vec{\vec{\tau}}$ è nulla se il fluido non è viscoso o non è in moto. La componente di pressione è diversa da zero anche in condizioni statiche.

Sostituendo nelle precedenti si ha:

$$\rho\left[\frac{\partial w_x}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}\right]=\frac{\partial\tau_{x,x}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{y,x}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{z,x}}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x$$

$$\rho\left[\frac{\partial w_y}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}\right]=\frac{\partial\tau_{x,y}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{y,y}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{z,y}}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y$$

$$\rho\left[\frac{\partial w_z}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}\right]=\frac{\partial\tau_{x,z}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{y,z}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{z,z}}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z$$

che in forma vettoriale diventa:

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{w}}{Dt}=\nabla\cdot\vec{\vec{\tau}}-\nabla p+\rho\vec{g}}$$

E' interessante notare che per $\vec{w}=0$ sia ottiene la legge di Stevino già vista nella statica dei fluidi:

$$\boxed{\nabla p=\rho\vec{g}}$$

Invece, per <u>**fluido inviscido**</u> $\left(\vec{\vec{\tau}}=0\right)$ **si ottengono le** ***equazioni di Eulero*****:**

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{w}}{Dt}=-\nabla p+\rho\vec{g}}$$

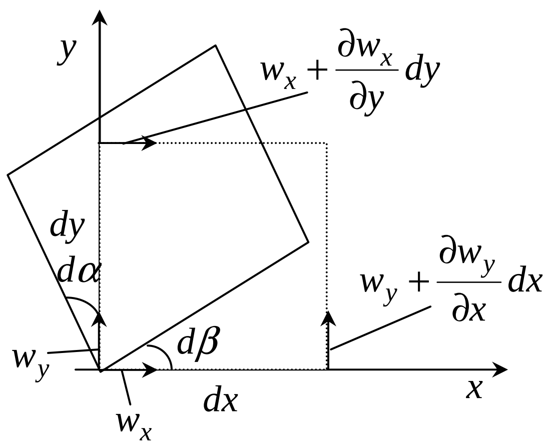
Da queste equazioni è possibile ottenere una ***forma generalizzata del teorema di Bernoulli*** **valida per fluido comprimibile** ***lungo una linea di flusso o tra due punti qualunque in moto se il moto è irrotazionale*****:**

$$\boxed{\frac{w_2^2-w_1^2}{2}+\int_1^2\frac{dp}{\rho}+g\left(z_2-z_1\right)=0}$$

Le Equazioni di Navier-Stokes

Se il ***fluido è viscoso, newtoniano e in moto laminare*** **esiste una relazione lineare tra la componente viscosa del tensore degli sforzi e le derivate spaziali della velocità.**

Per meglio comprendere la forma riflettiamo sul modo in cui il fluido si deforma e ruota per azione degli sforzi cui è sottoposto.



Dato l'elemento infinitesimo di fluido quadrato in figura, le rotazioni (in senso antiorario) $d\alpha$ **e** $d\beta$ **dei lati inizialmente sugli assi coordinati nell'intervallo di tempo** dt **sono date da:**

$$d\alpha=-\underbrace{\left[\left(w_x+\frac{\partial w_x}{\partial y}dy\right)dt-w_x dt\right]}_{\text{spostamento relativo infinitesimo del vertice inizialmente in (0,dy)}}\frac{1}{\underbrace{dy}_{\text{raggio}}}\qquad d\beta=\underbrace{\left[\left(w_y+\frac{\partial w_y}{\partial x}dx\right)dt-w_y dt\right]}_{\text{spostamento relativo infinitesimo del vertice inizialmente in }(dx,0)}\frac{1}{\underbrace{dx}_{\text{raggio}}}$$

cioè

$$d\alpha=-\frac{\partial w_x}{\partial y}dt\qquad d\beta=\frac{\partial w_y}{\partial x}dt$$

Le velocità di rotazione dei due lati sono quindi:

$$\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{\partial w_x}{\partial y}\qquad \frac{d\beta}{dt}=\frac{\partial w_y}{\partial x}$$

La *velocità di rotazione* media dell'elemento in senso antiorario è quindi:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\beta}{dt}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)$$

La *velocità di deformazione* media dell'elemento è invece

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\beta}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial x}\right)$$

Il tensore $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1,2,3)$ può quindi essere decomposto *in una parte simmetrica,* che esprime la *deformazione* dell'elemento di fluido, ed una *antisimmetrica,* che ne esprime la *rotazione*

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}-\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)=e_{i,j}+\Omega_{i,j}\ \ (i, j = x, y, z)$$

$$e_{i,j}=e_{j,i} \qquad\qquad \Omega_{i,j}=-\Omega_{j,i}\ \ (i, j = x, y, z)$$

Per un fluido newtoniano in moto laminare si assume che esista *una relazione lineare tra la componente viscosa del tensore degli sforzi ed il tensore di deformazione*. La forma completa di questa relazione è:

$$\tau_{i,j}=2\mu e_{i,j}+\left[\mu'-\frac{2}{3}\mu\right](\nabla\cdot\vec{w})\delta_{i,j} \qquad (i, j = x, y, z)$$

in cui μ' è detta *bulk viscosity* che è nulla per gas monoatomici, piccola per fluidi densi e viene generalmente trascurata

Introducendo questa formula nell'equazione di bilancio della quantità di moto

$$\rho\frac{D\vec{w}}{Dt}=\nabla\cdot\vec{\vec{\tau}}-\nabla p+\rho\vec{g}$$

si ha (si pone $\mu'=0$)

$$\rho\frac{Dw_x}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial w_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{w})\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\right]+\rho g_x$$

ed analoghe per le altre componenti

Assumendo ora che la *densità e la viscosità siano costanti*, si ha:

$$\mu = cost. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\mu \circ = \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\circ, \qquad \rho = cost. \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{w} = 0$$

$$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_y}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w_z}{\partial z \partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right)$$

$$+ \mu \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)}_{= \nabla \cdot \vec{w} = 0} + \rho g_x$$

perciò $$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x + \rho g_x$$

e, in forma vettoriale, si ha

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = \mu \nabla^2 \vec{w} - \nabla p + \rho \vec{g}}$$ ***(eq. di Navier-Stokes)***

- **Le *condizioni al contorno* con una *parete rigida e impermeabile* in moto con velocità sono quelle di “no slip” cioè nessuno scorrimento**
- **E’ importante riconoscere il significato dei termini che appaiono nelle equazioni**

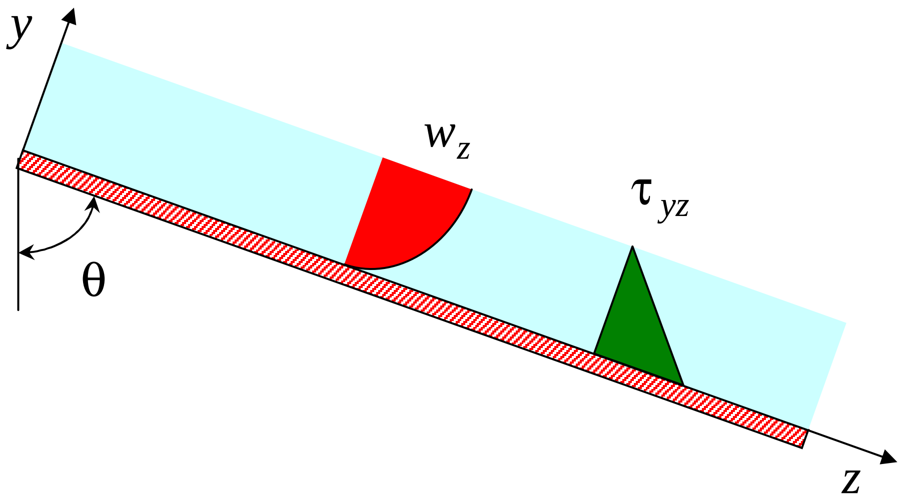
$$\underbrace{\rho \frac{D\vec{w}}{Dt}}_{\text{termine di inerzia}} = \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{w}}_{\substack{\text{termine dovuto} \\ \text{alle forze viscose}}} - \underbrace{\nabla p}_{\substack{\text{termine dovuto} \\ \text{alle forze di pressione}}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\substack{\text{termine dovuto} \\ \text{alla forza di massa}}}$$

- **In assenza di sforzi viscosi (viscosità trascurabile) si ottengono nuovamente le equazioni di Eulero**

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}}$$ ***(eq. di Eulero)***

Applicazioni delle equazioni di Navier-Stokes

Moto di un film libero su piano inclinato



- **Un fluido incomprimibile scorre in moto laminare stazionario lungo una piastra inclinata**
- **Essendo, evidentemente,** $w_x = w_y = 0$ **l'unica equazione rilevante è quella relativa all'asse z**

$$\rho\left[\frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z + \rho g_z$$

- **La parete è molto larga rispetto allo spessore del film ed è sufficientemente lunga da rendere rappresentative le condizioni asintotiche, cioè**

$$\frac{\partial w_z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

da cui si ha

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \rho g_z = 0$$

- **Si assume, inoltre, che la distribuzione di pressione nel film sia uguale a quella (idrostatica) nel gas esterno**

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_g g_z = \rho_g g \cos\theta$$

- **Si ha, dunque**

$$\mu \frac{d^2 w_z}{dy^2} = -\left(\rho - \rho_g\right) g \cos\theta$$

- **Integrando si ha:**

$$w_z(y) = -\frac{\left(\rho - \rho_g\right) g \cos\theta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

- **Le condizioni al contorno esprimono la condizione di "no-slip" sulla parete e di film libero per** $y = \delta = spessore\ \ del\ \ film$

$$w_z(0) = 0 \qquad\qquad \mu \left.\frac{dw_z}{dy}\right|_{y=\delta} = \tau(\delta) = 0$$

da cui $\qquad C_2 = 0 \qquad\qquad C_1 = \dfrac{\left(\rho - \rho_g\right) g \cos\theta}{\mu}\delta$

e quindi $\qquad w_z(y) = \dfrac{\left(\rho - \rho_g\right) g \cos\theta\, \delta^2}{2\mu}\left(2\dfrac{y}{\delta} - \dfrac{y^2}{\delta^2}\right)$

Si ha anche:

$$\tau_{yz}(y) = \mu \frac{\partial w_z}{\partial y} = \left(\rho - \rho_g\right) g \cos\theta\, \delta \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)$$

- **Mediando su** $0 \le y \le \delta$**, si ha:**

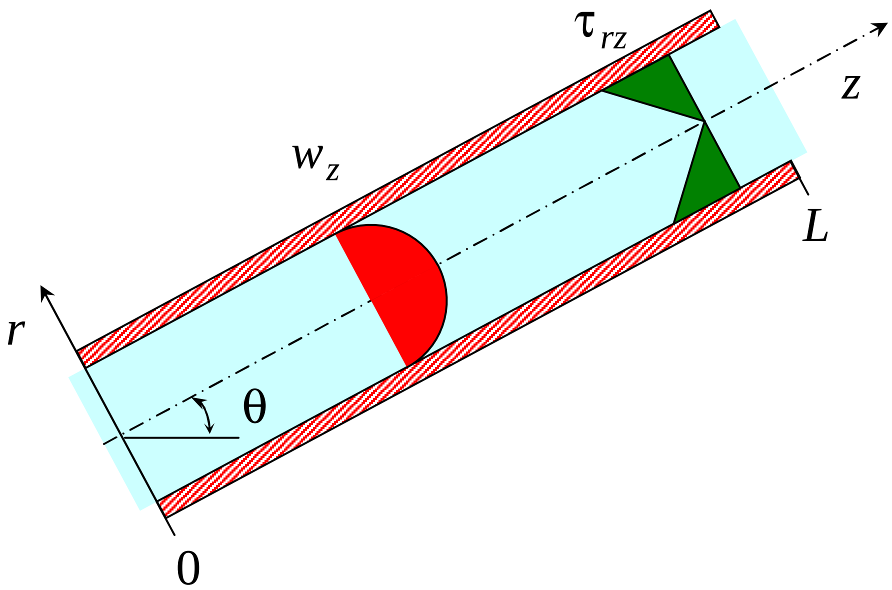
$$\overline{w}_z = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta w_z(y) dy = \frac{\left(\rho - \rho_g\right) g \cos\theta\, \delta}{2\mu}\int_0^\delta \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy$$

$$= \frac{\left(\rho - \rho_g\right) g \cos\theta\, \delta}{2\mu}\left[\frac{y^2}{\delta} - \frac{y^3}{3\delta^2}\right]_0^\delta = \frac{\left(\rho - \rho_g\right) g \cos\theta\, \delta^2}{3\mu}$$

- **La portata per unità di perimetro della piastra e il numero di Reynolds del film sono dati da:**

$$\Gamma = \rho \overline{w}_z \delta = \frac{\rho\left(\rho - \rho_g\right) g \cos\theta\, \delta^3}{3\mu} \qquad\qquad Re = \frac{4\Gamma}{\mu}$$

Moto di Poiseuille in un tubo circolare



- **Si tratta del moto stazionario di un fluido incomprimibile in un tubo inclinato, lontano dalla sezione di imbocco, in condizioni di simmetria assiale. Si ha:**

$$w_r = w_\varphi = 0 \qquad \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

- **Si ha, perciò:**

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z + \rho g_z = 0$$

ovvero

$$\mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z$$

- **Ponendo**

$$\mathcal{P} = p - \rho g_z z$$

si elimina formalmente il termine gravitazionale ottenendo

$$\mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{dw_z}{dr} \right) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = \frac{\mathcal{P}_L - \mathcal{P}_0}{L}$$

in cui si è assunto implicitamente che il gradiente di pressione non vari con r **e** z

- **Integrando, si ottiene**

$$r\frac{\partial w_z}{\partial r}=\frac{\mathcal{P}_L-\mathcal{P}_0}{\mu L}\frac{r^2}{2}+C_1 \qquad\qquad w_z(r)=\frac{\mathcal{P}_L-\mathcal{P}_0}{\mu L}\frac{r^2}{4}+C_1\ln r+C_2$$

- **Le condizioni al contorno richiedono**

$$w_z(r)\ \textit{limitata per}\ r\to 0 \qquad \textbf{e} \qquad w_z(R)=0$$

da cui si ottiene

$$C_1=0 \qquad\qquad C_2=-\frac{\mathcal{P}_L-\mathcal{P}_0}{\mu L}\frac{R^2}{4}=\frac{\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L}{\mu L}\frac{R^2}{4}$$

e quindi

$$w_z(r)=\frac{(\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

- **Lo sforzo di taglio è dato da**

$$\tau_{rz}(r)=\mu\frac{dw_z}{dr}=-\frac{\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L}{2L}r$$

- **La velocità massima e quella media sulla sezione sono date da**

$$w_{z,\max}=w_z(0)=\frac{(\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}$$

$$\overline{w}_z=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\frac{(\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\,dr=\frac{(\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L)}{2\mu L}\int_0^R\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr$$

$$=\frac{(\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L)}{2\mu L}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^4}{4R^2}\right)=\frac{(\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L)R^2}{8\mu L}$$

- **La portata volumetrica risulta quindi**

$$Q=\pi R^2\overline{w}_z=\frac{\pi(\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L)R^4}{8\mu L}$$ ***(legge di Poiseuille-Hagen)***

Si nota che nel moto laminare in un *tubo la portata è proporzionale alla caduta di pressione,* cosa che permette di stabilire un'analogia con la legge di Ohm per la conduzione elettrica

- **Per la valutazione pratica *delle perdite di carico per attrito distribuito* in condotti di solito si fa uso di formule del tipo**

$$\boxed{\frac{\Delta p}{L} = \frac{f}{D}\frac{1}{2}\rho\overline{w}_z^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p = f\,\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho\overline{w}_z^2}$$

(formula di Darcy-Weisbach)

in cui f è il *fattore di attrito (o di Darcy-Weisbach)*

- **Dalla relazione per $\overline{w}_z$ si ha**

$$\frac{(p_0 - p_L)}{L} = \frac{8\mu\,\overline{w}_z}{R^2} = \frac{8\mu}{\rho\,\overline{w}_z}\frac{4}{D^2}\rho\overline{w}_z^2 = \frac{64\mu}{\rho\,\overline{w}_z D}\frac{1}{D}\frac{1}{2}\rho\overline{w}_z^2$$

per cui in moto laminare in un condotto circolare si ottiene

$$\boxed{f = \frac{64\mu}{\rho\,\overline{w}_z D} = \frac{64}{Re_D}}$$

(legge di Poiseuille)

- **Vi è un'altra definizione di "fattore di attrito" che viene detto *fattore di Fanning***

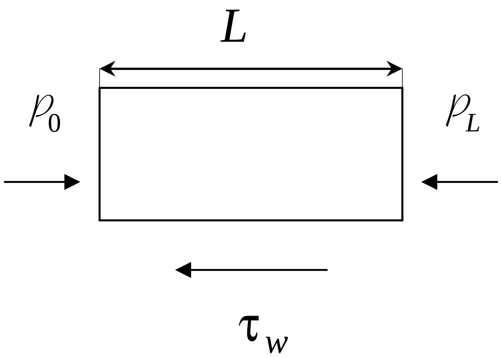
$$\boxed{\tau_w = f'\frac{1}{2}\rho\overline{w}_z^2}$$

- **La relazione con il fattore di Darcy-Weisbach può essere ottenuta da un bilancio di forze agenti sul fluido. Si ha:**

$$\pi D L \tau_w = (p_0 - p_L)\pi\frac{D^2}{4}$$

$$\tau_w = \frac{p_0 - p_L}{L}\frac{D}{4}$$

$$f'\frac{1}{2}\rho\overline{w}_z^2 = \frac{f}{D}\frac{1}{2}\rho\overline{w}_z^2\frac{D}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f' = \frac{f}{4}}$$



  - **Per sezioni di tubo diverse da quella circolare si pone**

$$D_e = \frac{4A}{\Pi_f} = \frac{4\times area}{perimetro\ bagnato}$$

sulla base del quale si valuta il numero di Reynolds da introdurre nella formula di Poiseuille con coefficiente appropriato (≠ 64)

Attività proposte:

1. **Risolvere nuovamente gli esercizi precedenti applicando bilanci di forze a volumi di fluido opportuni ed utilizzando la legge di Newton della viscosità. Verificare che i risultati coincidono con quelli trovati tramite l'applicazione delle equazioni di Navier-Stokes.**

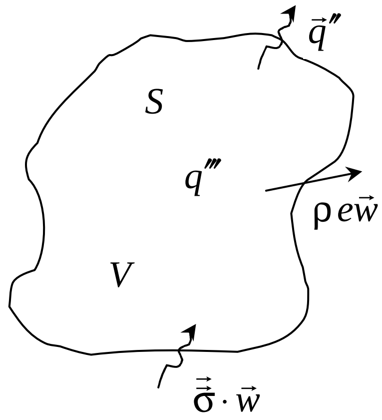
   Suggerimenti
   - **Nel caso di film su piastra piana considerare un parallelepipedo a base rettangolare con profondità unitaria (ortogonalmente al piano del disegno) ed altezza infinitesima lungo *y***
   - **Nel caso del moto alla Poiseuille considerare un guscio cilindrico di spessore infinitesimo concentrico all'asse del condotto**

2. **Risolvere nuovamente il problema del film su piastra piana introducendo uno sforzo di taglio superficiale τ_i e discutere le distribuzioni di velocità ottenibili nel film a causa della sua variazione.**

   Suggerimenti
   - **Assumere imposta la portata per unità di perimetro, Γ, e considerare la variazione dello spessore del film e della velocità in funzione dello sforzo di taglio all'interfaccia.**
   - **Disegnare profili qualitativi di velocità nel film ottenuti al variare dello sforzo di taglio all'interfaccia.**

- **<u>Bilancio di energia (termica + meccanica)</u>**

Consideriamo un volume di controllo V delimitato da una superficie S



Posto ancora $e = u + w^2/2 + gz$ **si ha:**

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho e\,dV}_{\substack{\text{variazione temporale}\\ \text{dell'energia in V}}} = -\underbrace{\int_S \rho e\vec{w}\cdot\vec{n}\,dS}_{\substack{\text{contributo dovuto al}\\ \text{fluido in entrata e uscita}}} - \underbrace{\int_S \vec{q}''\cdot\vec{n}\,dS}_{\substack{\text{contributo del}\\ \text{flusso termico}\\ \text{conduttivo in uscita}}} + \underbrace{\int_S \left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{w}\right)\cdot\vec{n}\,dS}_{\substack{\text{contributo delle}\\ \text{forze superficiali}}} + \underbrace{\int_V q'''dV}_{\substack{\text{contributo della}\\ \text{potenza termica}\\ \text{per unità di volume}}}$$

Applicando il teorema della divergenza ed eliminando con le solite considerazioni l'integrazione sul volume arbitrario V, si ha

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}}_{\substack{\text{variazione temporale}\\ \text{dell'energia in V}}} + \underbrace{\nabla\cdot(\rho e\vec{w})}_{\substack{\text{contributo dovuto al}\\ \text{moto del fluido}}} = -\underbrace{\nabla\cdot\vec{q}''}_{\substack{\text{contributo del}\\ \text{flusso termico}\\ \text{conduttivo}}} + \underbrace{\nabla\cdot\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{w}\right)}_{\substack{\text{contributo delle}\\ \text{forze superficiali}}} + \underbrace{q'''}_{\substack{\text{contributo della}\\ \text{potenza termica}\\ \text{per unità di volume}}} \qquad \textbf{(°)}$$

Decomponendo il tensore degli sforzi nella componente di pressione ed in quella di attrito

$$\nabla\cdot\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{w}\right) = \nabla\cdot\left(\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{w}\right) - \nabla\cdot\left(p\vec{\vec{I}}\cdot\vec{w}\right) = \nabla\cdot\left(\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{w}\right) - \nabla\cdot(p\vec{w}) = \nabla\cdot\left(\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{w}\right) - \nabla\cdot\underbrace{(\rho p v\,\vec{w})}_{\rho v=1}$$

si ha

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}}_{\substack{\text{variazione temporale}\\ \text{dell'energia in V}}} + \underbrace{\nabla\cdot\left[\rho(e+pv)\vec{w}\right]}_{\substack{\text{contributo dovuto al}\\ \text{moto del fluido}\\ \text{(con lavoro di pulsione)}}} = -\underbrace{\nabla\cdot\vec{q}''}_{\substack{\text{contributo del}\\ \text{flusso termico}\\ \text{conduttivo}}} + \underbrace{\nabla\cdot\left(\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{w}\right)}_{\substack{\text{contributo delle}\\ \text{forze superficiali}\\ \text{di attrito}}} + \underbrace{q'''}_{\substack{\text{contributo della}\\ \text{potenza termica}\\ \text{per unità di volume}}} \qquad \textbf{(°°)}$$

Riprendendo la (°), il primo membro può essere riformulato facendo uso dell'equazione di continuità

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho e\vec{w}) = e\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial e}{\partial t} + e\nabla\cdot(\rho\vec{w}) + \rho\vec{w}\cdot\nabla e = \underbrace{e\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{w})\right]}_{\substack{=0,\ \text{per l'equazione}\\ \text{di continuità}}} + \underbrace{\rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho\vec{w}\cdot\nabla e}_{=\rho\frac{De}{Dt}}$$

per cui

$$\rho \underbrace{\frac{De}{Dt}}_{\substack{derivata\ lagrangiana \\ dell'energia}} = - \underbrace{\nabla \cdot \vec{q}''}_{\substack{contributo\ del \\ flusso\ termico \\ conduttivo}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{w}\right)}_{\substack{contributo\ delle \\ forze\ superficiali}} + \underbrace{q'''}_{\substack{contributo\ della \\ potenza\ termica \\ per\ unità\ di\ volume}}$$

e tenendo conto della decomposizione del tensore degli sforzi

$$\rho \underbrace{\frac{De}{Dt}}_{\substack{derivata\ lagrangiana \\ dell'energia}} = - \underbrace{\nabla \cdot \vec{q}''}_{\substack{contributo\ del \\ flusso\ termico \\ conduttivo}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\vec{\vec{\tau}} \cdot \vec{w}\right)}_{\substack{contributo\ delle \\ forze\ superficiali \\ di\ attrito}} - \underbrace{\nabla \cdot \left(p\vec{w}\right)}_{\substack{contributo\ delle \\ forze\ superficiali \\ di\ pressione}} + \underbrace{q'''}_{\substack{contributo\ della \\ potenza\ termica \\ per\ unità\ di\ volume}} \qquad \textbf{(°°°)}$$

Il nostro scopo è ora giungere ad un'equazione di bilancio dell'energia termica.

Per fare questo, sottrarremo membro a membro all'equazione di bilancio dell'energia totale (termica + meccanica) un'equazione di bilancio dell'energia meccanica

Questa è ottenibile da quella della quantità di moto moltiplicando scalarmente ambo i membri per la velocità

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} \cdot \vec{w} = \left(\nabla \cdot \vec{\vec{\tau}}\right) \cdot \vec{w} - \nabla p \cdot \vec{w} + \rho \vec{g} \cdot \vec{w}$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{w^2}{2}\right) = \left(\nabla \cdot \vec{\vec{\tau}}\right) \cdot \vec{w} - \nabla p \cdot \vec{w} + \rho \vec{g} \cdot \vec{w}$$

Tenendo conto che

$$\vec{g} = -\nabla(gz)$$

e che

$$\frac{\partial}{\partial t}(gz) = 0$$

si ha

$$\rho \vec{g} \cdot \vec{w} = -\rho \vec{w} \cdot \nabla(gz) = -\rho \frac{D}{Dt}(gz)$$

e quindi

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{w^2}{2} + gz\right) = \left(\nabla \cdot \vec{\vec{\tau}}\right) \cdot \vec{w} - \nabla p \cdot \vec{w}} \qquad \textit{\textbf{(bilancio di energia meccanica)}}$$

Sottraendo membro a membro questa equazione alla (°°°), si ha:

$$\underbrace{\rho \frac{Du}{Dt}}_{\substack{variazione\ temporale \\ dell'energia\ termica}} = - \underbrace{\nabla \cdot \vec{q}''}_{\substack{contributo\ del \\ flusso\ termico \\ conduttivo}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\vec{\vec{\tau}} \cdot \vec{w}\right) - \left(\nabla \cdot \vec{\vec{\tau}}\right) \cdot \vec{w}}_{\substack{potenza\ meccanica\ per\ unità\ di\ volume \\ dissipata\ per\ attrito\ in\ energia\ termica \\ =\Phi}} - \underbrace{p \nabla \cdot \vec{w}}_{\substack{potenza\ per\ unità \\ di\ volume\ delle\ forze \\ di\ pressione}} + \underbrace{q'''}_{\substack{potenza\ termica \\ volumetrica}}$$

e infine

$$\boxed{\rho\frac{Du}{Dt}=-\nabla\cdot\vec{q}''+\Phi-p\nabla\cdot\vec{w}+q'''}$$

Ricordando che è

$$\nabla\cdot\vec{w}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{w}\cdot\nabla\rho\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=\frac{1}{v}\frac{Dv}{Dt}$$

si ha

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-\nabla\cdot\vec{q}''+\Phi-\rho p\frac{Dv}{Dt}+q'''$$

Introducendo a primo membro l'entalpia in luogo dell'energia interna, si ha

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho\left[\frac{Dh}{Dt}-\frac{D(pv)}{Dt}\right]=\rho\frac{Dh}{Dt}-\frac{Dp}{Dt}-\rho p\frac{Dv}{Dt}$$

e quindi

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}-\nabla\cdot\vec{q}''+\Phi+q'''$$

Poiché l'entalpia è può essere considerata funzione della pressione e della temperatura, si ha

$$h=h(p,T)\quad\Rightarrow\quad\frac{Dh}{Dt}=\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p\frac{DT}{Dt}+\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T\frac{Dp}{Dt}$$

ovvero

$$\frac{Dh}{Dt}=c_p\frac{DT}{Dt}+\underbrace{v(1-\beta T)}_{\substack{\textit{da relazioni}\\ \textit{termodinamiche}}}\frac{Dp}{Dt}$$

Per cui

$$\boxed{\rho c_p\frac{DT}{Dt}=-\nabla\cdot\vec{q}''+\Phi+q'''+\beta T\frac{Dp}{Dt}}$$

L'ultimo passo è ora introdurre la *legge di Fourier della conduzione* che definisce il flusso termico conduttivo

$$\vec{q}_c''=-k\nabla T$$

e tenere conto dell'eventuale flusso termico dovuto all'irraggiamento $\vec{q}_r''$, ottenendo quindi

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt}=\nabla\cdot(k\nabla T)-\nabla\cdot\vec{q}_r''+\Phi+q'''+\beta T\frac{Dp}{Dt}$$

Normalmente, il termine contenente la pressione, quello di dissipazione per attrito e quello di irraggiamento possono essere trascurati, ottenendo

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q'''$$

Nel caso di un *fluido non in moto,* o di un *solido,* con *conducibilità termica uniforme* si ha:

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + q'''}$$

che rappresenta la cosiddetta *Equazione del Calore.*

L'Equazione di Bernoulli generalizzata

Dalle equazioni di Navier-Stokes, proiettate lungo una linea di flusso, è possibile ottenere una forma generalizzata del teorema di Bernoulli, valida per fluido comprimibile, viscoso, in presenza di lavoro scambiato con l'esterno:

$$\boxed{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + l_s + l_f = 0}$$

in cui:

- **1 e 2 sono le sezioni a monte e a valle (nel senso del moto del fluido) del tubo di flusso considerato**
- l_s **rappresenta il lavoro per unità di massa prodotto verso l'esterno (positivo per una turbina e negativo per una pompa)**
- l_f **rappresenta l'energia meccanica perduta per attrito per unità di massa ed è sempre positivo**

Il termine l_f costituisce una *perdita di carico per attrito* e viene talora espresso in termini di una diminuzione di altezza, nel senso già visto per la somma delle altezze piezometrica, geometrica e cinetica:

$$l_f = g H_L$$

in cui $H_L = [m]$.

Come abbiamo visto, la legge di Poiseuille permette di valutare tale perdita di carico nel caso di un fluido laminare in un condotto cilindrico in termini di una equivalente perdita di pressione.

Impareremo a valutare tali perdite di carico anche per moto turbolento in tubi diritti (*perdite di carico distribuite*) e in caso di condotti con brusche restrizioni o allargamenti, curve, valvole, ecc. (*perdite di carico concentrate o singolari*).