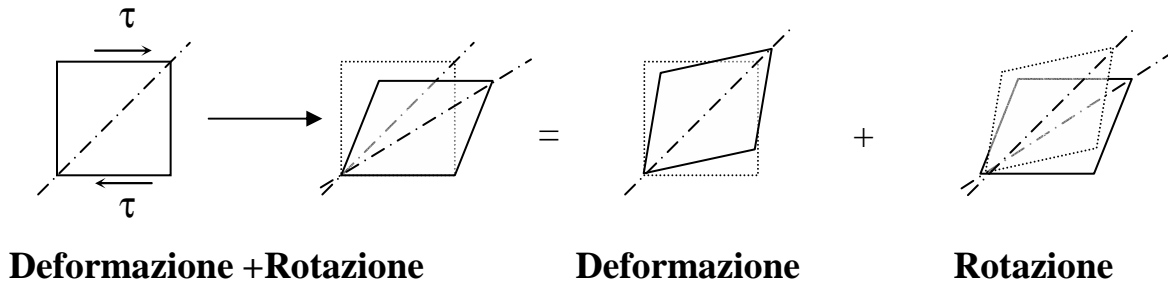


# MOTO SU SUPERFICI ESTERNE ED IN CONDOTTI

## Vorticità e Circolazione

- In generale, il moto di un fluido in presenza di sforzi di taglio coinvolge sia *deformazioni* che *rotazioni* del generico elemento di fluido



$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) = e_{i,j} + \Omega_{i,j}$$

- La *vorticità* è definita come

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{w} = \nabla \times \vec{w}$$

Essa è legata alla velocità angolare di rotazione di un elemento di fluido dalla relazione

$$\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$$

- Un moto in cui la vorticità sia nulla viene detto *irrotazionale*, altrimenti il moto è detto *rotazionale*
- Esempi classici di moti rotazionali ed irrotazionali sono i seguenti:

### 1. Moto di rotazione di un fluido “a corpo rigido”

La velocità è data da  $\vec{w} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$  per cui risulta, come si verifica facilmente

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{\Omega} \times \vec{r} = 2\vec{\Omega}$$

e quindi il moto è *rotazionale*

### 2. Vortice potenziale

In coordinate cilindriche, la velocità ha le seguenti componenti

$$w_r = w_z = 0 \qquad w_\phi = \frac{C}{r}$$

L'unica componente potenzialmente non nulla della vorticità è quella lungo l'asse z

$$\omega_z = \{\nabla \times \vec{w}\}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{C}{r} \right) = 0 \quad (r \neq 0)$$

perciò il moto è irrotazionale ovunque tranne che sull'asse z, su cui la vorticità è indeterminata (come vedremo, in realtà è infinita)

### 3. Moto piano di Couette

Abbiamo già parlato di questo moto quando abbiamo definito la viscosità dinamica; si ha

$$w_x = w_x(y) = \frac{y}{H} w_p \quad \Rightarrow \quad \omega_x = \omega_y = 0 \quad \omega_z = -\frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{w_p}{H}$$

perciò il moto è rotazionale ovunque.

- E' utile introdurre la *circolazione*, che è definita come la circuitazione del vettore velocità lungo una curva chiusa arbitraria

$$\Gamma = \oint \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

Il *teorema di Stokes* permette di mettere in relazione la circolazione con la vorticità del campo di moto

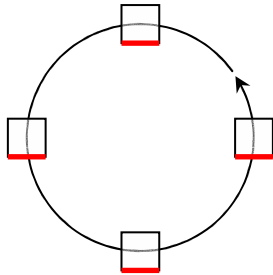
$$\Gamma = \oint_C \vec{w} \cdot d\vec{l} = \int_{S_c} \text{rot } \vec{w} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_c} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$$

l'ultimo integrale essendo esteso ad una qualunque superficie  $S_c$  che si stacchi dal circuito su cui viene eseguita la circuitazione.

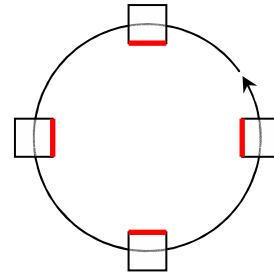
- E' quindi evidente che qualora la circolazione risulti diversa da zero il moto deve essere, almeno in qualche punto, rotazionale
- Il teorema (del vortice) di Kelvin afferma che, per ogni moto governato dalle equazioni di Eulero (fluido inviscido), la circolazione relativa ad un circuito materiale (cioè in moto col fluido) si conserva, ovvero:  $D\Gamma/Dt = 0$
- Ciò si comprende notando che nel caso di un fluido inviscido ( $\tau = 0$ ) non è possibile generare rotazione tramite le sole forze di pressione e se il fluido non possiede già "inizialmente" una vorticità diversa da zero esso si mantiene irrotazionale

- Da quanto sopra si ha che:

♦ *il moto lungo una linea di flusso curva non è necessariamente rotazionale: l'elemento di fluido può non ruotare rispetto al sistema di riferimento fisso (v. vortice potenziale con  $r \neq 0$ )*



Moto irrotazionale



Moto rotazionale

♦ *un moto caratterizzato da linee di flusso chiuse non può essere ovunque irrotazionale: scegliendo una linea di flusso come circuito per calcolare la circolazione si ottiene infatti  $\Gamma \neq 0$  che, facendo uso del teorema di Stokes, mostra che in qualche punto “interno” al circuito la vorticità deve essere diversa da zero (v. vortice potenziale con  $r = 0$ )*

♦ *il moto di un fluido inviscido “inizialmente” irrotazionale si mantiene irrotazionale; ponendo  $\phi$  = potenziale di velocità risulta*

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{w} = \nabla \times \vec{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{w} = -\text{grad } \phi = -\nabla \phi$$

*cioè la velocità ammette un potenziale. Se il moto è anche incomprimibile, si ha allora*

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \phi = 0$$

*(moto potenziale incomprimibile) che può essere risolta con assegnate condizioni al contorno, come ad esempio quelle viste per superficie impermeabile*

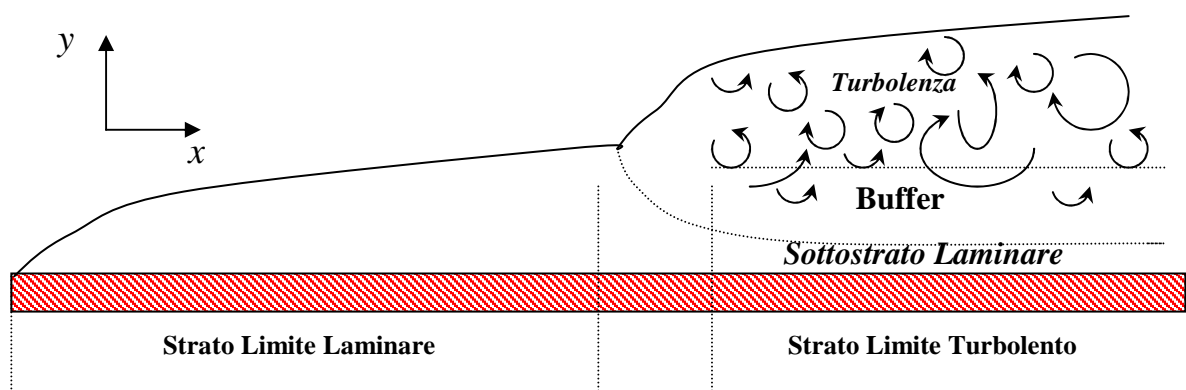
$$\vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \phi \cdot \vec{n} = \frac{d\phi}{dn} = 0$$

- *il moto di un fluido viscoso è, generalmente, rotazionale (anche se si svolge su linee di flusso rettilinee) perché gli sforzi di taglio possono generare rotazione; dalle equazioni di Navier-Stokes si ha*

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{w} + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{\omega}}_{\substack{\text{diffusione della vorticità} \\ \text{generata alla parete}}} \quad (\text{eq. della vorticità})$$

### Concetto Generale di Strato Limite nel Moto su Superfici Esterne

- La **condizione di adesione** (“no-slip”), applicabile se il fluido può essere considerato un “continuo” ed è viscoso, determina la creazione di una zona in prossimità di una parete in cui il fluido rallenta
- Questa zona, nella quale avviene la maggior parte della variazione della velocità rispetto alla corrente libera (convenzionalmente, il 99%), è detta **strato limite** (fluidodinamico)
- E’ importante sottolineare che la presenza dello s.l. divide la corrente fluida in due regioni:
  - ♦ lo strato limite, in cui il moto è **rotazionale** (le particelle ruotano su loro stesse) e non si possono trascurare gli effetti viscosi
  - ♦ una zona esterna, in cui il fluido può essere considerato sostanzialmente inviscido e **irrotazionale** (le particelle non ruotano)
- Nello s.l. il moto è inizialmente laminare, ma può subire una transizione a moto turbolento se il suo spessore aumenta oltre un certo valore; in questo caso si distinguono tre zone:
  - ♦ **un sottostrato laminare**, zona vicina alla parete in cui il moto è ordinato (laminare)
  - ♦ **una zona di transizione** (“*buffer layer*”) in cui si comincia a sviluppare turbolenza
  - ♦ **una zona turbolenta**



- La variazione della pressione nello s.l. in direzione ortogonale alla superficie è trascurabile, per cui si assume che la distribuzione di pressione in esso sia determinata da quella nella corrente libera, da calcolarsi sulla base della teoria del *moto potenziale*
- Dato il valore del gradiente di pressione lungo  $x$  calcolato nella corrente esterna lo strato limite viene classificato come segue:

♦  $\partial p / \partial x < 0 \Rightarrow$  *s.l. in gradiente di pressione favorevole*

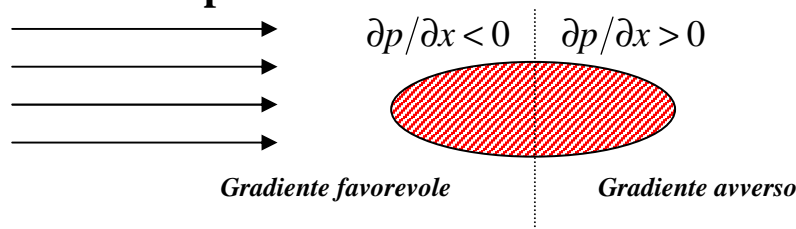
in questo caso il fluido esterno sta accelerando ( $\partial w_\infty / \partial x > 0$ )

$$w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x} + \underbrace{w_y \frac{\partial w_\infty}{\partial y}}_{\approx 0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

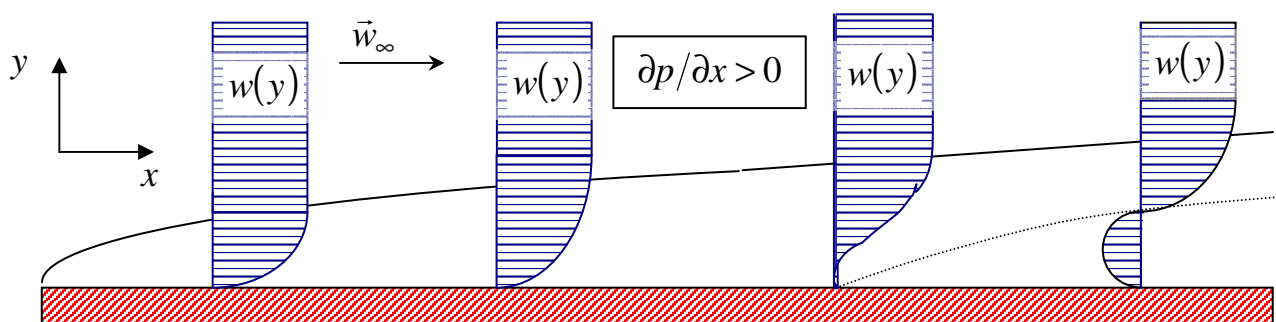
lo strato limite è relativamente sottile e allora l'insorgere di instabilità che portano alla turbolenza può essere ritardato

♦  $\partial p / \partial x > 0 \Rightarrow$  *s.l. in gradiente di pressione avverso*

in questo caso il fluido esterno sta decelerando ( $\partial w_\infty / \partial x < 0$ ) e lo strato limite tende ad ingrossarsi ed, eventualmente, può anche *separarsi* dalla parete

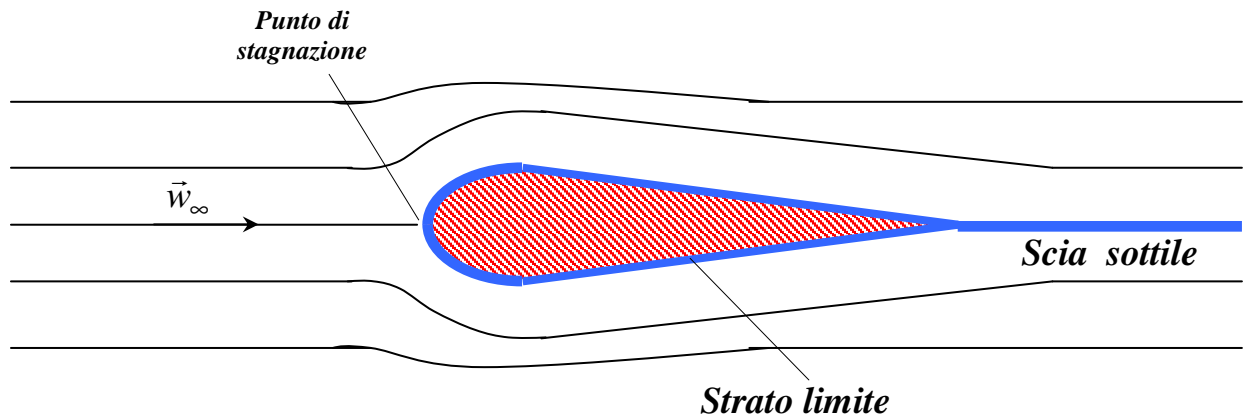


- La separazione dello strato limite è contraddistinta dalla presenza di una regione a corrente invertita ( $\vec{w}$  cambia verso). Il punto di separazione sulla parete è quello in cui  $\partial w_x / \partial y = 0$



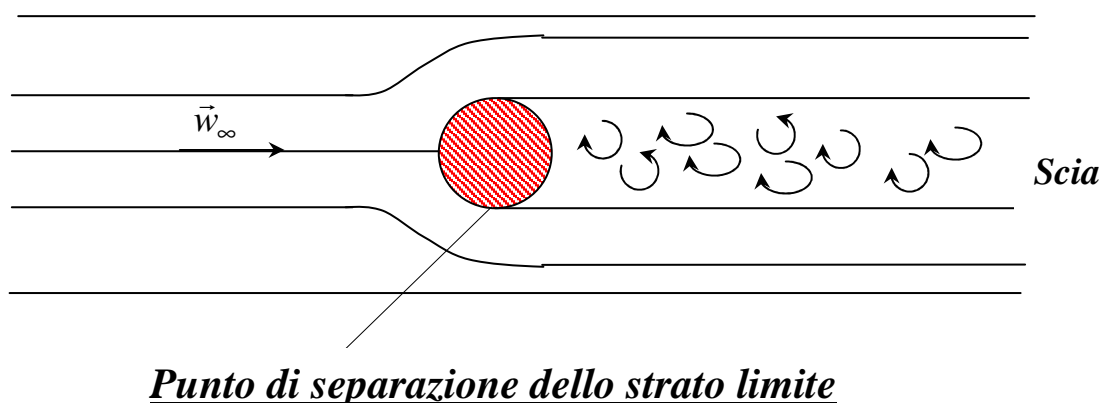
**Separazione**

- Se il corpo esposto alla corrente è sufficientemente affusolato, allora la zona posteriore è caratterizzata da un piccolo valore di  $\partial p / \partial x > 0$  e lo strato limite può non separarsi



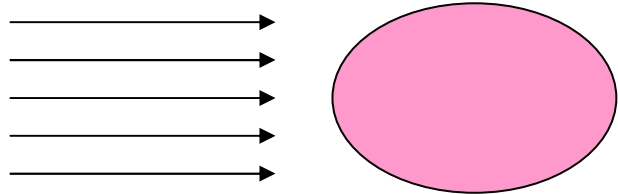
Il moto può allora essere studiato applicando le equazioni per fluido inviscido per la corrente esterna e le equazioni dello strato limite per la zona viscosa. Per  $M = w/w_{suono} < 1$ , la portanza (forza sul corpo normale alla direzione del moto) viene determinata con le equazioni per fluido inviscido, la resistenza (forza sul corpo parallela alla direzione del moto) tramite le eq. dello s.l..

- La separazione dello strato limite modifica sensibilmente i campi di moto intorno al corpo dando luogo a maggiori cadute di pressione rispetto al caso in cui non si abbia separazione: non si può più applicare la teoria per fluido inviscido per il campo di moto esterno nella zona a valle del corpo (paradosso di D'Alembert)

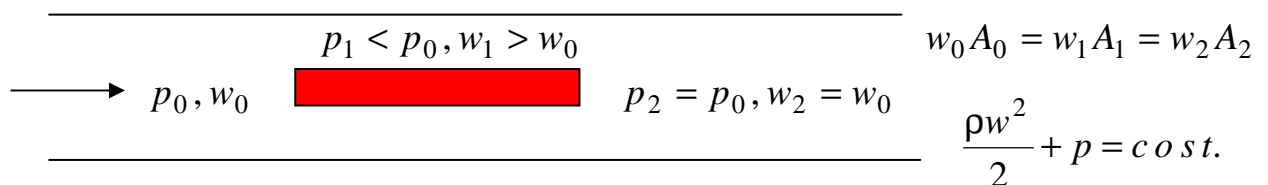


- D'Alembert espresse questo problema dichiarando di non essere in grado di calcolare tramite la teoria (eq. di Eulero, cioè per fluido inviscido) la forza di resistenza effettivamente osservata su un corpo esposto ad un flusso di fluido

- Infatti, il applicando le equazioni di Eulero al moto di un fluido attorno ad un corpo isolato si otteneva che la distribuzione delle pressioni su di esso produceva una forza risultante nulla, cosa contraria all'evidenza sperimentale

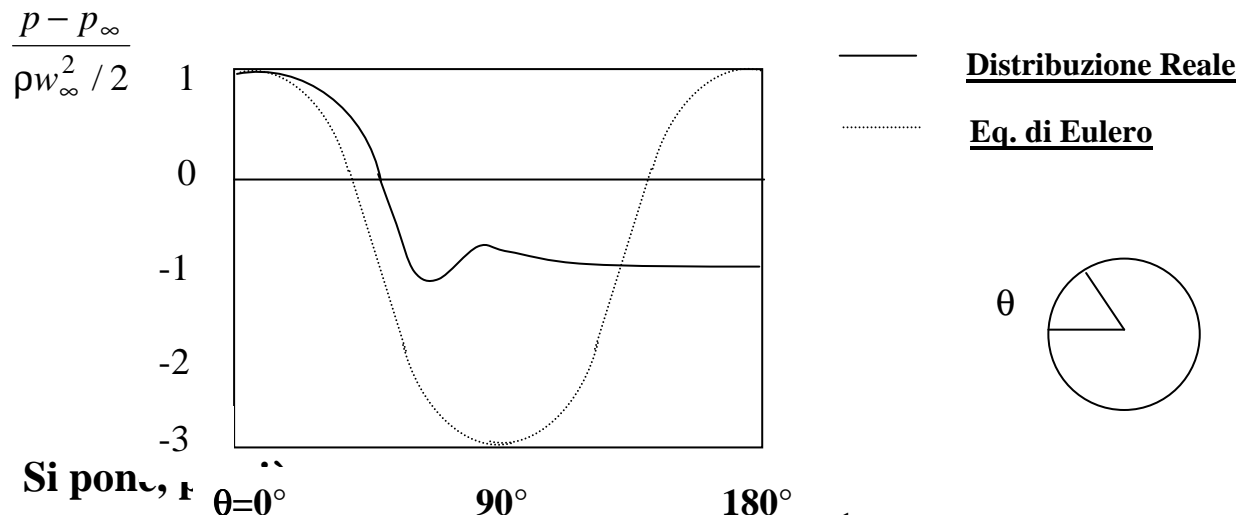


- Ciononostante, le equazioni di Eulero erano in grado di fornire indicazioni ragionevoli in relazione a molti altri parametri del moto (ad es., per la velocità a distanza sufficiente dal corpo)
- La cosa può essere evidenziata anche applicando il teorema di Bernoulli al moto stazionario di un fluido incomprimibile in un tubo contenente un ostacolo



- La soluzione di questo apparente dilemma è legata alla presenza dello *strato limite* (Prandtl, 1904), la zona vicina al corpo in cui non è possibile trascurare l'effetto della viscosità, dovuta alla “no-slip condition”, cioè al fatto che il fluido aderisce al corpo
- Gli effetti di distacco dello strato limite e la formazione di scie turbolente sono ulteriori fenomeni che rendono ancor meno accettabile l'applicazione di formulazioni valide per fluidi inviscidi ad alcuni problemi pratici.

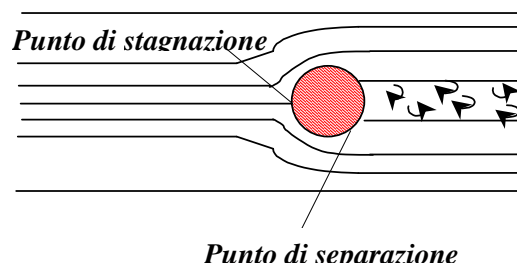
- Lo squilibrio tra la distribuzione delle pressioni sulla parte anteriore del corpo e su quella posteriore genera una resistenza proporzionale a  $\rho w_\infty^2 / 2$
- Infatti, nel caso di un cilindro esposto ad una corrente libera l'andamento qualitativo delle pressioni sulla superficie esterna è quello dato in Figura



- Si pone, per  $\theta=0^\circ$
- $$F_D = \text{form drag force} = C_D A \frac{1}{2} \rho w_\infty^2$$

in cui  $A$  è un'area di riferimento da definirsi caso per caso (ad es.,  $LD$  per un cilindro  $\pi D^2/4$  per una sfera)

- Per uno strato limite laminare il distacco avviene anticipatamente rispetto al caso di uno strato limite turbolento; per questo in alcuni casi si favorisce la transizione alla turbolenza che tende a ritardare il distacco: ad es., le palline da golf hanno una resistenza all'aria molto minore di palline lisce dello stesso diametro perché la loro struttura superficiale favorisce la transizione alla turbolenza

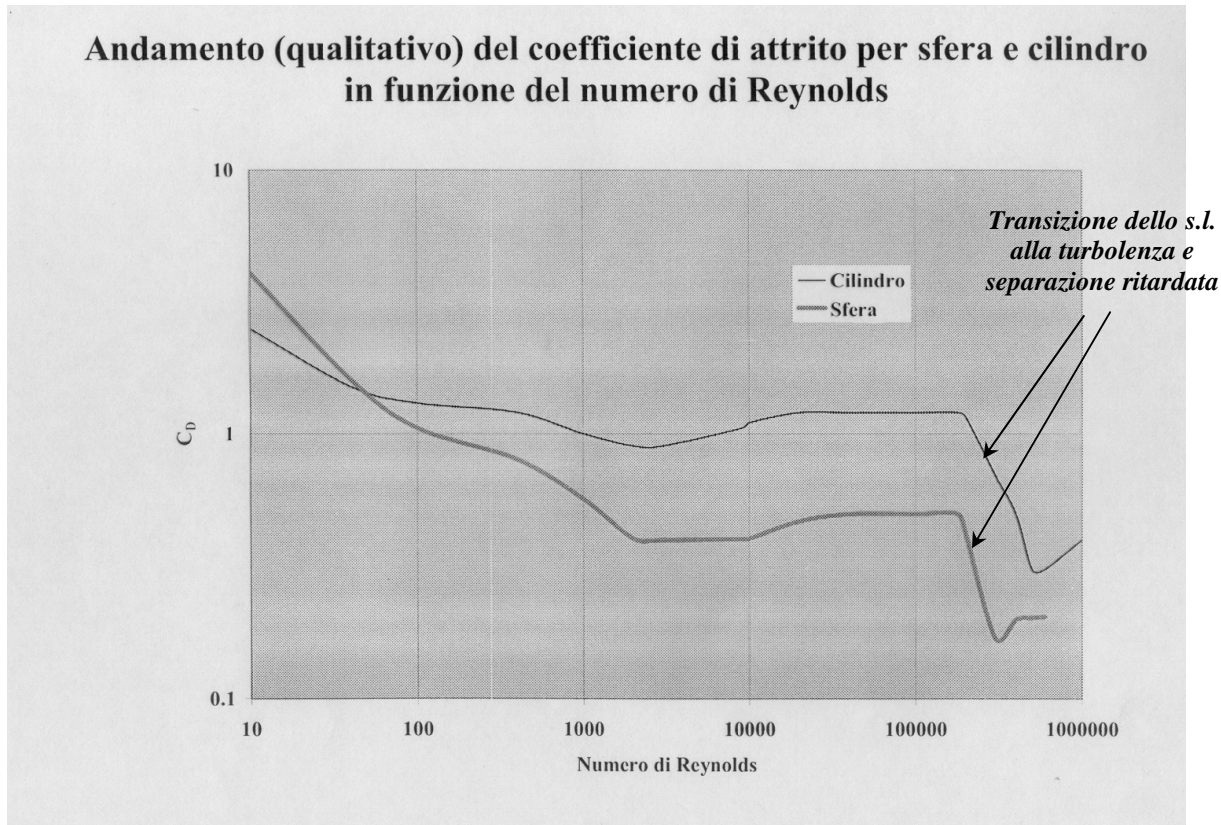


**Separazione ritardata a causa della turbolenza dello strato limite**



- A bassi valori del numero di Reynolds, la resistenza è essenzialmente di natura viscosa (*resistenza viscosa = viscous drag o friction*)

$$\vec{F}_{frict} = \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS$$



- In alcuni casi, si stabilisce anche una forza ortogonale alla moto del fluido, detta portanza (“*lift*”). Essa è data da una espressione del tipo ( $A$  è diversa da quella che compare nella formula del drag)

$$F_L = \text{lift force} = C_L A \frac{1}{2} \rho w_\infty^2$$

- E’ bene ricordare che risulta approssimativamente

$$|\vec{F}_{form drag}| \propto \frac{1}{2} \rho w_\infty^2 \quad |\vec{F}_{frict}| \propto \mu w_\infty$$

### Equazioni dello Strato Limite Laminare (Prandtl)

- Le equazioni del moto nell'approssimazione dello strato limite vengono ottenute semplificando le equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale stazionario sulla base di considerazioni di ordine di grandezza
- Per fluido incomprimibile, trascurando l'effetto della gravità, si ha:

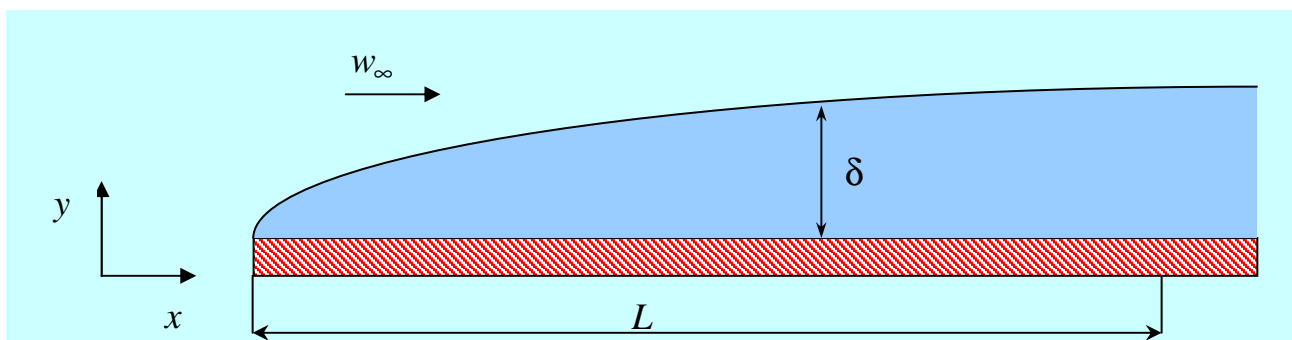
$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right)$$

- Queste equazioni vengono semplificate tenendo conto dell'importanza quantitativa dei vari termini; ad esempio la derivata seconda della velocità lungo x e il gradiente di pressione lungo y vengono trascurati
- Si osserva che:
  - la scala di  $w_x$  è  $w_\infty$ ; infatti,  $w_x$  varia tra 0 e  $w_\infty$ , cioè
$$w_x = O(w_\infty)$$
  - la scala di lunghezza della coordinata  $x$  è  $L$ 
$$x = O(L)$$
  - la scala di lunghezza della coordinata  $y$  è lo spessore dello strato limite  $\delta \ll L$ 
$$y = O(\delta)$$
  - per le derivate prime di  $w_x$  risulta, quindi

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = O\left(\frac{w_\infty}{L}\right) \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = O\left(\frac{w_\infty}{\delta}\right)$$



- ♦ l'equazione di continuità permette allora di ottenere l'ordine di grandezza di  $w_y$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{\partial w_y}{\partial y} = O\left(\frac{w_\infty}{L}\right) \Rightarrow w_y = O\left(w_\infty \frac{\delta}{L}\right)$$

- ♦ per le derivate prime di  $w_y$  si ha allora

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} = O\left(w_\infty \frac{\delta}{L^2}\right) \quad \frac{\partial w_y}{\partial y} = O\left(w_\infty \frac{1}{L}\right)$$

- ♦ per le derivate seconde di  $w_x$  e  $w_y$  risulta, inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} &= O\left(\frac{w_\infty}{L^2}\right) & \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} &= O\left(\frac{w_\infty}{\delta^2}\right) \\ \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} &= O\left(w_\infty \frac{\delta}{L^3}\right) & \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} &= O\left(w_\infty \frac{1}{L\delta}\right) \end{aligned}$$

- Per i termini delle due equazioni del moto si ha, dunque

$$\begin{aligned} \underbrace{w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}}_{O\left(\frac{w_\infty^2}{L}\right)} + \underbrace{w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}}_{O\left(\frac{w_\infty^2}{L}\right)} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}}_{O\left(\nu \frac{w_\infty}{L^2}\right)} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}}_{O\left(\nu \frac{w_\infty}{\delta^2}\right)} \\ \underbrace{w_x \frac{\partial w_y}{\partial x}}_{O\left(w_\infty^2 \frac{\delta}{L^2}\right)} + \underbrace{w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}}_{O\left(w_\infty^2 \frac{\delta}{L^2}\right)} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}}_{O\left(\nu w_\infty \frac{\delta}{L^3}\right)} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}}_{O\left(\nu w_\infty \frac{1}{L\delta}\right)} \end{aligned}$$

- Sulla base di queste considerazioni si ha che:

- ♦ a primo membro delle due equazioni vi sono termini dello stesso ordine di grandezza
- ♦ nel laplaciano delle due equazioni la derivata seconda rispetto ad  $x$  può essere trascurata nei confronti di quella rispetto ad  $y$

$$\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \ll \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad \nu \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} \ll \nu \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}$$

- ♦ in ciascuna equazione, il termine di pressione avrà lo stesso ordine di grandezza del più grande degli altri termini

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = O\left(\frac{w_\infty^2}{L}\right) = O\left(\nu \frac{w_\infty}{\delta^2}\right) \gg \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = O\left(w_\infty^2 \frac{\delta}{L^2}\right) = O\left(\nu w_\infty \frac{1}{L\delta}\right)$$

perciò le variazioni di  $p$  lungo  $y$  possono essere trascurate

- Conseguentemente, si può assumere che il gradiente di pressione nello strato limite lungo  $x$  sia lo stesso che si ha nella corrente esterna

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial p_{\infty}}{\partial x}$$

Dalle equazioni di Eulero nella corrente esterna, tenendo conto che non si ha variazione di velocità lungo  $y$ , si ha

$$w_{\infty} \frac{\partial w_{\infty}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial x}$$

- Il procedimento mostra che, nei limiti di questa approssimazione, le equazioni sufficienti per descrivere il moto sono due sole, che sono le *equazioni dello strato limite*

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0 \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \end{aligned}$$

- Queste equazioni sono state risolte da Blasius per gradiente di pressione nullo: si assume che non vi sia variazione di velocità e quindi di pressione nella corrente esterna e si risolvono le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0 \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \end{aligned}$$

con le condizioni al contorno

$$w_x = w_y = 0 \quad y = 0$$

$$w_x \rightarrow w_{\infty} \quad y \rightarrow \infty$$

- L'intuizione fisica suggerisce di cercare una soluzione del tipo

$$w_x = w_{\infty} F\left[y/\Delta(x)\right]$$

con  $\Delta(x) \propto \delta(x)$  = *spessore locale dello strato limite*.

- La soluzione sarà allora *autosimile*, cioè tale che per ogni valore di  $x$  il profilo di velocità abbia lo stesso andamento rispetto ad  $y/\Delta(x)$
- Allo scopo di ridurre le funzioni incognite ad una sola, si introduce la *funzione di corrente*  $\psi$  (“stream function”) che soddisfa le relazioni

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad w_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- Sulla base di questa definizione si nota che:

♦ l’equazione di continuità è identicamente soddisfatta; infatti:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

♦ la funzione di corrente è costante sulle linee di flusso; infatti:

$$\left. \frac{d\psi}{ds} \right|_{\vec{w}} = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{w} = \frac{\partial \psi}{\partial x} w_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} w_y = -w_y w_x + w_x w_y = 0$$

- Si nota poi che ponendo

$$\psi(x, y) = w_\infty \Delta(x) f[y/\Delta(x)]$$

si ha

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = w_\infty f'[y/\Delta(x)]$$

che ha la forma  $w_x = w_\infty F[y/\Delta(x)]$  purché si ponga

$$f' = F$$

- In questo modo, Blasius mostrò che il problema alle derivate parziali poteva essere ricondotto a

$$ff'' + 2f''' = 0$$

che è una equazione differenziale ordinaria nella funzione incognita  $f(\eta)$  della sola variabile  $\eta$  tale che  $f' = w_x/w_\infty$  e può essere risolta numericamente con le condizioni al contorno

$$w_x = 0 \text{ per } y = 0 \Rightarrow f' = 0 \text{ per } \eta = 0$$

$$w_x \rightarrow w_\infty \text{ per } y \rightarrow \infty \Rightarrow f' \rightarrow 1 \text{ per } \eta \rightarrow \infty$$

ed una ulteriore condizione necessaria per definire univocamente il valore di  $f(\eta)$

$$f = 0 \text{ per } \eta = 0$$

- Si ottiene in particolare che

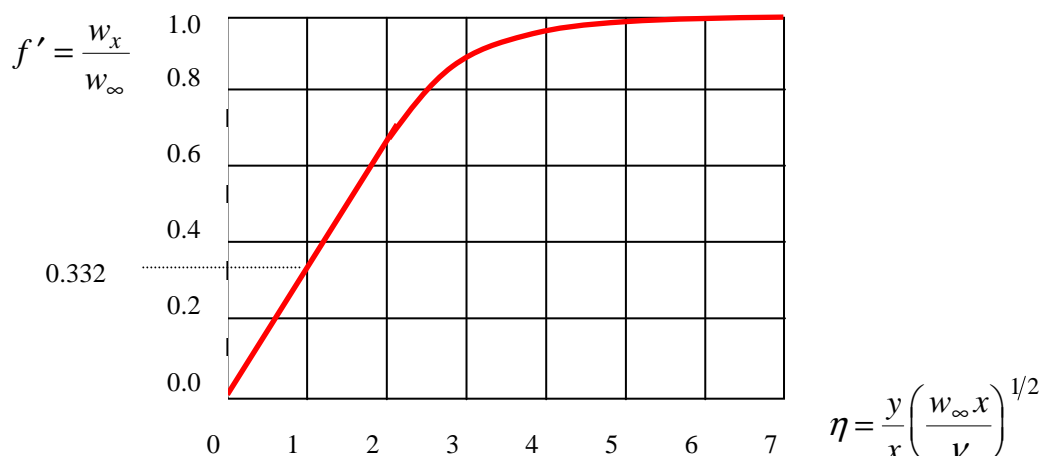
$$f' = 0.99 \text{ per } \eta = 4.99$$

per cui lo spessore dello strato limite, come definito classicamente, risulta

$$\delta(x) = 4.99 \left( \frac{\nu x}{w_\infty} \right)^{1/2} = 4.99 x \left( \frac{\nu}{w_\infty x} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\delta(x)}{x} = 4.99 Re_x^{-0.5} \quad Re_x = \frac{w_\infty x}{\nu}$$

ovvero lo strato limite è piccolo quando il numero di Reynolds è elevato



Profilo di Blasius

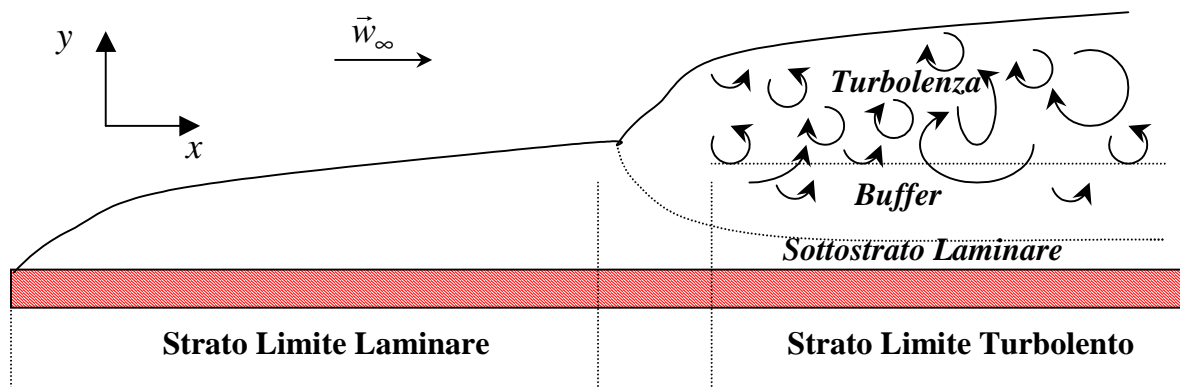
- Considerando il gradiente del profilo di velocità in prossimità della parete valutato da Blasius si ha (v. la derivata  $\approx 0.332$  in figura)

$$\tau_w = C_D \frac{1}{2} \rho w_\infty^2 \quad C_D = 0.664 Re_x^{-0.5}$$

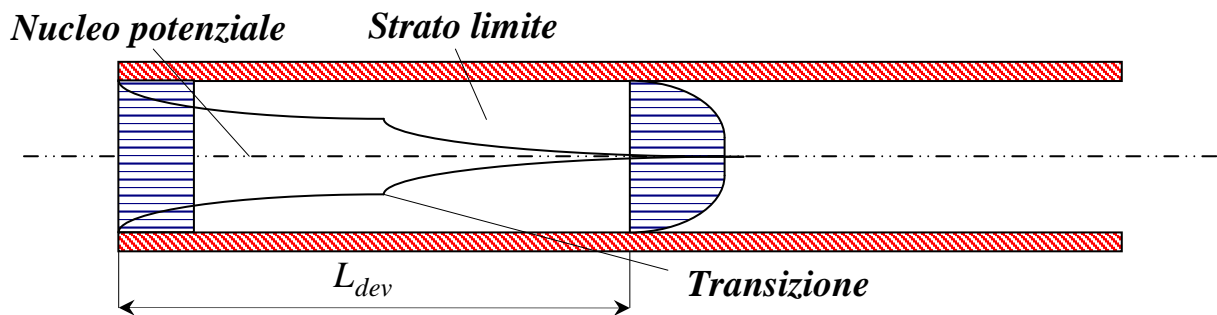
che esprimono lo sforzo di taglio alla parete ed il coefficiente di attrito nel caso di una piastra piana esposta ad una corrente laminare

### Transizione alla turbolenza nello strato limite

- Nello strato limite, il profilo di velocità di Blasius è soggetto ad instabilità



- Per studiare analiticamente la stabilità di un sistema, si adotta il procedimento dell'analisi di stabilità lineare che ha come scopo la *determinazione delle condizioni di stabilità a seguito di perturbazioni infinitesime*
- Si nota che esiste un valore critico del numero di Reynolds al di sotto del quale nessuna perturbazione viene amplificata ( $Re = w_\infty \delta / \nu \approx 1500$ ); per valori superiori si ha transizione alla turbolenza
- Nel caso di un fluido in moto laminare in un tubo, la ben nota transizione alla turbolenza, dimostrata da Reynolds in un celebre esperimento, può essere spiegata con l'instabilità dello strato limite in formazione all'imbocco del condotto



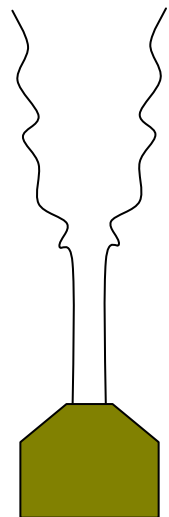
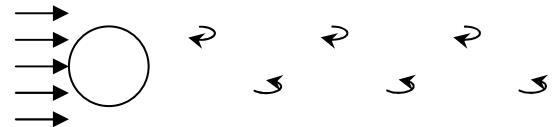
- Ciò dipende anche dalle modalità con cui il fluido entra nel condotto (ad es., forma della zona di ingresso) e dal livello di disturbi in gioco (ad es., vibrazioni del sistema)
- Ne risulta una notevole variabilità del numero di Reynolds a cui avviene la transizione

$$(Re_D)_{crit} = \left( \frac{\rho \bar{w} D}{\mu} \right)_{crit} \approx 2000 \div 10^4 \left( \begin{array}{l} \text{generalmente a } 4000 \\ \text{il moto è turbolento} \end{array} \right)$$

- Anche i getti sono soggetti alla transizione al moto turbolento; ciò avviene per valori del numero di Reynolds dell'ordine di 10 (contro  $10^3$  nel caso dello strato limite)
- Nel caso del moto esterno su cilindri investiti ortogonalmente all'asse, si ha dapprima il distacco di un pattern regolare di *vortici di von Karman* ( $Re \approx 40$ ) la cui frequenza segue la legge

$$St = fD/w_\infty \approx 0.2$$

( $St$ =numero di Strouhal); per  $Re > 300$  la regolarità viene progressivamente perduta e si ottiene una scia sempre più turbolenta





## Distribuzione della velocità in moto turbolento su piastra piana

- In moto turbolento, si fa spesso riferimento ad una scala di velocità caratteristica della regione della parete, detta *shear velocity* o *velocità di attrito*

$$w_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Sperimentalmente si è verificato che *l'intensità di turbolenza* (cioè l'intensità delle fluttuazioni della velocità) ha come scala  $w_\tau$

- La distribuzione di velocità in vicinanza della parete può quindi essere descritta come una funzione di tre grandezze

$$w_z(y) = F(w_\tau, y, \nu)$$

In forma adimensionale si ha

$$w_z^+(y^+) = F(y^+)$$

in cui

$$w_z^+(y^+) = \frac{w_z(y)}{w_\tau} \quad \text{e} \quad y^+ = \frac{w_\tau y}{\nu}$$

sono rispettivamente la *velocità adimensionale (universale)* e la *distanza dalla parete adimensionale*

- In prossimità della parete (nel sottostrato laminare,  $y^+ \leq 5 \div 8$ ) si può assumere che il profilo di velocità sia lineare

$$w_z(y) = \frac{\tau_w}{\mu} y$$

perciò

$$w_z(y) = \frac{\tau_w}{\rho} \frac{y}{\nu} = w_\tau^2 \frac{y}{\nu} \quad \Rightarrow \quad w_z^+(y^+) = w_\tau \frac{y}{\nu} = y^+$$

ovvero

$$w_z^+(y^+) = y^+ \quad (\text{vicino alla parete})$$

- Lontano dalla parete (oltre il sottostrato laminare,  $y^+ > 30$ ) la viscosità gioca un ruolo sempre meno importante; perciò, le variazioni di velocità non dipenderanno più da  $\nu$

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = F(w_\tau, y) \quad (\text{lontano dalla parete})$$

e si può porre

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{w_\tau}{K y}$$

in cui  $K$  è detta *costante di von Karman* e si trova sperimentalmente che essa ha un valore universale prossimo a 0.41

- Perciò, a sufficiente distanza dalla parete l'andamento del profilo di velocità è di tipo logaritmico

$$\frac{dw_z}{dy} = \frac{w_\tau}{K y} \Rightarrow w_z(y) = \frac{w_\tau}{K} \ln y + C$$

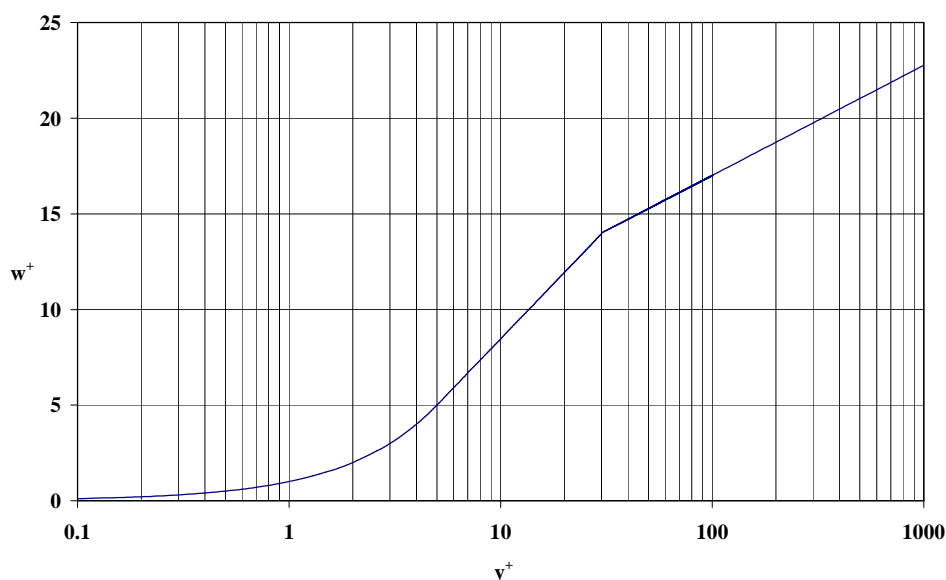
e, in termini adimensionali, si pone

$$w_z^+(y^+) = \frac{1}{K} [\ln y^+ + A]$$

- Con riferimento alle tre zone in cui è suddiviso lo strato limite turbolento (sottostrato laminare, zona di transizione e zona turbolenta) è quindi possibile descrivere il profilo universale di velocità come segue

$$\begin{aligned} w_z^+(y^+) &= y^+ & y^+ &\leq 5 \\ w_z^+(y^+) &= -3.05 + 5.00 \ln y^+ & 5 < y^+ &\leq 30 \\ w_z^+(y^+) &= 5.5 + 2.5 \ln y^+ & y^+ &> 30 \end{aligned}$$

Si noti che  $2.5 \approx 1/0.41 \approx 1/K$

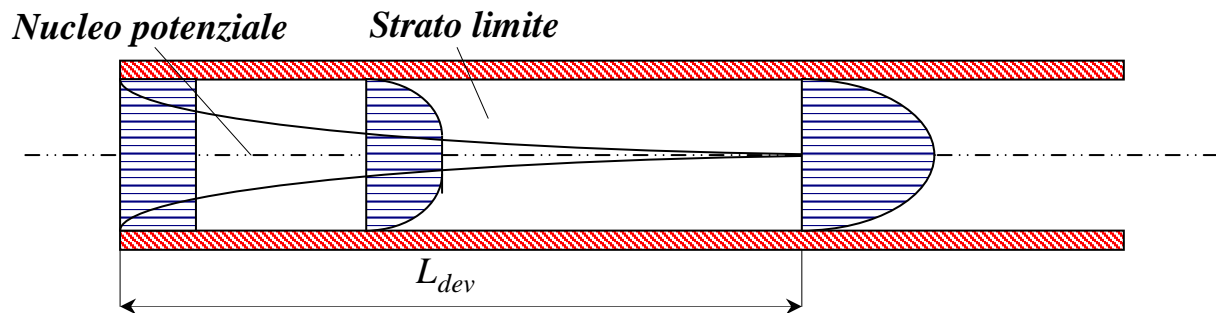


- La validità del profilo logaritmico cessa nella parte esterna dello strato limite

### Moto Interno ad un Condotto

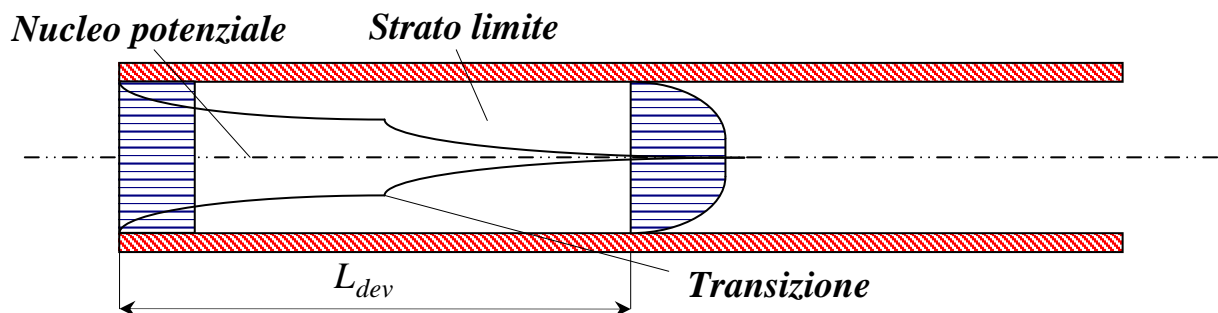
- Nel caso del moto di un fluido all'interno di un condotto, lo strato limite comincia a formarsi nella zona di imbocco determinando un'accelerazione del nucleo in moto potenziale al centro
- Si ha che:
  - ♦ per basso  $Re$  ( $Re < 2 \times 10^3$ ) lo strato limite si mantiene laminare e termina in una corrente laminare stazionaria; la lunghezza necessaria per lo sviluppo del moto è data da:

$$L_{dev} \approx (0.03 \div 0.05) \times Re_D D$$



- ♦ lo strato limite e la corrente possono subire transizione a moto turbolento ad un valore di  $Re$  dipendente anche dal livello di disturbo presente ( $Re > 2 \times 10^3 \div 10^4$ ); normalmente per  $Re > 4000$ , il moto può considerarsi turbolento; la lunghezza di sviluppo è di circa 30-60 diametri e il profilo di velocità è più piatto

$$L_{dev} \approx (30 \div 60) D$$



- Nel moto all'interno di condotti circolari il profilo di velocità si approssima con *leggi di potenza*

$$w_z(r) = w_{z,\max} \left[ \frac{y}{R} \right]^n = w_{z,\max} \left[ 1 - \frac{r}{R} \right]^n$$

in cui  $n$  assume valori appropriati. Una scelta frequente è quella del *profilo di potenza*  $1/7$

$$w_z(r) = w_{z,\max} \left[ 1 - \frac{r}{R} \right]^{1/7}$$

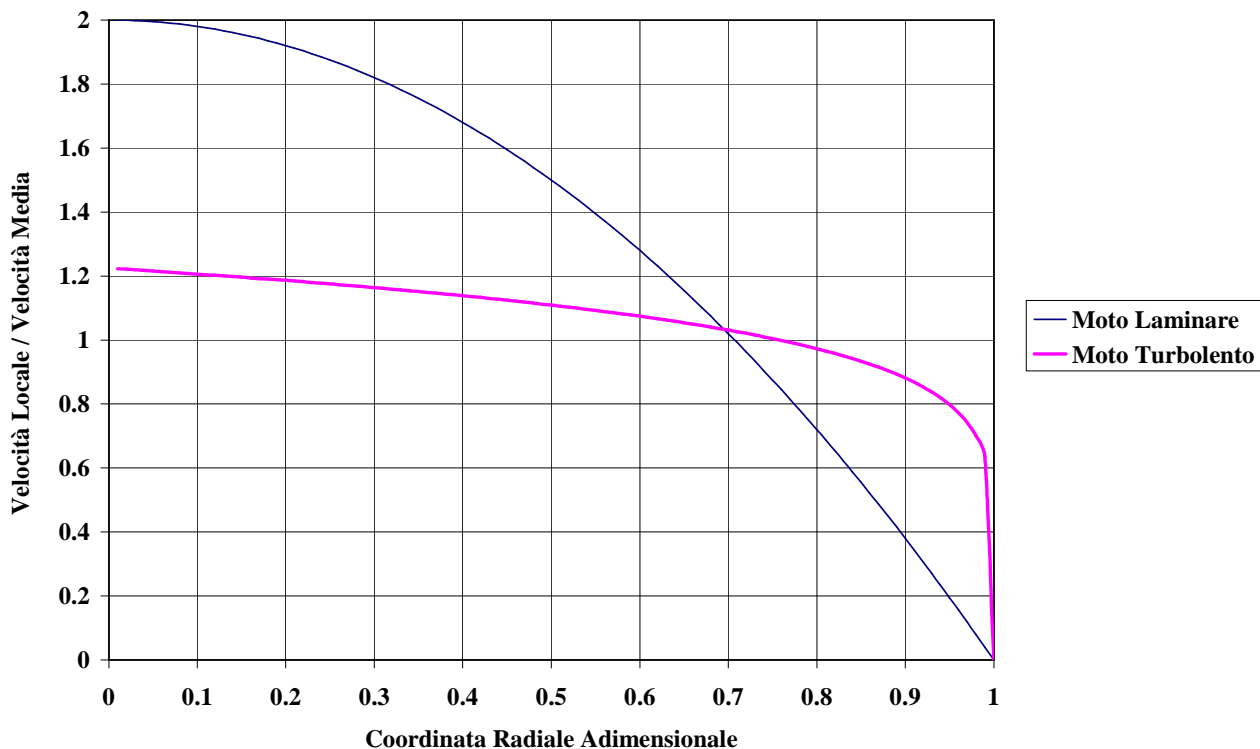
- Si nota che il profilo di velocità in moto turbolento in un condotto circolare è più appiattito che in caso di moto laminare; infatti:

♦ *in moto laminare*

$$w_z(r) = w_{z,\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad \bar{w}_z = 0.5 w_{z,\max}$$

♦ *in moto turbolento con profilo di potenza  $1/7$*

$$\bar{w}_z = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R w_{z,\max} \left[ 1 - \frac{r}{R} \right]^{1/7} 2\pi r dr = \frac{49}{60} w_{z,\max} = 0.817 w_{z,\max}$$



- Inoltre a parità di portata, nel moto turbolento le perdite di carico per attrito sono maggiori che nel moto laminare

## Perdite di carico distribuite e fattori di attrito in moto turbolento

- Abbiamo visto che le perdite di carico per attrito in un condotto,  $\Delta p_f$  (in termini di pressione) o  $H_f$  in termini di altezza, si possono valutare tramite la relazione di *Darcy-Weisbach*

$$\Delta p_f = f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2 = [Pa] \qquad H_f = f \frac{L}{D} \frac{\bar{w}_z^2}{2g} = [m]$$

in cui  $f$  è il fattore di attrito (di Darcy-Weisbach)

- Nel caso del moto laminare in un condotto cilindrico, vale la legge di Poiseuille che fornisce:

$$f = \frac{64}{Re} \qquad Re = \frac{\rho \bar{w}_z D}{\mu}$$

traducendo la diretta proporzionalità tra  $\Delta p_f$  e portata volumetrica espressa dalla legge di Poiseuille-Hagen (v. lez. precedenti)

- Per moto turbolento, si trova, invece, che per *tubi lisci* la relazione tra portata volumetrica,  $Q = A \bar{w}_z$ , e perdite di carico per attrito è del tipo

$$\Delta p_f \propto Q^m$$

con  $m$  dell'ordine di  $7/4$

- Essendo, perciò

$$\frac{\Delta p_f}{L} \propto Q^{7/4} \propto \bar{w}_z^{7/4}$$

per cui risulta

$$\frac{f}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2 = \frac{\Delta p_f}{L} \propto \bar{w}_z^{7/4} \Rightarrow f \propto \frac{\bar{w}_z^{7/4}}{\bar{w}_z^2} = \bar{w}_z^{-0.25}$$

- La *relazione di Blasius*, in particolare, ha la forma:

$$f = 0.316 Re^{-0.25} \qquad Re < 30000, \text{ tubi lisci}$$

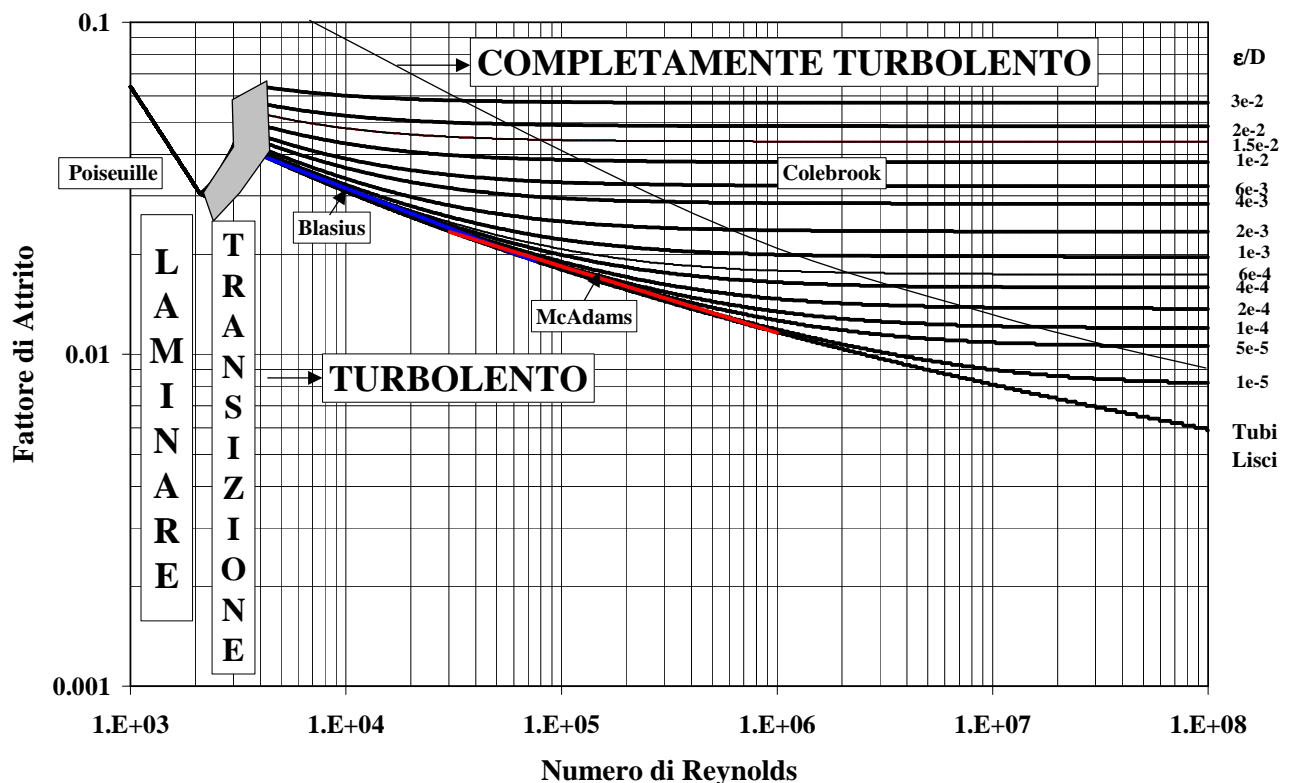
- Sempre per tubi lisci, ma a più elevato numero di Reynolds, si ha invece la *relazione di McAdams*

$$f = 0.184 Re^{-0.2} \qquad 30000 < Re < 1000000, \text{ tubi lisci}$$

- Per tubi con rugosità non trascurabile, invece, si nota che ad elevati numeri di Reynolds il fattore di attrito raggiunge un valore asintotico dipendente solo dal parametro di rugosità  $\varepsilon/D$ , in cui  $\varepsilon$  rappresenta la rugosità superficiale [m]
- Ciò rende ragione della forma assunta dalla formula di Darcy-Weisbach che suggerisce una dipendenza delle perdite di carico dal quadrato della velocità
- Valgono *formule empiriche* del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.70} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right] \quad (\text{Colebrook})$$

che rappresentano approssimazioni del *diagramma di Moody*



(riportato qualitativamente in figura)

- E' bene ricordare nuovamente che tra il *fattore di Darcy-Weisbach*,  $f$ , ed il *fattore di Fanning*,  $f'$ , sussiste la relazione

$$f' = \frac{f}{4}$$

Perciò, quando si voglia calcolare il fattore di Fanning, i valori forniti dalle relazioni precedenti devono essere divisi per 4

- Dal diagramma di Moody si può notare che:
  - ♦ per  $Re < 2000$ , si applica la legge di Poiseuille,  $f = 64/Re$
  - ♦ per  $2000 < Re < 4000$ , si ha una zona di transizione in cui non è possibile predire con precisione il regime di moto
  - ♦ per  $Re > 4000$ , si considera che il moto sia turbolento, anche se non completamente sviluppato: il fattore di attrito diminuisce con l'aumentare del numero di Reynolds anche per tubi rugosi
  - ♦ le relazioni di Blasius e McAdams forniscono approssimazioni “locali” del fattore di attrito per tubi lisci
  - ♦ per  $Re$  sufficientemente elevato e tubi rugosi si ha un moto turbolento completamente sviluppato:  $f$  non varia più con  $Re$
  - ♦ la transizione a moto turbolento completamente sviluppato avviene per valori di  $Re$  tanto più bassi quanto più elevata è la rugosità

L'ultima delle precedenti osservazioni trova la sua giustificazione nell'assottigliarsi del sottostrato laminare con l'aumentare di  $Re$  che produce una interazione diretta tra turbolenza e asperità superficiali.

- Valori tipici per la rugosità sono:

Materiale	$\varepsilon [m]$
Vetro, plastica	Liscio
Rame, ottone, piombo (tubi)	$1.5 \times 10^{-6}$
Acciaio commerciale o saldato	$4.6 \times 10^{-5}$
Acciaio lavorato	$4.6 \times 10^{-5}$
Acciaio dolce rivestito	$1.2 \times 10^{-4}$
Acciaio dolce non rivestito	$2.4 \times 10^{-4}$
Cemento	$1.2 \times 10^{-4}$
Acciaio rivettato	$1.8 \times 10^{-3}$

(v. R.L. Mott “Applied Fluid Mechanics”, 5<sup>th</sup> Edition, Prentice Hall)

(valori medi per tubi nuovi e puliti)

- Un'altra formula pratica per la valutazione del coefficiente di attrito nel campo turbolento è quella di *P.K. Swamee and A.K. Jain*, che ha il vantaggio di essere esplicita

$$f = \frac{0.25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{1}{3.7(D/\epsilon)} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (5000 < Re < 10^8, 100 < D/\epsilon < 10^6)$$

- Una formula che copre l'intero intervallo di numeri di Reynolds è (sia in moto laminare che turbolento) è quella di *Churchill*

$$f = 8 \left[ \left( \frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{3/2}} \right]^{\frac{1}{12}}$$

in cui

$$A = \left[ 2.457 \ln \left\{ \frac{1}{(7/Re)^{0.9} + 0.27 (\epsilon/D)} \right\} \right]^{16} \quad B = \left[ \frac{37530}{Re} \right]^{16}$$

- E' possibile trovare in letteratura altre formulazioni che forniscono valori approssimati del fattore di attrito
- La formula di Darcy-Weisbach può essere utilizzata anche nel caso di tubazioni con sezione non circolare. In questo caso si definisce un “*diametro idraulico*” tramite la relazione:

$$D_h = \frac{4 \times \text{area}}{\text{perimetro bagnato}}$$

- Ad es., nel caso di un condotto anulare si ha:

$$D_h = \frac{4 \times \pi (R_e^2 - R_i^2)}{2\pi R_i + 2\pi R_e} = 2 \frac{R_e^2 - R_i^2}{R_i + R_e} = D_e - D_i$$

e similmente per altre geometrie.

- Esso viene utilizzato come diametro caratteristico del condotto per ottenere valori approssimati delle perdite di carico per attrito.



### Relazioni per la valutazione diretta della portata in un condotto

- Esistono anche formulazioni che forniscono direttamente la velocità o la portata volumetrica in una condotta percorsa da un fluido assegnato in determinate condizioni
- Ad esempio, la *formula di Hazen-Williams* fornisce il valore della velocità media in un tubo di diametro compreso tra 2" (circa 5 cm) e 6 ft (circa 1.8 m) percorso da acqua a 60° F (15.6 °C) nella forma

$$\bar{w} = 0.85 C_h R^{0.63} s^{0.54}$$

in cui  $C_h$  (60 - 150) dipende dalle condizioni della superficie del tubo,  $R$  è il raggio idraulico definito dalla relazione

$$R = \frac{\text{area della sezione}}{\text{perimetro bagnato}} = \frac{A}{\Pi_w}$$

ed è

$$s = \frac{H_L}{L} = \frac{\text{perdita di carico}[m]}{\text{lunghezza}[m]}$$

Per l'applicabilità di questa formula la velocità non dovrebbe essere superiore a 10 ft/s (circa 3 m/s)

- Il vantaggio di formulazioni pratiche di questo tipo rispetto all'applicazione del teorema di Bernoulli o dell'equazione della quantità di moto con la valutazione delle perdite di carico risiede nella possibilità di evitare il processo iterativo dovuto alla dipendenza del fattore di attrito dalla portata
- Per contro, l'uso della formula è limitato al caso dell'acqua nelle condizioni specificate e, ad esempio, nel caso di temperature troppo diverse da quella specificata si possono ottenere predizioni non accurate
- In termini di portata volumetrica, la formula di Hazen-Williams diventa, ovviamente

$$Q = 0.85 A C_h R^{0.63} s^{0.54}$$

- Sono anche disponibili nomogrammi per la valutazione diretta della portata in funzione degli altri dati (v. ad es., *R.L. Mott "Applied Fluid Mechanics", 5th Edition, Prentice Hall*)

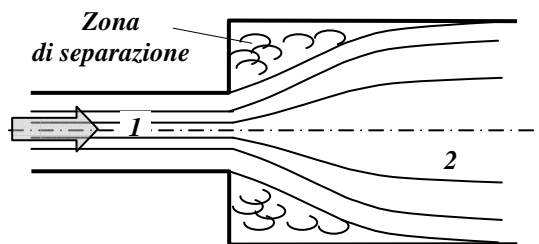
### Perdite di carico locali (o minori o singolari)

- All'interno di un condotto possono essere presenti anche ostacoli quali ostruzioni, restringimenti o allargamenti bruschi della sezione e tratti curvilinei
- La loro presenza causa *perdite di carico localizzate (o minori o singolari)* che si aggiungono a quelle dovute all'attrito distribuito
- Queste perdite di carico vengono valutate tramite relazioni del tipo

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2 = [Pa] \qquad H_L = K \frac{\bar{w}_z^2}{2g} = [m]$$

a seconda che si desideri averle in Pa o in metri, in cui  $K$  è un opportuno coefficiente che viene valutato sperimentalmente per la configurazione in esame

- Esistono manuali che ne riportano i valori per ogni tipo di ostacolo (v. ad es., “*Memento de pertes de charge*” di Idel'cik)
- Consideriamo alcune configurazioni tipiche che introducono perdite di carico concentrate:



#### ♦ Brusco allargamento

In questo caso, viene a generarsi una regione di turbolenza e separazione che dissipa energia.

L'estensione di tale regione è maggiore quanto maggiore è il

rapporto tra i diametri delle due tubazioni

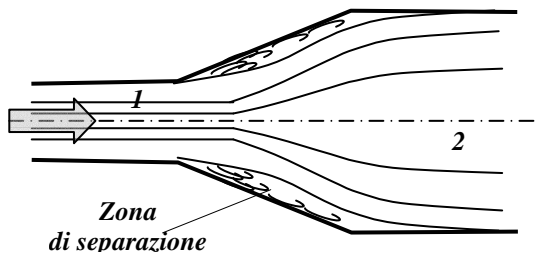
La perdita di carico relativa viene calcolata tramite la relazione

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_1^2$$

in cui compare la velocità al diametro più piccolo e si trova sperimentalmente che  $K$  dipende dal rapporto tra i diametri a monte e a valle e anche dalla velocità nel condotto.

Semplificando si può ottenere il seguente risultato

$$K = [1 - (A_1/A_2)]^2$$



#### ♦ Allargamento graduale

Se l'allargamento è graduale, la perdita di carico è minore perché viene a ridursi la zona di separazione in prossimità della parete. Si ha ancora:

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_1^2$$

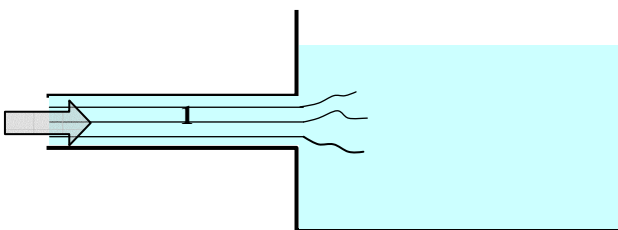
in cui  $K$  dipende fortemente dall'angolo di apertura del cono. Sono disponibili valori tabulati. La velocità di riferimento è ancora quella del tubo più piccolo.

Per un valore dell'angolo di apertura di  $7^\circ$  circa si ha un minimo delle perdite dovute all'attrito e all'allargamento.

Come si nota, sebbene i *diffusori ideali* di cui si è parlato applicando il teorema di Bernoulli permettano di convertire parte del carico cinetico in carico di pressione, nei *diffusori reali* sono presenti perdite di energia che danno luogo a valori inferiori della pressione nel tratto a maggior diametro rispetto a quelli predetti da Bernoulli.

#### ♦ Perdita di uscita

Quando una tubazione termina in una tanca di grosse dimensioni l'energia cinetica del fluido viene completamente dissipata.

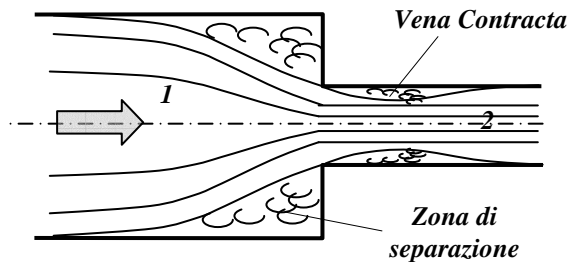


In questo caso si assume che tutta l'energia cinetica del fluido venga ad essere dissipata. Si ha perciò:

$$\Delta p_L = \frac{1}{2} \rho \bar{w}_1^2$$

cioè  $K=1$ ; come si vede la velocità di riferimento è quella del tubo in ingresso.

### ◆ Brusco restringimento



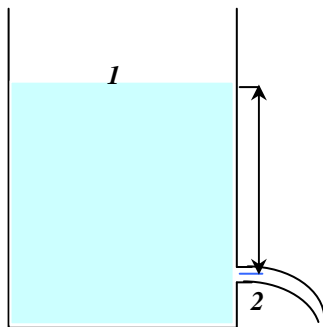
Nel caso di un brusco restringimento la perdita di energia avviene sia a causa della presenza di una zona di separazione che della formazione di una restrizione del tubo di flusso (*vena contracta*)

La ragione di questo fenomeno è legata all'incurvamento delle linee di flusso all'ingresso del restringimento che provano una separazione ed una nuova adesione dello strato limite alla parete.

Il coefficiente di perdita di carico concentrata dipende dal rapporto tra i diametri e dalla velocità. Si applica la formula

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_2^2$$

in cui la velocità di riferimento è quella della parte di tubo con diametro minore.



A proposito di *vena contracta* rivisitiamo un problema incontrato tra le applicazioni del teorema di Bernoulli. Per la tanca in figura il Teorema di Torricelli afferma che la velocità in uscita è

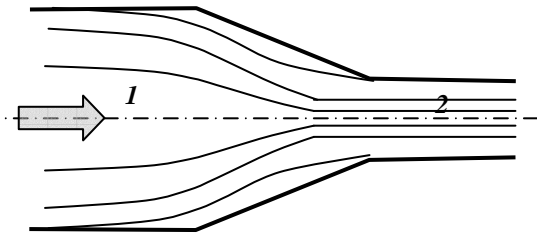
$$w = \sqrt{2gh}$$

La portata volumetrica attraverso l'orifizio, di area  $A_o$ , è però generalmente inferiore a  $A_o \sqrt{2gh}$  perché a seconda della forma dell'orifizio si ha la formazione di una vena contracta che riduce l'area effettiva di efflusso. Si ha:

$$Q = C_{vc} A_o \sqrt{2gh}$$

in cui il coefficiente di vena contracta  $C_{vc}$  assume valori che vanno da circa 0.62 per un orifizio senza arrotondamento dei bordi ad 1 per un orifizio con bordi arrotondati in modo da seguire il flusso.

### ◆ Restringimento graduale



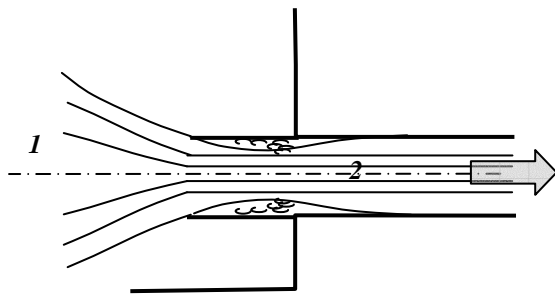
Per ridurre le perdite di carico in prossimità di un restringimento, si può adottare un tratto a forma di tronco conico.

L'angolo di apertura del cono, il rapporto tra i diametri e  $Re$  sono i parametri da cui dipende  $K$  e la formula per valutare la caduta di pressione è ancora

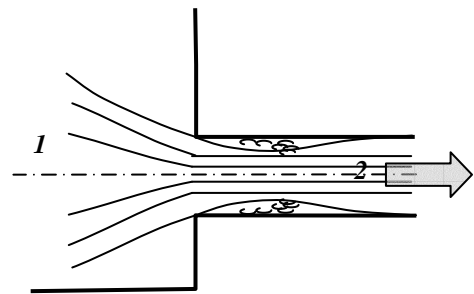
$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_2^2$$

Ad es., per aperture dell'ordine di  $15^\circ$ - $40^\circ$  il valore di  $K$  può essere molto piccolo ( $\leq 0.05$ ) per  $D_1/D_2 \leq 3$  e  $Re > 10^5$ .

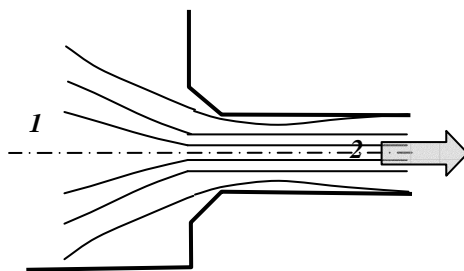
### ◆ Perdite di ingresso



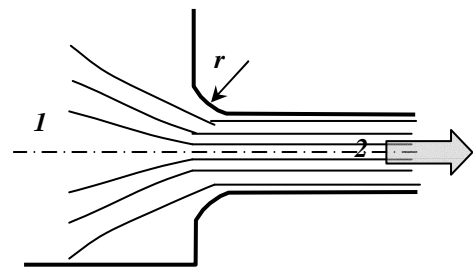
Tubo rientrante ( $K \approx 1$ )



Ingresso con spigoli vivi ( $K \approx 0.5$ )



Ingresso con raccordo conico ( $K = 0.25$ )



Ingresso con raccordo arrotondato ( $K = f(r/D_2)$ )

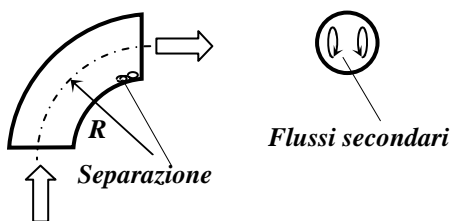
Si tratta di un caso particolare di contrazione, in cui il coefficiente di perdita di carico dipende molto dalla configurazione geometrica della zona di imbocco (ad es., raggio di raccordo). Si ha:

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_2^2$$

### ♦ Tratti di tubazione curvilinei

Anche le curve sono sede di perdita di carico; ciò avviene essenzialmente per le seguenti ragioni:

- presenza di perdite di carico per attrito di tipo distribuito
- possibilità di separazione dello strato limite nella zona a valle della curva
- possibilità dell'instaurarsi di flussi secondari nei piani ortogonali all'asse a causa della forza centrifuga



La perdita di carico legata alla separazione e ai flussi secondari può essere valutata in funzione del rapporto  $R/D$  tra il raggio di curvatura dell'asse e il diametro del tubo

Talora i dati sono forniti per curve a  $90^\circ$  e possono essere estesi al caso di curve con diversa apertura tramite formule di conversione (v. *R.L. Mott, op. cit., pp. 293-294*)

Si ha ancora

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2$$

### ♦ Valvole ed altri componenti

Le tubazioni possono contenere anche valvole di vario genere e componenti quali giunzioni curve, a T, ecc..

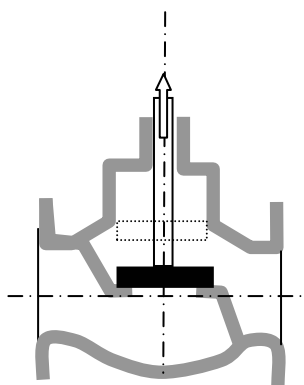
I coefficienti di perdita di carico relativi variano a seconda del tipo di componente e della sua geometria. Talora essi vengono forniti in termini di una lunghezza equivalente di tubo,  $L_e$ , nella forma

$$K = (L_e/D) f_T$$

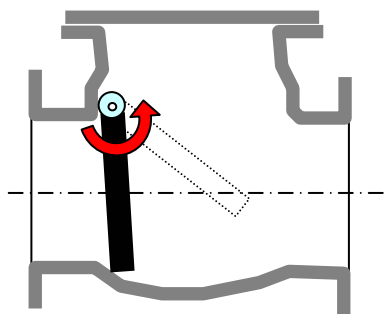
in cui  $f_T$  è il fattore di attrito per il tubo sul quale il componente è montato, valutato nella zona di completa turbolenza (elevato  $Re$ )

(v. *R.L. Mott, op. cit., pp. 284-293*)

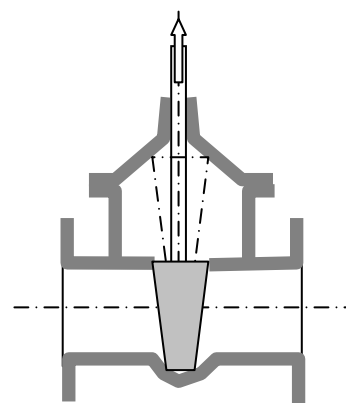
Alcune delle configurazioni tipiche per le valvole più comuni sono illustrate nel seguito.



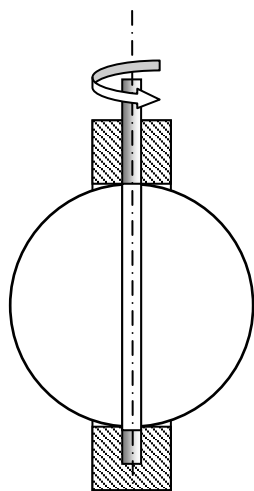
**Valvola ad otturatore**



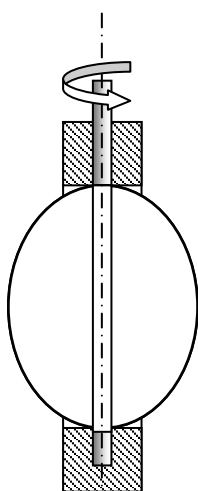
**Valvola di non-ritorno**



**Valvola a saracinesca**

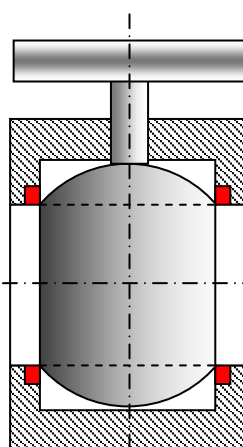


**Aperta**

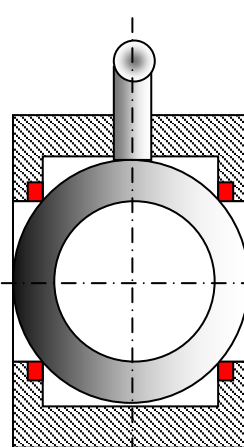


**Parzialmente aperta**

**Valvola a farfalla**



**Aperta**



**Chiusa**

**Valvola a sfera**

**RIASSUMENDO:** Allo scopo di dare un'idea grossolana dell'ordine di grandezza di  $K$  in casi di interesse si riporta la tabella seguente

<b>Tipo</b>	<b>K</b>
<b>Ingresso in un tubo circolare (bordo tagliente)</b>	<b>0.50</b>
<b>Ingresso in un tubo circolare (bordo smussato)</b>	<b>0.25</b>
<b>Gomito a 45°</b>	<b>0.42</b>
<b>Gomito a 90°</b>	<b>0.90</b>
<b>Valvola ad otturatore (completamente aperta)</b>	<b>10.0</b>
<b>Valvola a saracinesca (completamente aperta)</b>	<b>0.19</b>
<b>Aumento brusco di sezione</b>	$(1 - A_{monte} / A_{valle})^2$

(v. Hughes & Brighton, *Fluid Dynamics*, McGraw Hill, 3<sup>rd</sup> Ed.)

### Cenni alle Caratteristiche delle Pompe

Le pompe sono elementi attivi utilizzati per permettere la circolazione dei liquidi all'interno di tubazioni.

In particolare, esse devono fornire la *prevalenza* necessaria a compensare le variazioni dei termini cinetici, piezometrici e geometrici nell'equazione di Bernoulli, nonché le perdite per attrito.

Considerate due sezioni del condotto identificate con 1 e 2, si ha:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} + z_1 + H_P - H_L = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + z_2$$

in cui  $H_L$  è la somma delle perdite di carico per attrito (distribuite e concentrate) in metri ed  $H_P$  è la *prevalenza* fornita dalla pompa.

La *potenza* fornita dalla pompa al fluido è data da

$$P_P = \Delta p_P Q = \left[ \frac{N}{m^2} \frac{m^3}{s} \right] = \left[ N \frac{m}{s} \right] = \text{forza} \times \text{velocità} = [W]$$

in cui  $Q$  è la portata volumetrica e  $\Delta p_P$  la variazione di pressione a cavallo della pompa; si ha anche

$$P_P = \rho g H_P Q \quad \text{ovvero} \quad P_P = \gamma H_P Q$$

in cui  $\gamma$  è il peso specifico del fluido.

La potenza così calcolata rappresenta quella ceduta al fluido. In realtà il motore applicato alla pompa deve fornire una potenza superiore perché una parte di tale potenza viene perduta:

- per l'attrito meccanico
- per la turbolenza indotta nel fluido al passaggio nella girante

Si definisce perciò un *rendimento*,  $0 < \eta_P < 1$ , che dipende dal tipo di pompa e permette di valutare la potenza richiesta al motore

$$P_M = \frac{P_P}{\eta_P}$$

Per pompe centrifughe si ha  $\eta_P \approx 0.50 \div 0.85$ .

Esistono diversi tipi di pompe che vengono classificate in funzione del principio di funzionamento. Una possibile classificazione è la seguente:

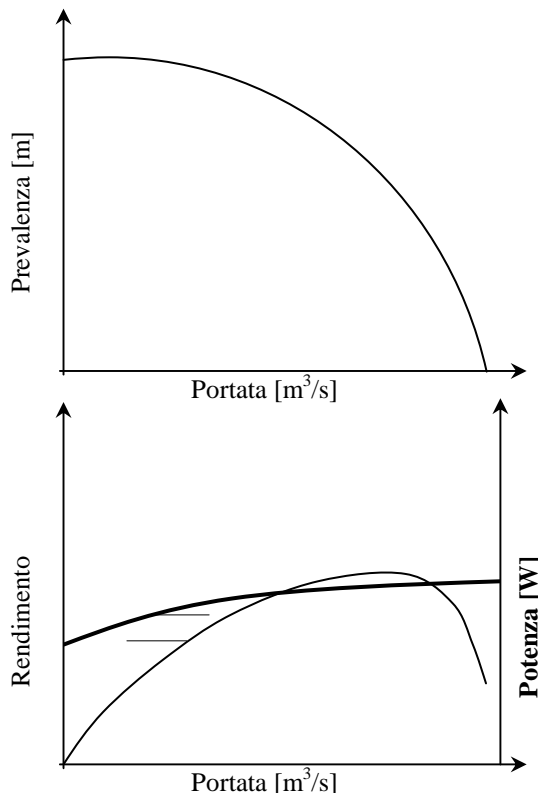


- Pompe Volumetriche (*positive displacement pumps*)
  - ◆ con elementi rotanti (*rotary*)
  - ◆ alternative (*reciprocating*)
- Pompe Cinetiche (*kinetic pumps*)
  - ◆ a flusso radiale o centrifughe (*centrifugal*)
  - ◆ a flusso assiale o assiali (*propeller*)
  - ◆ a flusso misto
- Pompe a getto o eiettori (*jet pumps*)

(v. R.L. Mott, op. cit., pp. 368-378 per una descrizione più dettagliata)

Ci occuperemo nel seguito solo delle pompe centrifughe.

Il loro principio di funzionamento è basato sull'aumento di quantità di moto del fluido ottenuto tramite la rotazione della pale della girante e la conversione in pressione dell'energia cinetica acquisita tramite un diffusore.



Tipici andamenti qualitativi delle curve caratteristiche di una pompa centrifuga sono dati nelle figure.

La similitudine fluidodinamica permette di stabilire *leggi di affinità* che consentono di prevedere la variazione di portata, prevalenza e potenza in funzione del numero di giri al minuto  $N$  o del diametro della girante  $D$ .

Se  $N$  varia si ha ( $D$  costante) :

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2}} \quad \boxed{\frac{H_{P1}}{H_{P2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2} \quad \boxed{\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^3}$$

Se  $D$  varia si ha ( $N$  costante) :

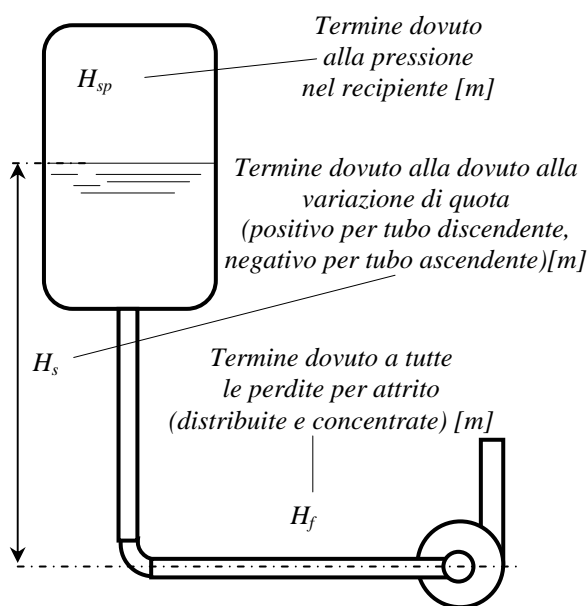
$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3} \quad \boxed{\frac{H_{P1}}{H_{P2}} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2} \quad \boxed{\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^5}$$

Un fattore molto importante per l'applicazione di una pompa è il cosiddetto *Net Positive Suction Head richiesto* ( $NPSH_R$ ) dalla pompa.

Esso è legato al possibile instaurarsi di condizioni di *cavitazione*, fenomeno che si presenta quando, a causa di una pressione troppo bassa in ingresso, si ha la formazione di bolle di vapore o gas disciolti all'ingresso o all'interno della pompa.

Ciò ha come conseguenza una ridotta efficienza della pompa e, a causa dell'implosione delle bolle nelle zone a più elevata pressione, rumorosità ed erosione.

L' $NPSH_R$ , perciò, rappresenta un valore caratteristico della pompa che deve essere sempre sufficientemente minore dell' $NPSH$  disponibile ( $NPSH_A$ ). Un margine minimo del 10% può essere considerato accettabile in molte applicazioni, ma si può essere molto più restrittivi (fino a richiedere margini del 100%).



Nella figura viene riportata una situazione tipica per la valutazione dell' $NPSH_A$ .

Si ha:

$$NPSH_A = H_{sp} + H_s - H_f - H_{vp}$$

in cui  $H_{vp}$  è il termine legato alla pressione di vapore saturo del liquido alla temperatura di pompaggio [m]. Nel caso in cui siano presenti gas disciolti compare un termine aggiuntivo ad essi relativo.

I termini  $H_{sp}$  e  $H_{vp}$  vengono ottenuti tramite le relazioni:

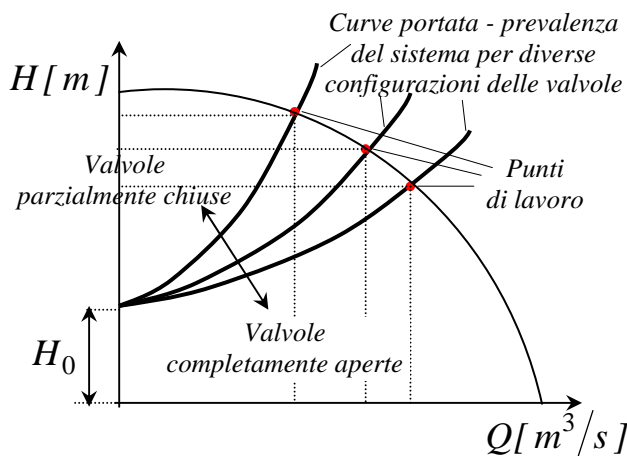
$$H_{sp} = \frac{P_{abs,tanca}}{\rho g} \quad H_{pv} = \frac{P_{v,sat}(T)}{\rho g}$$

in cui  $p_{abs,tanca}$  e  $p_{v,sat}(T)$  sono la pressione assoluta nella tanca e la pressione di saturazione del liquido alla temperatura di pompaggio.

L' $NPSH_R$  di una pompa varia con  $N^2$ :

$$NPSH_{R,2} = NPSH_{R,1} \times (N_2/N_1)^2$$

Il **punto di lavoro** di una pompa in un determinato sistema si ottiene intersecando la caratteristica della pompa con la curva portata - prevalenza del sistema.



Le curve portata - prevalenza del sistema possono variare a seconda del grado di apertura delle valvole (ad es., di regolazione) presenti.

Variano, infatti, i relativi coefficienti di perdita di carico.

Si nota che:

- la portata aumenta con il grado di apertura delle valvole
- corrispondentemente la prevalenza fornita dalla pompa si adatta a quella, sempre inferiore, richiesta dal sistema esterno
- in generale, le curve portata - prevalenza del sistema non partono da prevalenza nulla per portata nulla; infatti, anche a portata nulla può essere presente un *carico statico*

$$H_0 = \frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z$$

dovuto alla differenza di pressione e di quota del fluido tra le sezioni estreme del sistema.

I modi di regolare la portata in un circuito contenente pompe sono:

- introdurre valvole di regolazione *a valle* della pompa (si dissipa energia nella valvola)
- utilizzare velocità angolari diverse (ad esempio variando la frequenza della tensione di alimentazione al motore)

Si possono inoltre realizzare combinazioni interessanti utilizzando:

- pompe in parallelo  $\Rightarrow$  maggiore portata, stessa prevalenza
- pompe in serie  $\Rightarrow$  stessa portata, maggiore prevalenza

