<u>Analisi Dimensionale e Similitudine</u>

1. Metodologie per definire parametri di similitudine

- **In fluidodinamica è spesso utile definire *parametri adimensionali* che permettano di generalizzare i risultati ottenuti in un caso specifico ad una intera classe di problemi con dimensioni diverse stabilendo una *similitudine dinamica* tra di essi**
- **Per tale similitudine sono necessarie la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali di interesse**
- **Per definire i numeri adimensionali rilevanti si possono percorrere due possibili strade:**
  - ➢ **la prima viene utilizzata quando non si conoscano le equazioni che governano il processo, ma solo il tipo ed il numero di variabili coinvolte**
  - ➢ **la seconda si applica quando si conoscono le equazioni che governano il processo**

1. **<u>Teorema π di Buckingham</u>: *il numero di gruppi adimensionali indipendenti necessario per descrivere un fenomeno è dato dal numero di variabili in gioco meno il numero delle dimensioni fondamentali (lunghezza, massa, ecc.) richieste***

   Questo metodo può essere applicato quando si conosca con esattezza quali sono (tutte e sole) le variabili in gioco:

   Es.: scambio termico da una parete

   Variabili: w, h_{conv}, D, ρ, c_p, μ, k **(7 in tutto)**

   Dimensioni: kg, m, s, K **(4 in tutto)**

   Ci aspettiamo di trovare perciò 7 – 4 = 3 numeri adimensionali

   Supponiamo che:

$$\Pi_i = gruppo\ a\,dimensionale = w^a h_{conv}^b D^c \rho^d c_p^e \mu^f k^g$$

Ricordiamo ora che dimensionalmente si ha:

$$w = \left[\frac{m}{s}\right] \qquad h_{conv} = \left[\frac{W}{m^2 K}\right] = \left[\frac{kg\ m^2}{s^3 m^2 K}\right] = \left[\frac{kg}{s^3 K}\right] \qquad D = [m]$$

$$\rho = \left[\frac{kg}{m^3}\right] \qquad c_p = \left[\frac{J}{kgK}\right] = \left[\frac{kg\, m^2}{s^2 kgK}\right] = \left[\frac{m^2}{s^2 K}\right]$$

$$\mu = \left[\frac{kg}{m\, s}\right] \qquad k = \left[\frac{W}{m\, K}\right] = \left[\frac{kg\, m}{s^3 K}\right]$$

Perciò, essendo Π_i adimensionale, deve essere:

$$\left[\frac{m}{s}\right]^a \left[\frac{kg}{s^3 K}\right]^b [m]^c \left[\frac{kg}{m^3}\right]^d \left[\frac{m^2}{s^2 K}\right]^e \left[\frac{kg}{m\, s}\right]^f \left[\frac{kg\, m}{s^3 K}\right]^g = 1$$

Eguagliando a zero l'esponente di ogni dimensione fondamentale, si ottiene un sistema che può essere risolto per ogni Π_i assegnando ogni volta alcuni degli esponenti.

Nel nostro caso, con un po' di algebra, si trovano i seguenti numeri adimensionali:

$$\Pi_1 = \frac{h_{conv} D}{k} \qquad \Pi_2 = \frac{\rho w D}{\mu} \qquad \Pi_3 = \frac{c_p \mu}{k}$$

che rappresentano rispettivamente il *numero di Nusselt,* il *numero di Reynolds* ed il *numero di Prandtl* che avremo modo di incontrare di nuovo

E' bene notare ancora che l'uso del T. di Buckingham ha successo solo se consideriamo tutte e sole le variabili che hanno influenza sul nostro sistema: in caso contrario potremmo essere indotti in errore.

2. Espressione delle equazioni che descrivono il fenomeno in forma adimensionale

- **Consideriamo il moto di un fluido viscoso incompressibile**

  (Eq. di Navier – Stokes)

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = \mu \nabla^2 \vec{w} - \nabla p + \rho \vec{g}$$

si sceglie una *scala di grandezza* per ogni variabile in gioco

$$x = L \cdot x^* \qquad y = L \cdot y^* \qquad z = L \cdot z^* \qquad \vec{w} = w_0 \cdot \vec{w}^*$$

$$t = \frac{L}{w_0} \cdot t^* \qquad p = \rho w_0^2 p^* \qquad \vec{g} = g\,\vec{k}$$

ottenendo anche

$$\nabla \circ = \frac{1}{L} \nabla^* \circ \qquad \nabla^2 \circ = \frac{1}{L^2} \nabla^{*2} \circ \qquad \frac{D}{Dt} \circ = \frac{w_0}{L} \frac{D}{Dt^*} \circ$$

- **Sostituendo nelle equazioni del moto, si ha:**

$$\frac{w_0}{L} \nabla^* \cdot \vec{w}^* = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\nabla^* \cdot \vec{w}^* = 0}$$

$$\rho \frac{w_0}{L} w_0 \frac{D\vec{w}^*}{Dt^*} = \mu \frac{w_0}{L^2} \nabla^{*2} \vec{w}^* - \frac{\rho w_0^2}{L} \nabla^* p^* + \rho g \vec{k}$$

$$\frac{D\vec{w}^*}{Dt^*} = \frac{\mu}{\rho w_0 L} \nabla^{*2} \vec{w}^* - \nabla^* p^* + \frac{gL}{w_0^2} \vec{k}$$

- **Ponendo**

$$Re = \frac{\rho w_0 L}{\mu} = \frac{forze\ \ d'\,inerzia}{forze\ \ viscose} = \left[\frac{\rho w_0^2}{\mu\, w_0 / L} \right]$$ ***(numero di Reynolds)***

$$Fr = \frac{w_0^{\ 2}}{gL} = \frac{forze\ \ d'\,inerzia}{forze\ \ di\ \ gravità} = \left[\frac{\rho w_0^{\ 2}}{\rho g L}\right]$$ ***(numero di Froude)***

si ha infine

$$\boxed{\frac{D\vec{w}^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re}\nabla^{*2}\vec{w}^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{Fr}\vec{k}}$$

- **E' bene ricordare che:**
  - **Il numero di Reynolds ha importanza fondamentale nello stabilire il regime di moto del fluido (laminare o turbolento) e quindi nella definizione di molti parametri di interesse pratico**
  - **Il numero di Froude è coinvolto in molte relazioni riguardanti problemi di "stratificazione" o "miscelamento"**
  - **Dati due sistemi geometricamente simili (ad es., due condotti con la stessa forma), la similitudine dinamica permette di risolvere un problema per uno solo di essi applicandone i risultati ad una intera classe di problemi "simili"**

- **Consideriamo ora lo <u>scambio termico in un fluido viscoso</u>**

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \Phi + q'''$$

- **Eseguiamo l'analisi dimensionale dell'equazione ottenuta**

Si pone

$$x = L \cdot x^* \qquad y = L \cdot y^* \qquad z = L \cdot z^* \qquad \vec{w} = w_0 \cdot \vec{w}^*$$

$$t = \frac{L}{w_0} \cdot t^* \qquad T = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot T^* = T_0 + \Delta T \cdot T^*$$

$$\Phi = \mu\varphi = \mu\left(\frac{w_0}{L}\right)^2 \cdot \varphi^*$$

con T_0 **e** T_1 **temperature di riferimento;**

da ciò risulta anche

$$\nabla\circ = \frac{1}{L}\nabla^{*}\circ \qquad \nabla^{2}\circ = \frac{1}{L^{2}}\nabla^{*2}\circ \qquad \frac{D}{Dt}\circ = \frac{w_0}{L}\frac{D}{Dt^{*}}\circ$$

Ponendo $q''' = 0$, si ottiene

$$\rho c_p \,\Delta T\, \frac{w_0}{L}\frac{DT^{*}}{Dt^{*}} = \frac{k\Delta T}{L^2}\nabla^{*2}T^{*} + \mu\left(\frac{w_0}{L}\right)^2 \varphi^{*}$$

da cui

$$\frac{DT^{*}}{Dt^{*}} = \frac{L}{\rho c_p\,\Delta T w_0}\frac{k\Delta T}{L^2}\nabla^{*2}T^{*} + \frac{L\mu}{\rho c_p\,\Delta T w_0}\left(\frac{w_0}{L}\right)^2\varphi^{*}$$

Si riconosce che

$$\frac{L}{\rho c_p\,\Delta T w_0}\frac{k\Delta T}{L^2} = \frac{1}{w_0 L}\frac{k}{\rho c_p} = \left(\frac{\mu}{\rho w_0 L}\right)\left(\frac{k}{c_p\mu}\right) = \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}$$

in cui compaiono il *numero di Reynolds* ed il numero di *Prandtl*

$$Pr = \frac{c_p\mu}{k} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{\rho c_p}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\textit{diffusività molecolare della quantità di moto}}{\textit{diffusività molecolare del calore (termica)}}$$

Inoltre, risulta

$$\frac{L\mu}{\rho c_p\,\Delta T w_0}\left(\frac{w_0}{L}\right)^2 = \frac{k}{c_p\mu}\frac{\mu}{\rho w_0 L}\frac{\mu {w_0}^2}{k\Delta T} = \frac{Br}{Re\,Pr}$$

in cui compare anche il *numero di Brinkmann*

$$Br = \frac{\mu {w_0}^2}{k\Delta T} = \frac{\textit{produzione di calore per dissipazione viscosa}}{\textit{scambio termico per conduzione}} = \frac{\mu {w_0}^2 / L^2}{k\Delta T / L^2} = \frac{[W/m^3]}{[W/m^3]}$$

- **Si ha perciò**

$$\frac{DT^{*}}{Dt^{*}} = \frac{1}{RePr}\nabla^{*2}T^{*} + \frac{Br}{RePr}\varphi^{*}$$

- **Il prodotto *RePr* si dice *numero di Peclet*; si ha**

$$Pe = RePr = \frac{\rho C_p w_0 L}{k} = \frac{\rho w_0 L}{\mu} \frac{C_p \mu}{k} = \frac{\rho C_p w_0 \, \Delta T}{k \frac{\Delta T}{L}} = \frac{scambio\ termico\ per\ avvezione}{scambio\ termico\ per\ conduzione}$$

Perciò il numero di Peclet misura l'importanza relativa dello scambio termico dovuto al moto del fluido e la conduzione

- **Nei metalli liquidi, l'elevata conducibilità permette il trasporto del calore anche per mezzo della conduzione oltre che della avvezione (valori moderati di** Pe)

- **Per i fluidi con bassa conducibilità (ad esempio, l'acqua) il contributo della conduzione al trasporto del calore (ad esempio, in direzione assiale in un tubo) è invece trascurabile per** $w \neq 0$ **(**$Pe >> 1$**)**

- **Considerando il <u>moto di un fluido compressibile</u> si aggiunge un ulteriore numero adimensionale**

$$M = \frac{w}{w_s} = \frac{velocit\grave{a}\ del\ fluido}{velocit\grave{a}\ del\ suono} = Numero\ di\ Mach$$

  La velocità del suono è definita dalla relazione

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s}}$$

  Per un gas perfetto è

$$w_s = \sqrt{\gamma R T} \qquad\qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

- **Nello <u>scambio termico in *convezione libera*</u> alcuni numeri adimensionali di rilievo sono:**

  - **il numero di Grashof,** $Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2}$**, e il numero di Rayleigh,** $Ra = Gr\,Pr$**, spesso utilizzati nelle correlazioni di scambio termico per convezione libera**

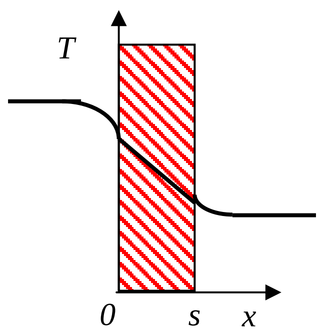
- **il rapporto** Gr/Re^2

$$Gr/Re^2 = \frac{\rho^2 g\,\beta\,\Delta T\,L^3}{\mu^2}\frac{\mu^2}{\rho^2 w_0^2 L^2} = \frac{g\,\beta\,\Delta T\,L}{w_0^2} = \frac{\rho g\,\beta\,\Delta T\,L}{\rho w_0^2} = \frac{galleggiamento}{inerzia}$$

il cui valore permette di stabilire quando la "convezione libera" o la "convezione forzata" predominano

- **in particolare se** $Gr/Re^2 << 1$ **predomina la convezione forzata**
- **se** $Gr/Re^2 >> 1$ **è la convezione libera ad essere più importante**
- **se** $Gr/Re^2 \approx 1$ **si è in regime di convezione mista.**

- **<u>Parametri adimensionali nella conduzione</u>**



- **Consideriamo *una parete solida monodimensionale* con condizioni al contorno di tipo convettivo in assenza di potenza termica volumetrica**
- **Il problema differenziale relativo è**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_w}\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ -k_w \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h_0\left[T_{f0}(t) - T(0,t)\right] \\ -k_w \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=s} = h_s\left[T(s,t) - T_{fs}(t)\right] \\ T(x,0) = T_{in}(x) \end{cases}$$

in cui il pedice w **= wall ricorda che le proprietà considerate sono quelle della parete**

- **La definizione del coefficiente di scambio termico convettivo** h **è data dalla "legge di Newton dello scambio termico"**

$$h = \frac{q''}{T_w - T_f}$$

- **La soluzione del precedente sistema differenziale può essere ottenuta**
  - ***analiticamente*: sviluppo in serie di autofunzioni**
  - ***numericamente*: discretizzando nello spazio e nel tempo**

♦ **Ponendo**

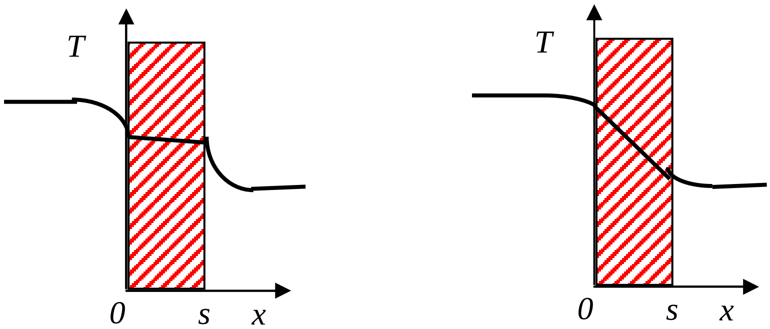
$$x = s \cdot x^* \qquad T = T_0 + \Delta T \cdot T^*$$

con T_0 **e** ΔT **valori di riferimento, si ha**

$$\begin{cases} \dfrac{s^2}{\alpha_w}\dfrac{\partial T^*}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \\ -\left.\dfrac{\partial T^*}{\partial x^*}\right|_{x=0} = \dfrac{h_0 s}{k_w}\left[T^*_{f0}(t) - T^*(0,t)\right] \\ -\left.\dfrac{\partial T^*}{\partial x^*}\right|_{x=s} = \dfrac{h_s s}{k_w}\left[T^*(s,t) - T^*_{fs}(t)\right] \\ T^*(x,0) = T^*_{in}(x) \end{cases}$$

♦ **Si introduce il *numero di Fourier*, come variabile temporale adimensionale** $\quad Fo = \dfrac{\alpha_w t}{s^2} = t^*$

♦ **Il numero di Biot, invece, esprime il rapporto tra le resistenze termiche in gioco**



Bi_0<1, Bi_s<1 **Bi_0>1, Bi_s>1**

Distribuzione stazionaria di temperatura con numeri di Biot diversi

$$Bi = \frac{hs}{k_w} = \frac{s/k_w}{1/h} = \frac{resistenza\ termica\ della\ stuttura}{resistenza\ termica\ tra\ parete\ e\ fluido}$$

♦ **In particolare, Bi traduce quantitativamente l'importanza relativa della conduzione e della convezione per la struttura in esame; in particolare:**

- $Bi << 1 \Rightarrow$ ***scambio termico "limitato" dalla convezione***
- $Bi >> 1 \Rightarrow$ ***scambio termico "limitato" dalla conduzione***

(il fenomeno che "*limitato*" è quello più limitante)

- ♦ **Ad esempio, se *Bi<0.1* si può trascurare la conduzione del calore nella struttura, assumendo un solo valore di temperatura rappresentativo per l'intero spessore (*modello a parametri concentrati*)**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T^*}{\partial t^*} = \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \\ -\left.\dfrac{\partial T^*}{\partial x^*}\right|_{x=0} = Bi_0\left[T^*_{f0}(t) - T^*(0,t)\right] \\ -\left.\dfrac{\partial T^*}{\partial x^*}\right|_{x=s} = Bi_s\left[T^*(s,t) - T^*_{fs}(t)\right] \\ T^*(x,0) = T^*_{in}(x) \end{cases}$$

- **Si ottiene quindi la forma adimensionale del problema differenziale della conduzione**
- **La soluzione di problemi di conduzione, anche 2D o 3D, viene eseguita con tecniche analitiche e numeriche simili a quelle adottate per la diffusione dei neutroni**

- **<u>Ulteriori numeri adimensionali di uso comune</u>**

<u>Numero di Nusselt</u>

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

L'interpretazione del significato di questo adimensionale si ottiene considerando che in prossimità della parete lo scambio è puramente conduttivo (il fluido è quasi fermo), perciò

$$q''_w = -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = h\left(T_w - T_{f\infty}\right) \Rightarrow h = \frac{-k\left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{\left(T_w - T_{f\infty}\right)}$$

Ne risulta che il numero di Nusselt può essere espresso come un gradiente adimensionale

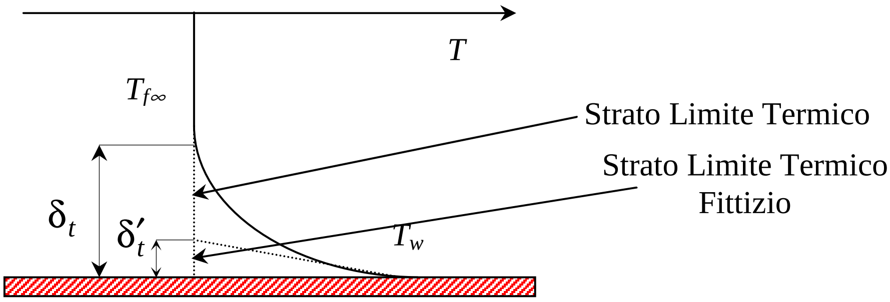
$$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{-\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{\frac{\left(T_w - T_{f\infty}\right)}{L}} = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} \qquad y^* = y/L \qquad T^* = \frac{T_w - T}{T_w - T_{f\infty}}$$

Un'altra interessante interpretazione di *h* si ottiene scrivendo

$$q''_w = k\frac{T_w - T_{f\infty}}{\delta'_t} = h\left(T_w - T_{f\infty}\right)$$

in cui δ'_t è uno *strato limite termico* fittizio (introdurremo questo concetto) che si avrebbe nel caso di pura conduzione; si ha perciò

$$Nu = \frac{h\left(T_w - T_{f\infty}\right)}{k\left(T_w - T_{f\infty}\right)/L} = \frac{h\left(T_w - T_{f\infty}\right)}{k\left(T_w - T_{f\infty}\right)/\delta'_t}\frac{L}{\delta'_t} = \frac{L}{\delta'_t}$$



L'analisi dimensionale mostra che il numero di Nusselt può essere valutato in funzione del *numero di Reynolds* e del *numero di Prandtl* nel caso di *convezione forzata* e del *numero di Grashof* e del numero di Prandtl per *convezione naturale* (o libera), cioè:

$$Nu = f\left(Re, Pr\right) \qquad Nu = f\left(Gr, Pr\right)$$

<u>Numero di Stanton</u>

$$St = \frac{h}{\rho c_p w} = \frac{Nu}{Re\ Pr}$$

E' il rapporto tra il calore scambiato e la capacità termica del fluido. E' un parametro di estrema importanza nelle equazioni di scambio termico, perché grazie all'analogia di Reynolds modificata da Colburn tra scambio termico e scambio di quantità di moto si ha

$$j_H = St\ Pr^{2/3} = \frac{f}{8}$$

valida per un condotto, in cui f è il fattore di attrito di Darcy-Weisbach e j_H è detto fattore di Colburn

Questa formulazione è alla base di alcune delle correlazioni più note per lo scambio termico in condotti in moto turbolento e convezione forzata (Colburn, Dittus-Boelter).

Infatti, assegnata una correlazione per il fattore di attrito

$$f = f(Re,\ldots)$$

si ha una corrispondente correlazione per il coefficiente di scambio.

<u>Numero di Weber</u>

$$We = \frac{\rho w^2 D}{\sigma}$$

Rappresenta il rapporto tra le forze di inerzia e la forza dovuta alla tensione superficiale ed è utilizzato, ad esempio, nella correlazione del diametro di bolle di vapore o di gocce di liquido

<u>Numero di Eulero</u>

$$Eu = \frac{\Delta p_{frict}}{\rho w^2}$$

E' il rapporto tra la perdita di carico per attrito e il carico cinetico.

<u>Numero di Archimede</u>

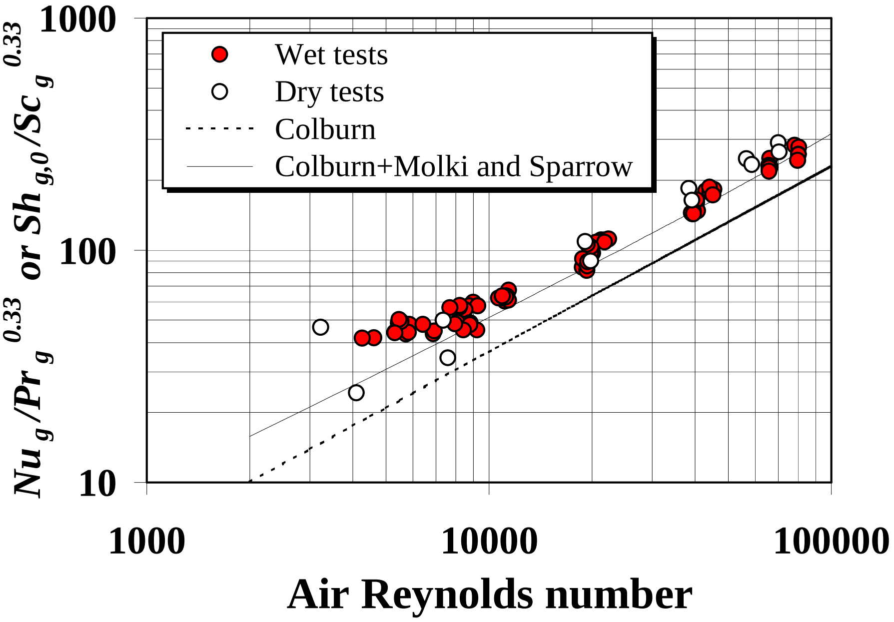
$$Ar = \frac{g\rho_s(\rho_s - \rho_f)L^3}{\mu_f^2}$$

E' il rapporto tra la forza peso meno quella di galleggiamento agenti su di un corpo di densità ρ_s immerso in un fluido di densità ρ_f e viscosità μ_f e le forze viscose (notare la somiglianza con Grashof)

RIASSUMENDO:

A COSA SERVONO IN PRATICA I NUMERI ADIMENSIONALI?

1. **A permettere di correlare dati sperimentali fornendo loro una maggiore generalità**



Nella figura oltre ai numeri di Reynolds, Nusselt e Prandtl compaiono anche i numeri di Sherwood e di Schmidt che riguardano i processi di trasferimento di massa (ad es., evaporazione e condensazione)

2. **A permettere di presentare risultati relativi a problemi posti in forma adimensionale in modo che altri possono utilizzarli nei loro casi particolari**
   - **fare il "best-fit" di dati sperimentali in maniera sufficientemente generale richiede di identificare numeri adimensionali idonei**
   - **scoprire regolarità nei dati che suggerisca una dipendenza da fenomeni fisici di interesse**