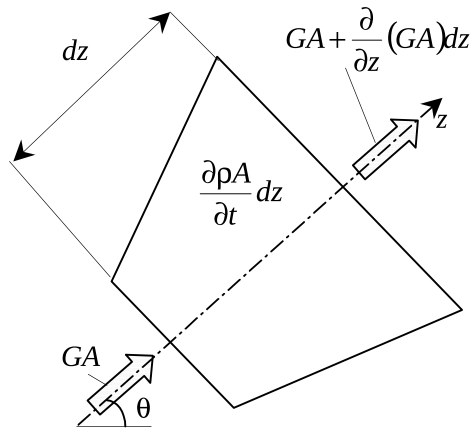
Cenni ai Circuiti con Circolazione Naturale Monofase

Equazioni di Bilancio per Sistemi Monodimensionali

- **Bilancio di Massa**

  Considerato uno spezzone di condotto di lunghezza dz con area (in generale) variabile scriviamo il bilancio di massa *in termini di variabili mediate sulla sezione trasversale*, nella forma



$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)dz}_{\substack{\text{variazione nell'unità di tempo}\\ \text{della massa contenuta}\\ \text{nel volume}}} = \underbrace{GA}_{\substack{\text{portata di massa}\\ \text{in ingresso}}} - \underbrace{\left[GA+\frac{\partial}{\partial z}(GA)dz\right]}_{\substack{\text{portata di massa}\\ \text{in uscita}}}$$

in cui $G = W/A = \rho Q/A = \rho w = \left[kg/\left(m^2 s\right)\right]$, intendendo per velocità w il valore mediato sulla sezione trasversale: $w = \overline{w}$. Qualche volta (soprattutto in problemi bifase) si introduce il *flusso volumetrico*, j, definito dalla relazione

$$j = \frac{Q}{A} = \left[\frac{m}{s}\right]$$

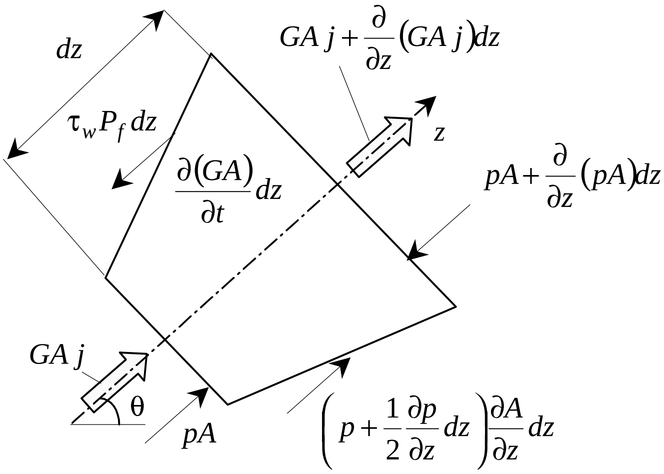
ed è evidente che $w = \overline{w} = j$.

Semplificando il bilancio ottenuto e tenendo conto che l'area non dipende dal tempo, si ha

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}(GA) = 0} \qquad \textit{(bilancio di massa)}$$

- **Bilancio di Quantità di Moto lungo l'asse**

Con riferimento allo stesso spezzone considerato per il bilancio di massa, *in termini di variabili mediate sulla sezione trasversale* si ha



(in figura P_f è il *perimetro bagnato*)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(GA)dz}_{\substack{\text{variazione nell'unità di tempo}\\ \text{della q. di m. contenuta}\\ \text{nel volume}}} = \underbrace{GA\,j}_{\substack{\text{portata di q.di m.}\\ \text{in ingresso}}} - \underbrace{\left[GA\,j + \frac{\partial}{\partial z}(GA\,j)dz\right]}_{\substack{\text{portata di q.di m.}\\ \text{in uscita}}}$$

$$+ \underbrace{pA}_{\substack{\text{forza di pressione}\\ \text{sulla sezione}\\ \text{di ingresso}}} - \underbrace{\left[pA + \frac{\partial}{\partial z}(pA)dz\right]}_{\substack{\text{forza di pressione}\\ \text{sulla sezione}\\ \text{di uscita}}}$$

$$+ \underbrace{\left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)}_{\substack{\text{pressione media}\\ \text{alla parete}}} \underbrace{\frac{\partial A}{\partial z}dz}_{\substack{\text{variazione}\\ \text{di area tra}\\ \text{ingresso ed uscita}}} - \underbrace{\tau_w P_f\, dz}_{\substack{\text{forza di attrito}\\ \text{alla parete}}} - \underbrace{\rho g \sin\theta\, A\, dz}_{\substack{\text{forza peso agente}\\ \text{sul fluido in direzione}\\ \text{di } z}}$$

Semplificando e trascurando termini di ordine superiore, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t}(GA) = -\frac{\partial}{\partial z}(GA\,j) - \frac{\partial}{\partial z}(pA) + p\frac{\partial A}{\partial z} - \tau_w P_f - \rho g \sin\theta\, A$$

Considerando che

$$j = \frac{G}{\rho} \qquad \textbf{e} \qquad \frac{\partial}{\partial z}(pA) = p\frac{\partial A}{\partial z} + A\frac{\partial p}{\partial z}$$

e dividendo ambo i membri per l'area, si ottiene

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{G^2 A}{\rho}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \sin\theta - \tau_w \frac{P_f}{A}} \qquad \textbf{\textit{(bilancio di q. di moto)}}$$

L'equazione precedente può essere anche scritta nella forma:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}}_{\substack{accelerazione\\ temporale}} \underbrace{-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{G^2 A}{\rho}\right)}_{\substack{accelerazione\\ spaziale}} - \underbrace{\rho g \sin\theta}_{\substack{termine\\ gravitazionale}} - \underbrace{\tau_w \frac{P_f}{A}}_{\substack{termine\\ di\ attrito}}$$

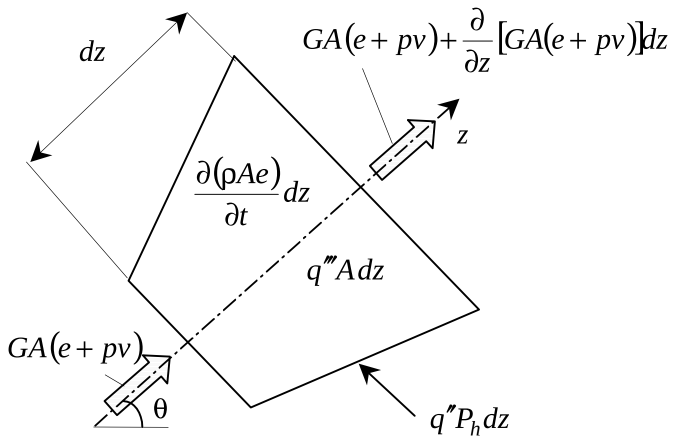
e integrando su di una lunghezza finita

$$\Delta p = \Delta p_{acc,temp} + \Delta p_{acc,spaz} + \Delta p_{grav} + \Delta p_{attr}$$

Ovviamente, nel caso in cui siano presenti perdite di carico localizzate o pompe, dovranno essere introdotti i relativi termini, Δp_{loc} **e** Δp_{pompa}**.**

- **<u>Bilancio di Energia</u>**

Definendo $e = u + w^2/2 + gz$**,** ***in termini di variabili mediate sulla sezione trasversale,*** **si ha:**



$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho A e)dz}_{\substack{variazione\ nell'unità\ di\ tempo\\ dell'energia.\ contenuta\\ nel\ volume}} = \underbrace{GA(e+pv)}_{\substack{potenza\ in\ ingresso\\ col\ fluido}} - \underbrace{\left[GA(e+pv) + \frac{\partial}{\partial z}[GA(e+pv)]dz\right]}_{\substack{potenza\ in\ uscita\\ col\ fluido}}$$

$$+ \underbrace{q'' P_h dz}_{\substack{potenza\ termica\\ alla\ parete}} + \underbrace{q''' A dz}_{\substack{potenza\ generata\\ nella\ massa\ del\ fluido}}$$

in cui P_h **è il *perimetro scaldato*. Si ha quindi**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}[GA(e+pv)] = q''\frac{P_h}{A} + q'''} \qquad \textit{\textbf{(bilancio di energia)}}$$

Una forma equivalente delle equazioni si ottiene facendo uso della relazione $G = \rho w$ ed assumendo che le medie sulle sezioni dei prodotti siano uguali ai prodotti delle medie (cosa in generale non vera):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}(\rho w A) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w^2 A\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \, sin\,\theta - \tau_w \frac{P_f}{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho w A \,(e + pv)\right] = q'' \frac{P_h}{A} + q'''$$

Utilizzazione delle equazioni

- **Le equazioni così trovate possono essere utilizzate oltre che *per fluido monofase* anche *per fluido bifase con ipotesi di equilibrio termico*, temperature di liquido e vapore uguali, *e meccanico*, velocità di liquido e vapore uguali (modello omogeneo di equilibrio)**
- **Si possono affrontare sia problemi relativi a *fluido incompressibile che compressibile*.**
- **Dall'equazione di bilancio della quantità di moto, con qualche manipolazione, è possibile ottenere un'equazione di bilancio dell'energia meccanica che coincide sostanzialmente con il Teorema di Bernoulli, da noi già ampiamente utilizzato**

Circolazione Naturale Monofase

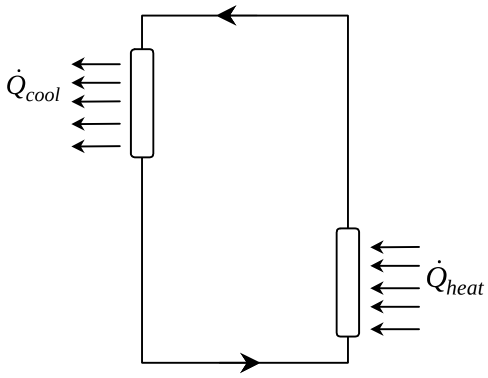
- **La circolazione naturale è un fenomeno ampiamente utilizzato nell'industria e in campo nucleare**
- **Essa si instaura in un circuito quando siano presenti rami ascendenti e discendenti contenenti fluido a diversa temperatura e densità**
- **La circolazione naturale può coinvolgere fluido monofase o bifase: ci occuperemo brevemente solo del primo caso**
- **Le equazioni di bilancio ottenute precedentemente possono dapprima essere scritte facendo comparire l'ascissa curvilinea lungo il circuito (s)**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}(GA)=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G^2 A}{\rho}\right)=-\frac{\partial p}{\partial s}-\rho g\, sin\,\theta(s)-\tau_w \frac{P_f}{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left[GA\,(e+pv)\right]=q''\frac{P_h}{A}+q'''$$

- **Con riferimento al circuito riportato in figura, che si assume possa contenere tubazioni di diametro diverso, si nota che esso è dotato di un elemento riscaldatore e di uno scambiatore i quali cedono ed estraggono calore.**



  - **Come conseguenza il fluido è *più caldo (⇒ più leggero)* all'uscita del riscaldatore e *più freddo (⇒ più pesante)* all'uscita dello scambiatore**
- **Lo sbilanciamento nel peso delle due colonne di fluido, ascendente e discendente, determina una *forza di galleggiamento* che mette in moto il fluido, *contrastata dagli attriti e dall'inerzia***
- **Per meglio comprendere questo effetto, assumiamo che il fluido possa essere assimilato ad un fluido di Boussinesq, tale, cioè, che la sua densità possa essere considerata costante tranne che agli effetti di galleggiamento; si ha:**

$$\rho=\rho_0\left[1-\beta(T-T_0)\right]\approx\rho_0$$

  in cui

$$\beta=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

  è il *coefficiente di dilatazione termica isobaro* del fluido
- **Dalla equazione di bilancio di massa, con l'ipotesi di fluido incompressibile, si ha**

$$\frac{\partial}{\partial s}(GA)=\frac{\partial W}{\partial s}=0 \quad \Rightarrow \quad W=W(t) \quad (\textit{non dipende dalla posizione})$$

- **Integrando l'equazione di bilancio di quantità di moto lungo il circuito con questa ipotesi, si ha:**

$$\oint_{loop} \frac{\partial G}{\partial t} ds + \oint_{loop} \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G^2 A}{\rho}\right) ds = -\oint_{loop} \frac{\partial p}{\partial s} ds - \oint_{loop} \rho g \, sin\,\theta(s) ds - \oint_{loop} \tau_w \frac{P_f}{A} ds$$

Nel seguito tratteremo singolarmente ciascuno dei termini ottenuti

- $\oint_{loop} \frac{\partial G}{\partial t} ds = \oint_{loop} \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(GA) ds = \left[\oint_{loop} \frac{ds}{A}\right]\frac{dW}{dt} = \left[\sum_k \frac{L_k}{A_k}\right]\frac{dW}{dt}$ **in cui la sommatoria è estesa a tutti i tratti di tubazione con sezione uniforme in cui può essere decomposto il circuito**
- $\oint_{loop} \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G^2 A}{\rho}\right) ds = \frac{1}{\rho_0}\oint_{loop} \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(G^2 A\right) ds = \frac{1}{\rho_0}\oint_{loop} \frac{G}{A}\underbrace{\frac{\partial}{\partial s}(GA)}_{=0} ds + \frac{1}{\rho_0}\oint_{loop} \frac{GA}{A}\frac{\partial G}{\partial s} ds$

  $= \frac{1}{2\rho_0}\oint_{loop} \frac{\partial G^2}{\partial s} ds = 0$, **poiché si integra *lungo un circuito chiuso* una derivata spaziale (ottenendo che la differenza tra il valore della funzione negli estremi di integrazione è nulla)**
- $-\oint_{loop} \frac{\partial p}{\partial s} ds = 0$**, per gli stessi motivi di cui sopra**
- $-\oint_{loop} \rho g \, sin\,\theta \, ds = -\rho_0 g \oint_{loop} [1 - \beta(T - T_0)] sin\,\theta(s) ds = -\rho_0 g [1 + \beta T_0] \underbrace{\oint_{loop} sin\,\theta(s) ds}_{=0}$

  $+\rho_0 g \oint_{loop} \beta T \, sin\,\theta(s) ds = \rho_0 g \beta \oint_{loop} T(s) sin\,\theta(s) ds$**: che è il termine di galleggiamento**
- $-\oint_{loop} \tau_w \frac{P_f}{A} ds$**; questo termine verrà sviluppato in seguito**

• **L'equazione di bilancio di quantità di moto, quindi, diventa:**

$$\boxed{\underbrace{\left[\sum_k \frac{L_k}{A_k}\right]\frac{dW}{dt}}_{\substack{var\,iazione \\ temporale}} = \underbrace{\rho_0 g \beta \oint_{loop} T(s) sin\,\theta(s) ds}_{termine\ di\ galleggiamento} - \underbrace{\oint_{loop} \tau_w \frac{P_f}{A} ds}_{attriti}}$$

- **Si nota esplicitamente che:**
  - **il termine di galleggiamento coinvolge la *differenza di temperatura tra tratti ascendenti e discendenti***
  - **infatti, se la temperatura fosse uniforme lungo tutto il circuito, il termine di galleggiamento sarebbe nullo: il fluido avrebbe ovunque la stessa densità**
  - **tratti orizzontali o coppie di tratti ascendenti e discendenti aventi la stessa temperatura e la stessa variazione di quota non contribuiscono al galleggiamento**
  - **i termini di attrito coinvolgono, nella formulazione adottata, solo le perdite di carico distribuite, ma includeremo senza difficoltà anche quelle localizzate**
  - ***si ha una variazione temporale della portata nel circuito quando i termini di galleggiamento ed attrito non si fanno equilibrio***
  - ***in condizioni stazionarie, il galleggiamento compensa esattamente gli attriti***
  - **la differenza di densità, quindi, ha lo stesso ruolo che avrebbe la prevalenza di una pompa nel mantenere il fluido in circolazione**
- **Introducendo la relazione**

$$\tau_w = f'\frac{1}{2}\rho\overline{w}^2 = \frac{f}{4}\frac{1}{2}\rho\overline{w}^2 = \frac{f}{4}\frac{1}{2}\frac{W^2}{\rho A^2}$$

riconoscendo che *per tubi a sezione circolare* risulta

$$\frac{P_f}{A} = \frac{4\pi D}{\pi D^2} = \frac{4}{D}$$

si ha

$$\boxed{\underbrace{\left[\sum_k \frac{L_k}{A_k}\right]\frac{dW}{dt}}_{\substack{var\,iazione\\ temporale}} = \underbrace{\rho_0 g\beta \oint_{loop} T(s) sin\,\theta(s) ds}_{termine\ di\ galleggiamento} - \underbrace{\left[\sum_k \frac{1}{A_k^2}\left(K_k + \frac{f_k L_k}{D_k}\right)\right]\frac{|W|W}{2\rho_0}}_{attriti}}$$

in cui si sono introdotte le perdite di carico concentrate e si è scritto il termine degli attriti tendendo conto che le forze di attrito hanno segno opposto alla velocità

- **Per quanto riguarda l'equazione di bilancio di energia, la forma utilizzabile nel nostro caso discende da quella scritta precedentemente per sistemi monodimensionali con alcune manipolazioni e semplificazioni:**
  - ***si trasforma l'equazione in un bilancio di energia termica, sottraendole un bilancio di energia cinetica***
  - **si trascura l'effetto energetico della dissipazione termica delle forze di attrito e una derivata temporale della pressione**
- **Con queste ipotesi, per il *k*-esimo tratto a sezione costante, si ha:**

$$\rho_0 c_p A_k \left(\frac{\partial T}{\partial t} + w_k \frac{\partial T}{\partial s} \right) = q''_k P_{h,k}$$

in cui compaiono il *perimetro scaldato* e il flusso termico scambiato con la parete. Si ha quindi

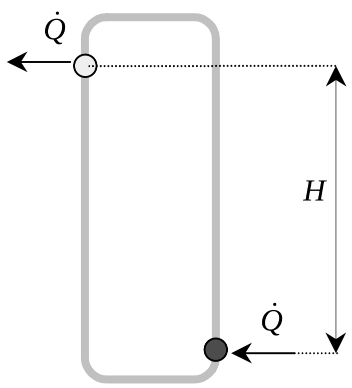
$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_k \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{q''_k P_{h,k}}{\rho_0 c_p A_k} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{W}{\rho_0 A_k} \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{q''_k P_{h,k}}{\rho_0 c_p A_k}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{W}{\rho_0 A_k} \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{4 q''_k}{\rho_0 c_p D_k}} \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

<u>Applicazione:</u>

Portata di circolazione naturale in stazionario in un circuito semplificato

- **Il circuito in figura ha diametro uniforme e il riscaldatore e lo scambiatore sono considerati puntiformi**



- **Si trascurano le perdite di calore attraverso le pareti, per cui il fluido nella tubazione in uscita dal riscaldatore ha una temperatura uniforme, così come accade per il fluido in uscita dallo scambiatore**
- **Infatti, per un tale caso l'equazione stazionaria dell'energia stabilisce**

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

- **D'altra parte, l'equazione di bilancio d'energia nei tratti scaldati o raffreddati diventa**

$$\frac{W}{\rho_0 A}\frac{dT}{ds} = \frac{4q''}{\rho_0 c_p D} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{ds} = \frac{4q'' A}{c_p W D} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{ds} = \frac{q'' \pi D}{c_p W}$$

$$\Rightarrow \quad dT = \frac{q'' \pi D}{c_p W} ds \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{q'' \pi D}{c_p W} \Delta s$$

- **Nel nostro caso è nota la potenza totale scambiata**

$$\dot{Q} = q'' \pi D \Delta s$$

per cui risulta

$$\Delta T = \frac{\dot{Q}}{c_p W}$$

- **Essendo in condizioni stazionarie, l'equazione di bilancio di quantità di moto diventa**

$$\underbrace{\rho_0 g \beta \oint_{loop} T(s) \sin\theta(s) ds}_{termine\ di\ galleggiamento} = \underbrace{\left[\left(\sum_k K_k + \frac{fL}{D}\right)\right] \frac{|W|W}{2\rho_0 A^2}}_{attriti}$$

- **Avendosi solo tratti verticali e orizzontali, in cui $\sin\theta(s)$ assume i valori 1, 0, -1:**
  - **i tratti orizzontali non danno contributo all'integrale a primo membro**
  - **per quanto riguarda i tratti verticali, solo quelli compresi tra le quote del riscaldatore e dello scambiatore danno contributo positivo**
  - **infatti, gli altri tratti verticali danno contributi che si elidono mutuamente perché relativi a fluido con la stessa temperatura in tubazioni con $\sin\theta = 1$ e $\sin\theta = -1$ rispettivamente**
- **Si ha perciò:**

$$\oint_{loop} T(s) \sin\theta(s) ds = T_{gamba\ calda} H - T_{gamba\ fredda} H = \Delta T\, H = \frac{\dot{Q} H}{c_p W}$$

- **Combinando questa relazione con l’equazione di bilancio di quantità di moto**

$$\rho_0 g \beta \frac{\dot{Q} H}{c_p W} = \left[\left(\sum_k K_k + \frac{fL}{D} \right) \right] \frac{|W| W}{2 \rho_0 A^2} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 g \beta \frac{\dot{Q} H}{c_p} = \left[\left(\sum_k K_k + \frac{fL}{D} \right) \right] \frac{|W| W^2}{2 \rho_0 A^2}$$

si ottiene infine la portata stazionaria in funzione degli altri parametri

$$\boxed{W = \sqrt[3]{\frac{2 \rho_0^2 g \beta A^2 \dot{Q} H}{c_p \left(\sum_k K_k + \frac{f(Re) L}{D} \right)}}}$$

- **Anche in questo caso, come in molti visti precedentemente per sistemi di tubazioni, è necessario iterare sul valore del fattore di attrito che dipende esso stesso dalla portata (attraverso Reynolds)**
- **L’esempio visto presenta alcuni aspetti ideali che devono essere corretti in una trattazione realistica:**
  - ***normalmente riscaldatori e scambiatori hanno una lunghezza che non può essere trascurata rispetto alle dimensioni in gioco***

    ciò comporta che l’integrazione del termine di galleggiamento, debba tenere conto anche di tratti di tubazione a temperatura variabile
  - ***la potenza smaltita allo scambiatore dipende dalla temperatura del fluido interno e da quella del fluido secondario***

    ciò, a parità di potenza, comporta un diverso valore della temperatura primaria a seconda delle condizioni di scambio effettive tra primario e secondario ed una conseguente variazione delle proprietà termofisiche del fluido primario
  - ***generalmente, sono coinvolti tratti con diametri diversi***

    questo problema può essere affrontato facendo uso delle equazioni più generali sviluppate nelle pagine precedenti
  - ***i fattori di attrito osservati per circolazione naturale sono maggiori di quelli per circolazione forzata***

    è stato osservato che i fattori di attrito in queste condizioni sono più elevati e sono state proposte correlazioni in accordo coi dati