SOLUZIONE DI PROBLEMI RELATIVI A SISTEMI DI TUBAZIONI

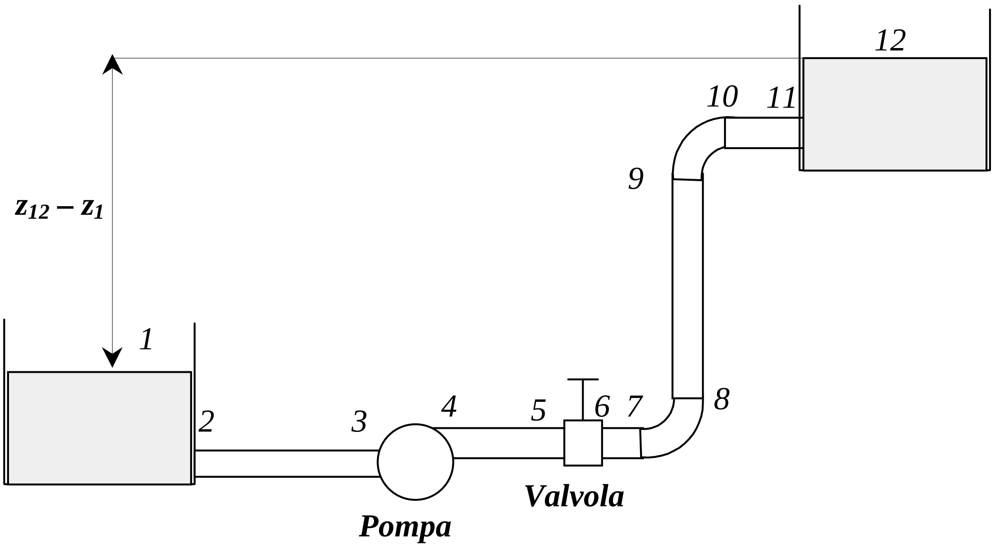
SISTEMI DI TUBAZIONI IN SERIE

- **Si ha un sistema di tubazioni "in serie" quando tutto il fluido che attraversa il sistema scorre lungo uno stesso percorso**
- **Si possono avere tre diverse classi di problemi legati alle tubazioni in serie:**
  - ***Classe I*: il sistema è *completamente definito dal punto di vista delle dimensioni, delle perdite di carico localizzate e della portata* del fluido: si vuole *calcolare la pressione* in alcuni punti di interesse, *o la prevalenza di una pompa*, o *l'altezza di un bacino* concordi con la portata.**
  - ***Classe II*: *il sistema è completamente definito dal punto di vista geometrico e dei componenti in esso presenti; si vuole calcolare la portata che è possibile ottenere* in tale sistema.**
  - ***Classe III*: *la disposizione generale del sistema è definita; si vuole determinare le dimensioni delle tubazioni che consentano una determinata portata.***

Consideriamo ciascuna delle classi di problemi precedentemente elencate per vedere quali siano le possibili tecniche da applicare per ottenerne la soluzione.

A tale scopo, risolveremo alcuni problemi rappresentativi di ciascuna classe, che si riferiscono a fluido incomprimibile.

CLASSE I



Con riferimento al sistema di figura, supponiamo di voler calcolare la potenza della pompa, assegnati il rendimento, η_P, le caratteristiche geometriche della tubazione e la portata volumetrica, Q.

Applicando l'equazione di Bernoulli tra le sezioni 1 e 12 si ha:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{w_1^2}{2g} + H_P = \frac{p_{12}}{\rho g} + z_{12} + \frac{w_{12}^2}{2g} + H_L$$

in cui H_P e H_L sono la prevalenza della pompa e la perdita di carico totale.

Assumendo, $p_1 = p_{12} = p_{atm}$ e $w_1 \approx 0$ e $w_{12} \approx 0$, si ottiene

$$z_1 + H_P = z_{12} + H_L \qquad \Rightarrow \qquad H_P = z_{12} - z_1 + H_L$$

cioè, la prevalenza della pompa deve essere uguale alla somma della variazione di quota + le perdite di carico.

Queste ultime si compongono di diversi contributi:

- **perdita di ingresso in 2:** $H_{L,2} = K_2\left(w_{2,3}^2/2g\right)$
- **attrito lungo la linea di aspirazione :** $H_{L,2-3}^f = (fL/D)_{23}\left(w_{2,3}^2/2g\right)$
- **attrito nei vari tratti della linea di scarico:**

$$H_{L,4-11}^f = H_{L,4-5}^f + H_{L,6-7}^f + H_{L,7-8}^f + H_{L,8-9}^f + H_{L,9-10}^f + H_{L,10-11}^f$$

per ciascuno di questi termini si avrà una espressione del tipo

$$H_{L,p-q}^{f} = \left(fL/D\right)_{p,q}\left(w_{p,q}^{2}/2g\right)$$

- **perdita nella valvola tra 5 e 6:** $H_{L,valvola} = K_{valvola}\left(w_{6,7}^{2}/2g\right)$**, in cui** K_{valve} **è esprimibile nella forma** $K_{valvola} = f_{6,7}^{turb} L_e / D_{6,7}$
- **perdite nelle due curve a 90°:** $H_{L,curve} = H_{7-8}^{curva} + H_{9-10}^{curva}$**, con**

$$H_{p-q}^{curva} = K_{p-q}^{curva}\left(w_{p,q}^{2}/2g\right) = \left(f_{p,q}^{turb} L_e / D_{p,q}\right)\left(w_{p,q}^{2}/2g\right)$$

- **perdita di uscita in 11:**

$$H_{L,11} = K_{11}\left(w_{10,11}^{2}/2g\right)$$

Tutte queste perdite dipendono dai valori locali della velocità, calcolabili sulla base della portata volumetrica tramite la relazione:

$$w_{p,q} = \frac{Q}{A_{p,q}} = \frac{4Q}{\pi D_{p,q}^{2}}$$

I fattori di attrito possono essere determinati, per esempio, tramite la formula di *Swamee & Jain* sulla base del numero di Reynolds e della rugosità in ogni sezione

$$f_{p,q} = \frac{0.25}{\left[log_{10}\left(\frac{1}{3.7\left(D_{p,q}/\varepsilon_{p,q}\right)} + \frac{5.74}{Re_{p,q}^{0.9}}\right)\right]^{2}} \qquad Re_{p,q} = \frac{\rho w_{p,q} D_{p,q}}{\mu}$$

nel caso di moto turbolento, mentre nel caso di moto laminare si dovrà applicare la legge di Poiseuille.

Calcolate tutte le perdite di carico si potrà valutare la prevalenza della pompa dalla relazione precedentemente ottenuta

$$H_P = z_{12} - z_1 + H_L$$

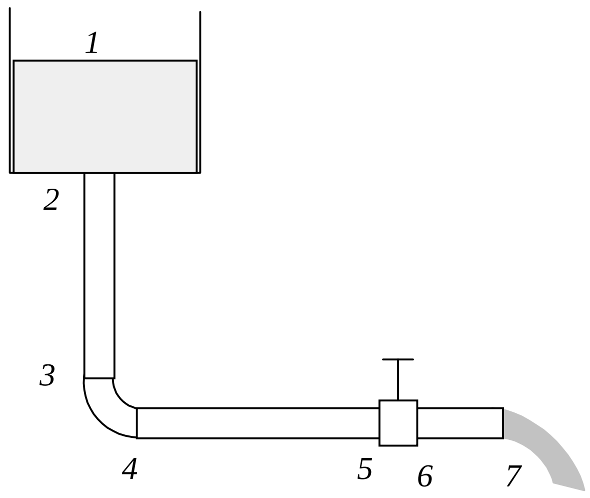
La potenza della pompa si ottiene quindi dalla sua potenza ideale diviso il rendimento:

$$P_P = \frac{\rho g H_P Q}{\eta_P}$$

CLASSE II

Nei casi generali in cui sia le perdite di carico per attrito che le perdite di carico localizzate (o minori) sono importanti, per risolvere il problema è necessario procedere iterativamente.

Consideriamo l'esempio sotto riportato di un sistema di irrigazione che attinge acqua da un contenitore posto ad altezza nota. Data la geometria del sistema, *lo scopo è valutare la portata nella tubazione* che, per semplicità, assumeremo di sezione costante.



Applichiamo l'equazione di Bernoulli tra le sezioni 1 e 7:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_7}{\rho g} + z_7 + \frac{w_7^2}{2g} + H_L$$

Poiché si ha $p_1 = p_7 = p_{atm}$ **e** $w_1 \approx 0$ **si ottiene:**

$$z_1 = z_7 + \frac{w_7^2}{2g} + H_L$$

Anche in questo caso è necessario valutare le perdite di carico, ma questa volta, non è nota ancora la portata, per cui non è possibile esprimerle numericamente fin dall'inizio come nel caso precedente.

Esse saranno perciò espresse in funzione della portata incognita:

- **perdita di ingresso in 2:** $H_{L,2} = K_2 \left(w^2 / 2g \right)$
- **perdita nella curva a 90 °:**

$$H_{L,curva} = K_{curva} \left(w^2 / 2g \right) = \left(f^{turb} L_e / D \right) \left(w^2 / 2g \right)$$

- **perdita nella valvola tra 5 e 6:** $H_{L,valvola} = K_{valvola} \left(w^2 / 2g \right)$**, in cui** $K_{valvola}$ **è esprimibile nella forma** $K_{valvola} = f^{turb} L_e / D$
- **perdite per attrito lungo il tubo:** $H_{L,1,7}^{f} = \left(fL/D \right)_{1,7} \left(w^2 / 2g \right)$

Si ottiene, perciò,

$$z_1 - z_7 = \frac{w^2}{2g} + \left[K_2 + K_{curva} + K_{valvola} + \frac{fL}{D} \right] \frac{w^2}{2g}$$

in cui f **è funzione della velocità nel condotto attraverso il numero di Reynolds. Risolvendo per** w **si ha:**

$$w = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_7)}{1 + K_2 + K_{curva} + K_{valvola} + \dfrac{fL}{D}}}$$

che deve essere risolta iterativamente a causa della presenza di f **a secondo membro.**

Un modo di risolvere il problema è quello di scrivere la formula nella forma:

$$w^{(n+1)} = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_7)}{1 + K_2 + K_{curva} + K_{valvola} + \dfrac{f\left(w^{(n)}\right) L}{D}}}$$

assegnando un valore iniziale della velocità $w^{(0)}$ **e sostituendo ad ogni passo il nuovo valore ottenuto per la velocità nell'espressione del fattore di attrito.**

Il processo termina quando tra due valori successivi della velocità si osservano differenze inferiori ad un determinata tolleranza.

Quando le perdite di carico localizzate sono piccole rispetto alle perdite di carico per attrito, è possibile semplificare il processo evitando o riducendo le iterazioni (*v. Mott, Op. cit., Chapt. 11*).

CLASSE III

Questa classe di problemi coinvolge l'individuazione del minimo diametro di tubazioni che siano in grado di assicurare determinate portate in funzione della prevalenza disponibile.

Il diametro della tubazione è un parametro molto importante, perché a parità di portata le perdite di carico variano con l'inverso di D^n **con** $n \approx 4 \div 5$**.**

La scelta del diametro del tubo è un compromesso tra due diverse necessità:

- **non aumentare eccessivamente il costo della tubazione scegliendo un diametro troppo grande;**
- **non richiedere una prevalenza troppo elevata in modo da ridurre la potenza di pompaggio o poter utilizzare i battenti gravimetrici disponibili.**

Nel caso di tubazioni di diametro uniforme comprese tra due sezioni 1 e 2, con perdite di carico derivanti solo dall'attrito distribuito, si ha:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{w_2^2}{2g} + H_L$$

ed essendo $w_1 = w_2$ **si ottiene**

$$H_L = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2$$

Una relazione di progetto che si può utilizzare è la seguente:

$$D_{min} = 0.66\left[\varepsilon^{1.25}\left(\frac{LQ^2}{gH_L}\right)^{4.75} + \nu Q^{9.4}\left(\frac{L}{gH_L}\right)^{5.2}\right]^{0.04}$$ **(*v. Mott, Op.cit. Chapt. 11*)**

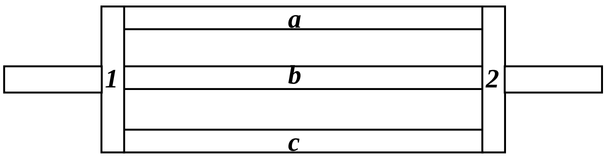
Il diametro da scegliere è quello disponibile commercialmente di dimensione immediatamente superiore a D_{min}**.**

Nel caso in cui sia necessario considerare anche perdite di carico localizzate, dopo averle incluse nel calcolo di H_L è possibile verificare se il diametro scelto verifica ancora la relazione

$$H_L \leq \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2$$

In caso contrario si sceglie un diametro superiore, e si ripete il processo.

SISTEMI DI TUBAZIONI IN PARALLELO



I sistemi di tubazioni in parallelo coinvolgono più di un percorso per il fluido nel suo fluire tra ingresso ed uscita.

Con riferimento alla figura, le relazioni importanti da applicare per valutare i valori delle portate in ciascun ramo sono le seguenti:

- **equazione di continuità**

$$Q_1 = Q_2 = Q_a + Q_b + Q_c$$

- **equazione di Bernoulli**

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{w_2^2}{2g} + H_L$$

Poiché questa relazione può essere applicata a ciascuno dei percorsi possibili per il fluido, ne risulta che

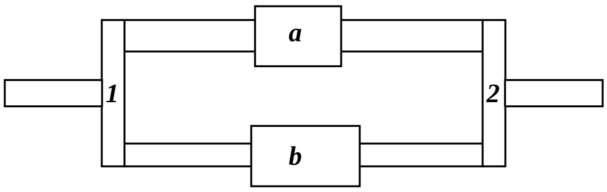
$$H_{L,1\rightarrow 2} = H_{L,a} = H_{L,b} = H_{L,c}$$

cioè i tre rami in parallelo sono caratterizzati dalla stessa perdita di carico.

In altre parole, la portata in ogni ramo si adegua alla variazione di carico imposta agli estremi, in modo da dare luogo alla stessa perdita di carico.

Sistemi con due rami

Per sistemi con due rami, si possono avere due casi diversi:



1. *è nota la portata totale* e si deve calcolarne la distribuzione nei rami

2. *è nota la caduta di pressione* a cavallo del sistema e si deve valutare la portata totale e la sua distribuzione nei rami

Caso 1

- **Si pone**

$$Q_1 = Q_2 = A_a w_a + A_b w_b$$

- **Inoltre, dovendo essere**

$$H_a = H_b$$

con

$$H_a = \left[\sum_j K_j^a + \frac{f_a L_a}{D_a}\right]\frac{w_a^2}{2g} \qquad H_b = \left[\sum_j K_j^b + \frac{f_b L_b}{D_b}\right]\frac{w_b^2}{2g}$$

si ha

$$\left[\sum_j K_j^a + \frac{f_a L_a}{D_a}\right]\frac{w_a^2}{2g} = \left[\sum_j K_j^b + \frac{f_b L_b}{D_b}\right]\frac{w_b^2}{2g}$$

- **A questo punto, nota la rugosità dei condotti, dal diagramma di Moody si possono stimare valori ragionevoli di f_a ed f_b in modo che la precedente assuma la forma**

$$w_a^2 = C^2 w_b^2$$

con

$$C^2 = \frac{\sum_j K_j^b + \frac{f_b L_b}{D_b}}{\sum_j K_j^a + \frac{f_a L_a}{D_a}}$$

e si può quindi stimare il rapporto tra le velocità nei due rami

$$w_a = C\ w_b$$

- **Utilizzando l'equazione di continuità, è ora possibile determinare il valore di una delle due velocità:**

$$Q = A_a w_a + A_b w_b = A_a C w_b + A_b w_b = \left(A_a C + A_b\right) w_b \quad \Rightarrow \qquad w_b = \frac{Q}{A_a C + A_b}$$

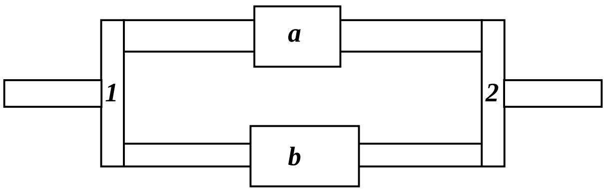
- **A questo punto è necessario verificare che i valori assunti per f_a ed f_b siano coerenti con i valori delle velocità trovati; si calcolano perciò i numeri di Reynolds e si usa nuovamente il diagramma di Moody**

$$Re_a = \frac{\rho w_a D_a}{\mu} \qquad\qquad Re_b = \frac{\rho w_b D_b}{\mu}$$

$$f_a = f_a\left(Re_a, \varepsilon_a\right) \qquad\qquad f_b = f_b\left(Re_b, \varepsilon_b\right)$$

- **Se i nuovi valori di f_a ed f_b si discostano troppo da quelli usati nel calcolo, si ripete il procedimento a partire dal calcolo di C iterando fino a convergenza.**

Caso 2



Supponiamo di avere ancora a che fare con il sistema considerato nel caso precedente. In questo caso, però, invece della portata, conosciamo p_1 e p_2.

- **Valutiamo la perdita di carico attraverso il sistema:**

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{w_2^2}{2g} + H_L$$

- **Assumendo per semplicità $w_1 = w_2$ e $z_1 = z_2$ si ottiene**

$$H_L = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

e ricordiamo che deve essere

$$H_L = H_a = H_b$$

in cui H_L è un dato noto sulla base della precedente relazione.

- **Ora risulta:**

$$H_a = \left[\sum_j K_j^a + \frac{f_a L_a}{D_a} \right] \frac{w_a^2}{2g} \qquad H_b = \left[\sum_j K_j^b + \frac{f_b L_b}{D_b} \right] \frac{w_b^2}{2g}$$

per cui deve essere:

$$\left[\sum_j K_j^a + \frac{f_a L_a}{D_a} \right] \frac{w_a^2}{2g} = H_L \qquad \left[\sum_j K_j^b + \frac{f_b L_b}{D_b} \right] \frac{w_b^2}{2g} = H_L$$

- **Stimato il coefficiente di attrito in ogni ramo si ha:**

$$w_a = \sqrt{\frac{2gH_L}{\sum_j K_j^a + \frac{f_a L_a}{D_a}}} \qquad w_b = \sqrt{\frac{2gH_L}{\sum_j K_j^b + \frac{f_b L_b}{D_b}}}$$

che permette la valutazione delle velocità nei due rami. Ciò consente di correggere la stima del coefficiente di attrito iterativamente fino a convergenza

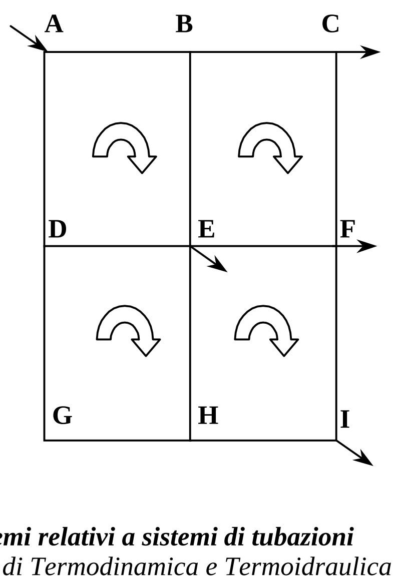
- **Determinate le velocità nei due rami si ha**

$$Q = Q_a + Q_b = A_a w_a + A_b w_b$$

permettendo la determinazione della portata totale

<u>RETI DI TUBAZIONI</u>

Quando l'insieme di tubazioni assume una configurazione complicata, con più circuiti interni, ingressi ed uscite di fluido è necessario applicare tecniche particolari, quale quella di *Hardy Cross*.



Con riferimento alla figura, tale tecnica richiede dapprima di individuare nel sistema nodi e circuiti (maglie).

Si procede quindi come segue:

1. Si assume una qualunque distribuzione di portate in ciascun ramo, col vincolo che nei nodi venga rispettato *il principio di continuità*: $\sum W_{in} = \sum W_{out}$

2. **Si valutano le perdite di carico in ogni ramo corrispondenti alla portata assegnata. Qualunque sia la formula utilizzata a questo scopo, si avrà:**

$$H_{ij} = K_{ij} Q_{ij}^n$$

con n **un opportuno esponente (ad. es.,** $n = 1.85$ **per la formula di Hazen-Williams,** $n = 2$ **per moto turbolento completamente sviluppato)**

Si nota che:

$$dH_{ij} = d\left(K_{ij} Q_{ij}^n\right) = n K_{ij} Q_{ij}^{n-1} dQ_{ij} = n\left(H_{ij} / Q_{ij}\right) dQ_{ij} \quad \textbf{(°)}$$

3. **Si sommano quindi le perdite di carico lungo ogni maglia, assumendo segno positivo se la portata nel ramo è concorde col senso orario di circolazione, negativo nel caso opposto;**
se le portate fossero corrette, la somma delle perdite di carico lungo la maglia dovrebbe essere nulla; invece si avrà, in generale

$$\sum_{maglia} H_{ij} \neq 0$$

4. **Tenendo conto della (°), si corregge allora la portata *di ogni ramo appartenente ad una maglia* della quantità**

$$\Delta Q_{maglia} = -\frac{\sum\limits_{maglia} H_{ij}}{n \sum\limits_{maglia} \left(H_{ij} / Q_{ij}\right)}$$

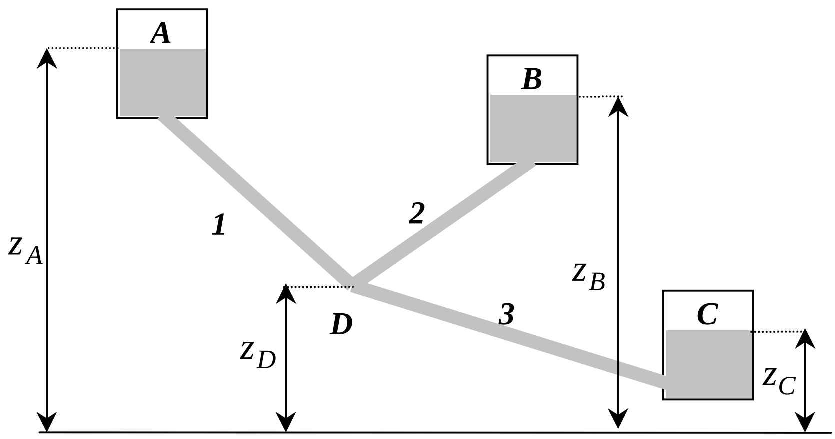
Si noti che $H_{ij} / Q_{ij} > 0$ **poiché numeratore e denominatore hanno lo stesso segno; poiché un ramo può appartenere a più di una maglia, alla sua portata verranno apportate cumulativamente più correzioni**

5. **Si riparte, perciò dal punto 2 della procedura di calcolo con i valori aggiornati delle portate e si itera fino a che non si soddisfi per ogni maglia il criterio**

$$\sum_{maglia} H_{ij} < \varepsilon$$

con ε **un opportuno valore di tolleranza.**

SISTEMI DI TUBAZIONI CON RAMIFICAZIONI



Questi sistemi sono costituiti da tubazioni che si biforcano e/o si riuniscono in corrispondenza di giunzioni.

La soluzione di problemi ad essi relativi richiede di imporre *condizioni di continuità* in tali giunzioni e di *valutare le perdite di carico in ogni ramo* per mezzo di un *processo iterativo*.

Per quanto riguarda il sistema in Figura, si impongono dapprima relazioni del tipo:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{w_A^2}{2g} = H_D + H_{L,1}$$

in cui H_D è il carico incognito in D, $H_{L,1}$ è la perdita di carico lungo la tubazione 1 e, al solito, possiamo porre $w_A \approx 0$ a causa della grande sezione del bacino corrispondente. Inoltre, esprimendo le perdite di carico nella forma

$$H_{L,1} = \left(\sum_j K_j + \sum_i \frac{f_i L_i}{D_i} \right)_1 \frac{|w_1| w_1}{2g}$$

che tiene conto della possibile presenza di perdite di carico concentrate, di un eventuale numero arbitrario di tubi in serie e del fatto che $H_{L,1}$ è concorde con la velocità, si ottiene

$$|w_1| w_1 = \frac{2g \left(z_A + \frac{p_A}{\rho g} - H_D \right)}{\left(\sum_j K_j + \sum_i \frac{f_i L_i}{D_i} \right)_1}$$

e quindi

$$|w_1| = \sqrt{\frac{2g\left|z_A + \frac{p_A}{\rho g} - H_D\right|}{\left(\sum_j K_j + \sum_i \frac{f_i L_i}{D_i}\right)_1}} \qquad w_1 = |w_1|\, sgn\left(z_A + \frac{p_A}{\rho g} - H_D\right)$$

Analogamente

$$|w_2| = \sqrt{\frac{2g\left|z_B + \frac{p_B}{\rho g} - H_D\right|}{\left(\sum_j K_j + \sum_i \frac{f_i L_i}{D_i}\right)_2}} \qquad w_2 = |w_2|\, sgn\left(z_B + \frac{p_B}{\rho g} - H_D\right)$$

$$|w_3| = \sqrt{\frac{2g\left|z_C + \frac{p_C}{\rho g} - H_D\right|}{\left(\sum_j K_j + \sum_i \frac{f_i L_i}{D_i}\right)_3}} \qquad w_3 = |w_3|\, sgn\left(z_C + \frac{p_C}{\rho g} - H_D\right)$$

Le formule precedenti, evidentemente, forniscono le velocità del fluido nei tre rami una volta stimati i fattori di attrito e H_D. Quest'ultimo assume generalmente maggiore importanza ed è quindi la variabile principale su cui iterare.

Perciò, scelto un valore plausibile di H_D, si valutano le velocità e le portate nei tre rami, verificando che l'equazione di continuità nel nodo D sia accettabilmente soddisfatta:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3 < \varepsilon$$

In caso contrario, si cambia il valore di H_D fino a convergenza.