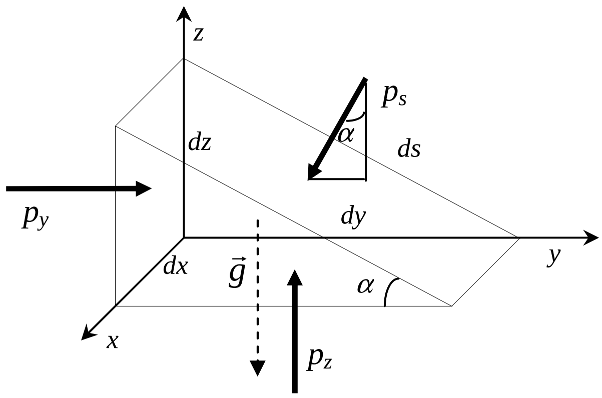
Appunti sulla Statica dei Fluidi

1. La legge di Pascal sull'isotropia delle pressioni

In un fluido in quiete non sono presenti sforzi di taglio:
tutti gli sforzi sono normali e dovuti alla sola *pressione*.

La pressione in questo caso è detta *idrostatica* ed è uguale in tutte le direzioni, cioè *isotropa*. Ciò si può dimostrare considerando il cuneo di fluido della figura seguente



Si nota che:

- **l'equilibrio lungo l'asse x è verificato automaticamente supponendo che p_x sia la stessa sulle due facce ortogonali a tale asse**
- **l'equilibrio lungo l'asse y richiede**

$$p_y \, dx \, dz = p_s \, ds \, dx \, sin\alpha$$

- **l'equilibrio lungo l'asse z richiede**

$$p_z \, dx \, dy = p_s \, ds \, dx \; cos\alpha + \rho g \frac{1}{2} dx \, dy \, dz$$

Inoltre, la geometria del sistema suggerisce che

$$ds = \frac{dy}{cos\alpha} \qquad ds = \frac{dz}{sin\alpha}$$

Si ha quindi

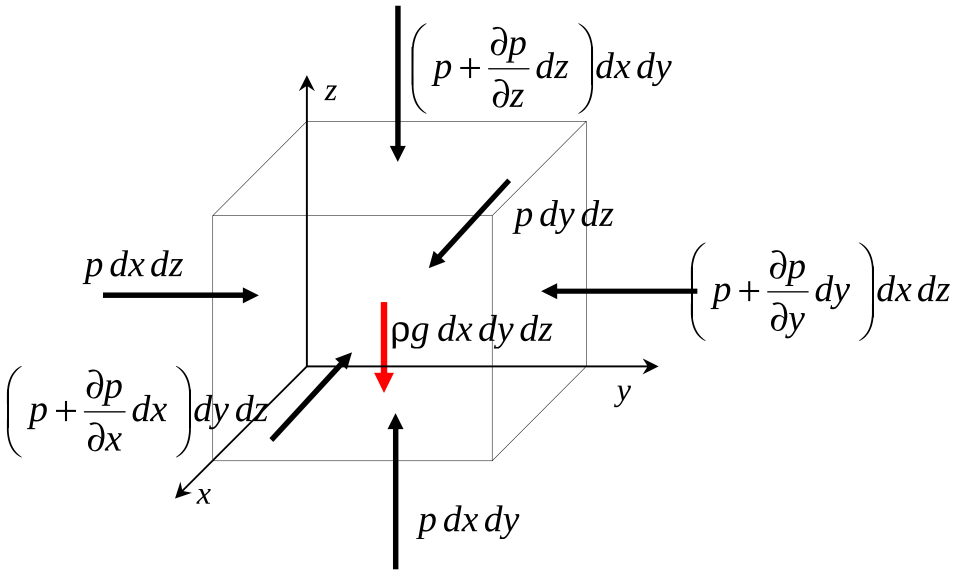
$$p_y \, dx \, dz = p_s \, dx \, dz \qquad \Rightarrow \qquad p_y = p_s$$

$$p_z \, dx \, dy = p_s \; dx \, dy + \rho g \frac{1}{2} dx \, dy \, dz \qquad \Rightarrow \qquad p_z = p_s + \frac{1}{2} \rho g dz \underset{dz \to 0}{\longrightarrow} p_z = p_s$$

Per l'arbitrarietà di α, si conclude che la pressione in un punto di un fluido in quiete è la stessa in ogni direzione.

2. Variazione della pressione in un fluido in quiete

Consideriamo un fluido in quiete, soggetto alla sola forza peso ed eseguiamo bilanci di forze su di un suo elemento parallelepipedo



- **L'equilibrio lungo l'asse x richiede che:**

$$p\,dy\,dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial p}{\partial x}=0$$

- **L'equilibrio lungo l'asse y richiede che:**

$$p\,dx\,dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx\,dz=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0$$

- **L'equilibrio lungo l'asse z richiede che:**

$$p\,dx\,dy-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dx\,dy-\rho g\,dx\,dy\,dz=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$$

In altre parole, il gradiente della pressione è dato da

$$\nabla p=\rho\vec{g}$$

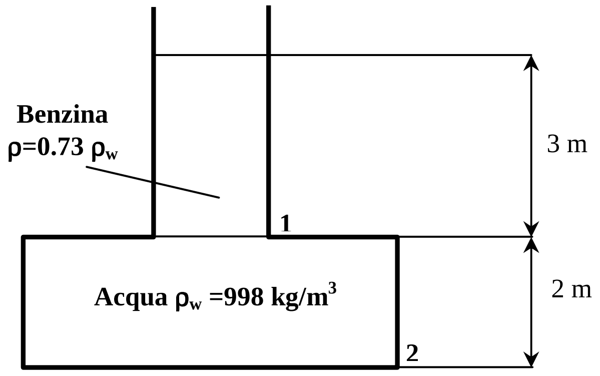
con $\vec{g}\equiv\{0,0,-g\}$**. Perciò si nota che, in un fluido in quiete, le superfici a pressione costante sono piani a** ***z=cost.***

In forma integrale si ha:

$$\Delta p=\rho g\Delta z=\gamma\Delta z \qquad \textbf{(legge di Stevino)}$$

($\gamma=\rho g$ **=peso specifico)**

Applicazione 1: valutare la variazione di pressione con la quota in un recipiente contenente fluidi aventi densità diversa



Assumendo un valore di $101330\,Pa$ **per la pressione atmosferica si ha:**

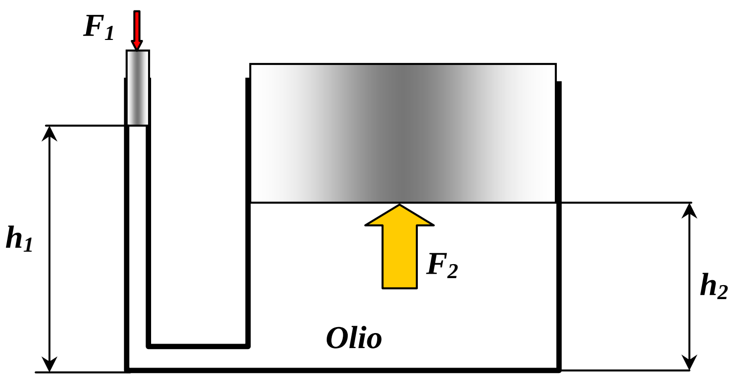
- **Pressione al fondo della colonna di benzina:**

$$p_1 = p_{atm} + 0.73 \times 998 \times 9.81 \times 3 = 101330 + 21441 = 122771\,Pa$$

- **Pressione sul fondo del recipiente**

$$p_2 = p_1 + 998 \times 9.81 \times 2 = 122771 + 19580.8 = 142352\,Pa$$

Applicazione 2: il torchio idraulico



$$D_1 = 0.5\,cm$$
$$D_2 = 10\,cm$$
$$F_1 = 200\,N$$
$$\rho_{olio} = 856.3\,kg/m^3$$
$$h_1 = 12\ cm$$
$$h_2 = 8\ cm$$

Si ha:

$$p_2 = p_1 + \rho_{olio} g (h_1 - h_2) \Rightarrow \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} + \rho_{olio} g (h_1 - h_2)$$

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 + A_2 \rho_{olio} g (h_1 - h_2) = 80000 + 2.6 = 80002.6\,N$$

<u>Applicazione 3:</u> variazione della pressione con la quota nella troposfera

Se supponiamo dapprima che l'aria sia un gas perfetto isotermo, si ha

$$dp = -\rho g dz \qquad pv = RT\left\{= \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}T = \frac{8.314}{29\times10^{-3}}T = 286.7\ T\right\} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p}{RT}$$

perciò

$$dp = -\frac{p}{RT}gdz \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{1}{RT}gdz \quad \Rightarrow \quad ln(p) = -\frac{gz}{RT} + C$$

e quindi

$$p = p_0\ exp\left\{-\frac{g}{RT}(z - z_0)\right\}$$

In realtà, è necessario tener conto della variazione della temperatura dell'aria con la quota. Ad esempio, nella zona più bassa dell'atmosfera (troposfera, fino a 11 km di quota) si ha

$$T(z) = T_0 - Bz \qquad \textbf{con} \quad T_0 = 15°C = 288.15\ K \qquad B = 0.00650\, K/m$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{RT(z)}gdz \quad \Rightarrow \quad ln(p) = -\int_{z_0}^{z}\frac{g\,dz'}{RT(z')} + C \qquad p = p_0\ exp\left\{-\int_{z_0}^{z}\frac{g\,dz'}{RT(z')}\right\}$$

Essendo

$$\int_{z_0}^{z}\frac{g\,dz'}{RT(z')} = \frac{g}{R}\int_{z_0}^{z}\frac{dz'}{T_0 - Bz'} = -\frac{g}{BR}ln\left(\frac{T_0 - Bz}{T_0 - Bz_0}\right)$$

si ha

$$p = p_0\ exp\left\{-\int_{z_0}^{z}\frac{g\,dz'}{RT(z')}\right\} = p_0\ exp\left\{\frac{g}{BR}ln\left(\frac{T_0 - Bz}{T_0 - Bz_0}\right)\right\} = p_0\left(\frac{T_0 - Bz}{T_0 - Bz_0}\right)^{\frac{g}{BR}}$$

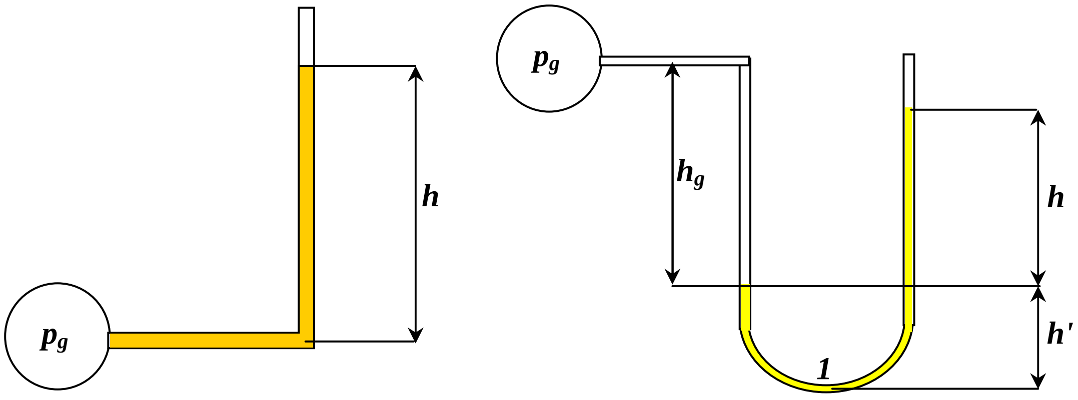
Ponendo quindi $z_0 = 0$ e $p_0 = 101330\, Pa$, ad una quota di 11 km si ha

$$p = p_0\left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{\frac{g}{BR}} = 101330\times\left(1 - \frac{0.00650\times11000}{288.15}\right)^{\frac{9.81}{0.00650\times286.7}} = 22579\, Pa$$

$$T = 288.15 - 0.00650\times11000 = 216.65\, K = -56.5\, °C$$

3. Manometria e misura della pressione

Un *manometro* è un dispositivo che permette di misurare la pressione sulla base dell'altezza di una colonna di liquido supportata da tale pressione



a) **b)**

a) Si ha:

$$p_g = p_{atm} + \rho g h$$

b) Si ha:

$$p_1 = p_g + \rho_g g h_g + \rho_l g h'$$

$$p_1 = p_{atm} + \rho_{aria} g (h_g - h) + \rho_l g h + \rho_l g h'$$

da cui

$$p_g + \rho_g g h_g + \rho_l g h' = p_{atm} + \rho_{aria} g (h_g - h) + \rho_l g h + \rho_l g h'$$

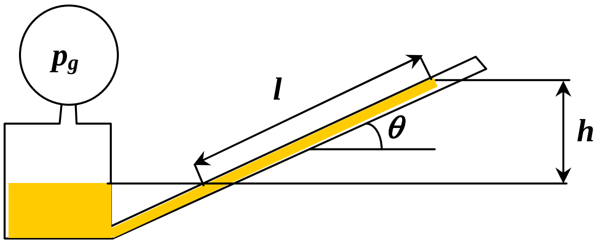
$$p_g + \rho_g g h_g = p_{atm} + \rho_{aria} g (h_g - h) + \rho_l g h \quad \Rightarrow \quad p_g \approx p_{atm} + \rho_l g h$$

La *sensibilità* dei manometri (variazione di lunghezza della colonna per unità di variazione della pressione) può essere cambiata variando il fluido.

I principali fluidi per manometri sono gli oli ($\rho \approx 800\, kg/m^3$), l'acqua ($\rho \approx 1000\, kg/m^3$) e il mercurio ($\rho \approx 13600\, kg/m^3$).

Il cosiddetto *principio dei vasi comunicanti* (tutti i recipienti aperti all'atmosfera e comunicanti in fase liquida hanno lo stesso livello) è diretta conseguenza dei principi discussi precedentemente.

Un modo per aumentare la sensibilità di un manometro è inclinarne il tubo rispetto alla verticale



Sebbene sia sempre l'altezza h a definire il valore della pressione, la scala di variazione della lunghezza della colonna (e quindi la sensibilità) è aumentata secondo la relazione

$$l = \frac{h}{\sin\theta}$$

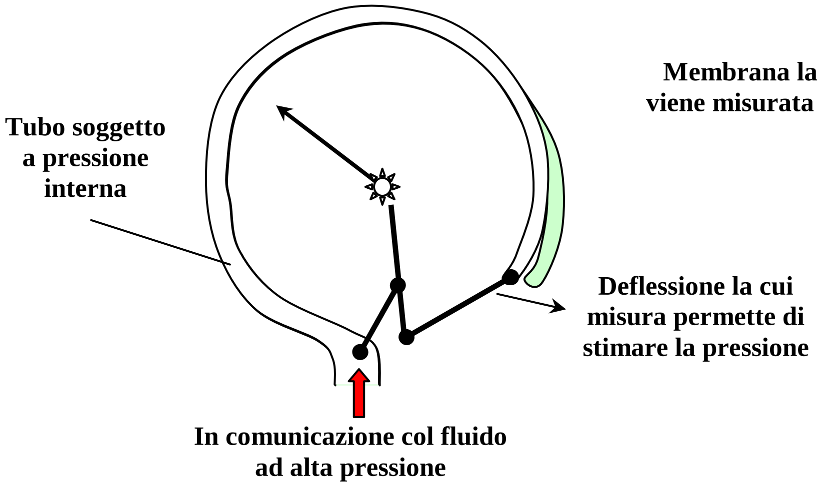
Altri misuratori di pressione comunemente utilizzati sono:

- il misuratore a tubo di Bourdon

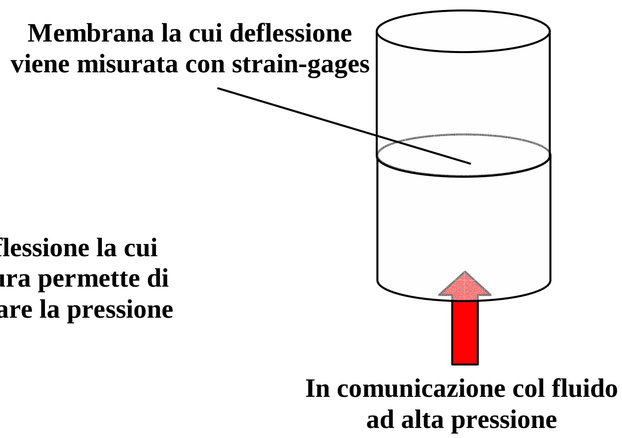
  viene misurata la deflessione di un tubo ricurvo che si deforma quando è soggetto a pressione interna

- misuratori a "strain-gage"

  sono misuratori nei quali cui viene misurata la deflessione di un diaframma soggetto ad una differenza di pressione; a tale scopo vengono utilizzati piccoli fili elettrici la cui resistenza varia quando vengono deformati ("strain-gages")



Misuratore a tubo di Bourdon



Misuratore a strain-gage

E' bene chiarire che:

- **in molti casi ciò che si misura è la *pressione differenziale* rispetto alla pressione atmosferica che viene detta anche *pressione relativa* ("gage pressure")**
- **la pressione valutata rispetto a zero è detta *pressione assoluta***

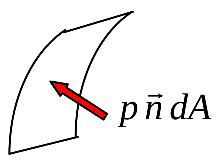
Le unità di misura usate talora permettono di specificare di quale pressione si parli. Ad esempio le unità anglosassoni (psi = pound per square inch = 6859 Pa):

- **psig = pound per square inch gage (pressione relativa)**
- **psia = pound per square inch absolute (pressione assoluta)**

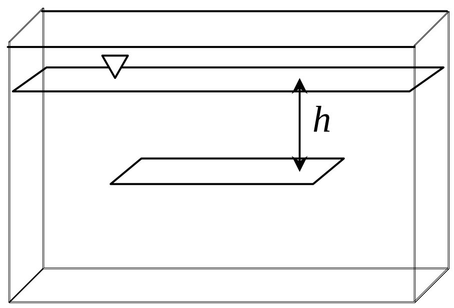
4. Forze di pressione su superfici immerse in un fluido

In molti problemi pratici è necessario calcolare la risultante e/o il momento risultante degli sforzi di pressione su di una superficie.

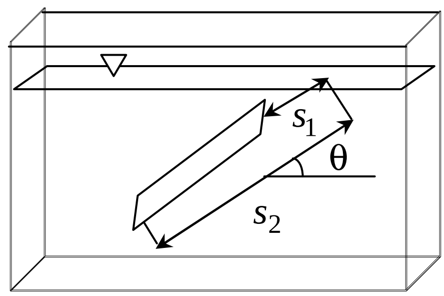
Ciò richiede l'esecuzione di *integrali di superficie*, per mezzo dei quali i contributi dovuti alle forze di pressione su elementi infinitesimi di superficie vengono sommati vettorialmente



Contributo elementare alla forza dovuta alla pressione del fluido



Caso della Superficie orizzontale



Caso della Superficie inclinata

<u>Caso della superficie orizzontale</u>

La pressione sulla pagina superiore della superficie è costante e pari a:

$$p(h) = p_{atm} + \rho g h$$

Detta A l'area della superficie si ha quindi

$$\left|\vec{F}\right| = p(h)A = \left(p_{atm} + \rho g h\right)A$$

Si nota che:

- **Questa è la forza che agisce sulla pagina superiore. Se la superficie è immateriale (in particolare se non ha spessore) una forza uguale ed opposta agisce sulla pagina inferiore, come richiesto dall'equilibrio lungo l'asse z**
- **La forza agente sulla superficie orizzontale considerata è pari al peso del fluido soprastante più il contributo della pressione atmosferica; infatti, indicando il volume del fluido soprastante con** $V_f = hA$**, si ha**

$$\left|\vec{F}\right| = (p_{atm} + \rho g h)A = p_{atm}A + \rho g V_f$$

<u>Caso della superficie rettangolare inclinata</u>

La pressione varia lungo la coordinata *s* parallela alla superficie secondo la relazione

$$p(s) = p_{atm} + \rho\, g\, s\, sin\theta$$

Detta *B* la larghezza della superficie, l'elemento di area su cui integrare è

$$dA = B\, ds$$

E' necessario svolgere quindi un *integrale di superficie* cioè sommare gli incrementi infinitesimi della forza dovuta alla pressione, $-p\,\vec{n}\,dA$**, in cui** $\vec{n}$ **è il versore normale alla superficie orientato verso l'esterno (da cui il segno meno). Si ha**

$$\left|\vec{F}\right| = \left|-\int_A p\,\vec{n}\,dA\right| = \int_{s_1}^{s_2} p(s)B\,ds$$

Risulta

$$\left|\vec{F}\right| = \int_{s_1}^{s_2} \left[p_{atm} + \rho\, g\, s\, sin\theta\right]B\,ds = p_{atm}B(s_2 - s_1) + \frac{1}{2}\rho\, g\, B\, sin\theta\, \left(s_2^2 - s_1^2\right)$$

$$= p_{atm}A + \frac{1}{2}\rho\, g\, B\, sin\theta\, (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) = p_{atm}A + \rho\, g\, \frac{s_2 + s_1}{2}\, sin\theta\, A$$

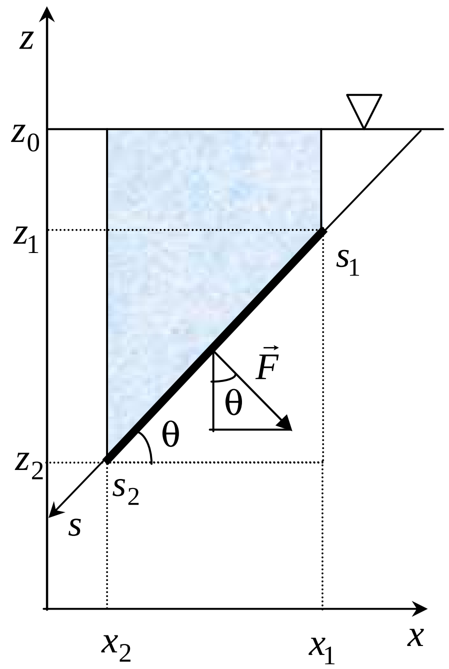
Dalla formula precedente notiamo che:

- **a causa della variazione lineare della pressione con la quota e del fatto che la larghezza B è costante, la forza di pressione risulta equivalente alla pressione a metà lunghezza per l'area;**
- **riconoscendo che** $s = (z_0 - z)/sin\theta$**, con** ***z*** **la coordinata verticale e** ***z₀*** **il suo valore in corrispondenza della superficie, si ha**

$$\left|\vec{F}\right| = p_{atm} A + \rho\, g \frac{s_2 + s_1}{2}\, sin\theta\; A = p_{atm} A + \rho\, g \left(z_0 - \frac{z_2 + z_1}{2} \right) A$$

che dimostra che in questo caso ciò che importa è la profondità media a cui si trova la superficie

- **se consideriamo le componenti verticale ed orizzontale della forza si ha:**



$$F_x = \left|\vec{F}\right| sin\,\theta = p_{atm} A\, sin\theta + \rho\, g \left(z_0 - \frac{z_2 + z_1}{2} \right) A\, sin\theta$$

$$F_z = \left|\vec{F}\right| cos\,\theta = p_{atm} A\, cos\,\theta + \rho\, g \left(z_0 - \frac{z_2 + z_1}{2} \right) A\, cos\,\theta$$

Ponendo

$$A_x = A\, sin\,\theta \qquad\qquad A_z = A\, cos\,\theta$$

si ha

$$F_x = \left[p_{atm} + \rho\, g \left(z_0 - \frac{z_2 + z_1}{2} \right) \right] A_x$$

$$F_z = \left[p_{atm} + \rho\, g \left(z_0 - \frac{z_2 + z_1}{2} \right) \right] A_z$$

cioè: ***la componente della forza di pressione agente sulla superficie considerata in una data direzione è uguale al prodotto della pressione media per la proiezione dell'area della superficie in quella direzione***

- **Inoltre, ricordando che** $A = B(s_2 - s_1)$ **si ha** $A_z = B(s_2 - s_1)\, cos\,\theta$ $= B(x_1 - x_2)$ **si riconosce che**

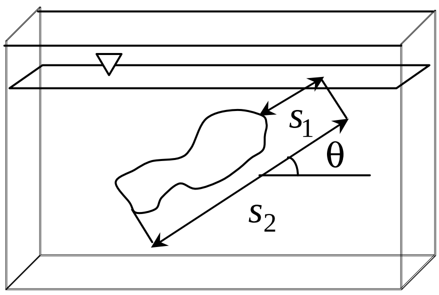
$$F_z = \left[p_{atm} + \rho\, g \left(z_0 - \frac{z_2 + z_1}{2} \right) \right] B(x_1 - x_2) = p_{atm} B(x_1 - x_2) + B(x_1 - x_2) \rho\, g \left(z_0 - \frac{z_2 + z_1}{2} \right)$$

$$= \underbrace{p_{atm} B(x_1 - x_2)}_{\substack{forza\ di\ pressione \\ sulla\ superficie \\ libera}} + \underbrace{\rho\, g B \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(z_0 - z_2 + z_0 - z_1)}_{\substack{peso\ del\ fluido\ soprastante \\ (=area\ del\ trapezio \times B \times \rho\, g)}}$$

perciò, la componente verticale è uguale al peso del fluido soprastante più il contributo della pressione sul pelo libero

<u>Caso della superficie piana di forma qualunque inclinata</u>

La pressione varia ancora lungo la coordinata *s* parallela alla superficie secondo la relazione



$$p(s) = p_{atm} + \rho\, g\, s \sin\theta$$

Detta *B(s)* la larghezza locale della superficie in *s*, l'elemento di area su cui integrare è

$$dA = B(s)ds \qquad \Rightarrow \qquad A = \int_{s_1}^{s_2} B(s)ds$$

La forza risultante è quindi ancora:

$$\left|\vec{F}\right| = \left| -\int_A p\, \vec{n}\, dA \right| = \int_{s_1}^{s_2} p(s) B(s) ds$$

Si ha:

$$\left|\vec{F}\right| = \int_{s_1}^{s_2} (p_{atm} + \rho\, g\, s \sin\theta) B(s) ds = p_{atm} \int_{s_1}^{s_2} B(s) ds + \rho\, g \sin\theta \int_{s_1}^{s_2} s\, B(s) ds$$

$$= p_{atm} A + \rho\, g \sin\theta\, A \frac{\int_{s_1}^{s_2} s\, B(s) ds}{A} = p_{atm} A + \rho\, g \sin\theta\, A \bar{s}$$

in cui

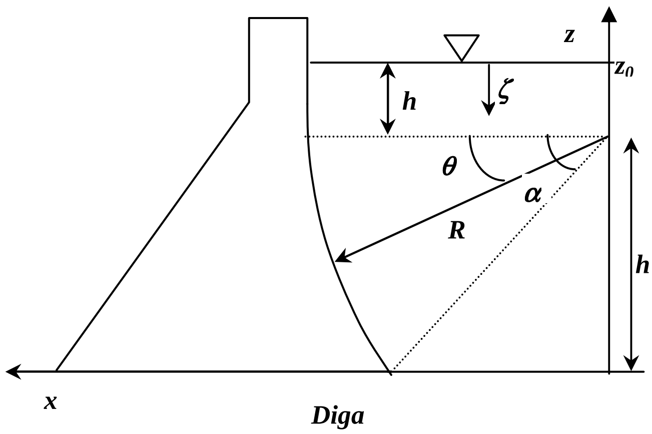
$$\bar{s} = \frac{\int_{s_1}^{s_2} s\, B(s) ds}{A}$$

- **In generale è $\bar{s} \neq (s_1 + s_2)/2$, ma valgono le stesse considerazioni fatte nel caso precedente per le componenti della forza risultante lungo *x* e *z***

<u>Caso della superficie curva di forma qualunque</u>

- **In questo caso è necessario svolgere una integrazione superficiale che permetta di ottenere *le tre componenti della forza risultante* nelle tre direzioni coordinate**
- **In alcuni casi è conveniente ricordare che:**
  - **la componente lungo un asse orizzontale della risultante delle forze di pressione su di una superficie è uguale alla forza che si otterrebbe sulla superficie ottenuta dalla proiezione sul piano ortogonale a tale asse**
  - **la componente verticale della risultante delle forze di pressione su di una superficie è uguale al peso del fluido soprastante più il contributo della pressione esterna**

Verifichiamo queste asserzioni in un caso particolare.



Data la diga in figura, avente larghezza B si calcolino le risultanti orizzontale e verticale delle forze di pressione.

E' utile porre $\zeta = z_0 - z$

Nella parte rettilinea si ha:

$$dA_z = 0 \qquad dA_x = B\,d\zeta$$

Nella parte curvilinea si ha

$$dA_z = B\,R\,sin\theta\,d\theta \quad dA_x = B\,R\,cos\,\theta\,d\theta$$

Si ha inoltre:

$$p(\zeta) = \begin{cases} p_{atm} + \rho g \zeta & \zeta \leq h \\ p_{atm} + \rho g \zeta = p_{atm} + \rho g (h + R\,sin\theta) & \zeta > h \end{cases}$$

Risulta quindi:

$$F_x = \int_0^h [p_{atm} + \rho g \zeta] B d\zeta + \int_0^\alpha [p_{atm} + \rho g (h + R\, sin\theta)] BR\, cos\,\theta\, d\theta$$

$$= p_{atm} Bh + \rho g \frac{h^2}{2} B + (p_{atm} + \rho g h) B\, R\, sin\alpha + \frac{1}{2} \rho g R^2 B sin^2\alpha$$

Essendo la profondità della zona curva data da

$$h' = R\, sin\alpha$$

si ha $$F_x = p_{atm} Bh + \rho g \frac{h^2}{2} B + (p_{atm} + \rho g h) B\, h' + \frac{1}{2} \rho g B h'^2$$

$$= p_{atm} B(h + h') + B\rho g \left(\frac{h^2}{2} + h\, h' + \frac{h'^2}{2} \right) = p_{atm} B(h + h') + B\rho g \frac{(h + h')^2}{2}$$

$$= \left(p_{atm} + \rho g \frac{h + h'}{2} \right) A_x$$

Si nota quindi che la forza risultante lungo x è la stessa che si otterrebbe su di una superficie piana verticale di profondità $h + h'$

Inoltre $$F_z = \int_0^\alpha [p_{atm} + \rho g (h + R\, sin\theta)] B\, R\, sin\,\theta d\theta$$

$$= \int_0^\alpha [p_{atm} + \rho g h] B\, R\, sin\,\theta\, d\theta + \int_0^\alpha \rho g B\, R^2\, sin^2\,\theta\, d\theta$$

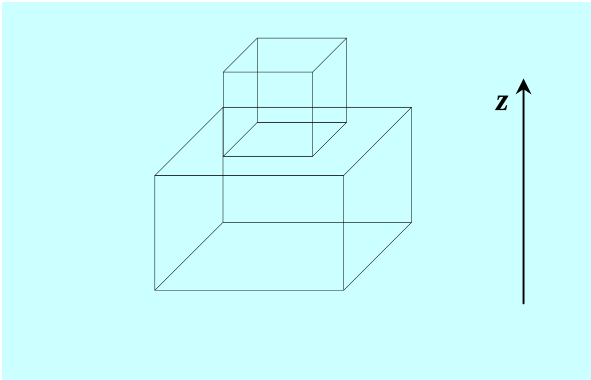
$$= [p_{atm} + \rho g h] BR(1 - cos\,\alpha) + \rho g B\, R^2 \frac{\alpha - sin\,\alpha\, cos\,\alpha}{2}$$

Si riconosce che:

- $BR(1 - cos\,\alpha) = A_z$ **è l'area della proiezione della parte curva del profilo della diga sul piano z=0**
- **perciò il primo addendo nell'espressione trovata per** F_z **rappresenta l'effetto della pressione esterna ed il peso del fluido che si trova ad una quota** $z > z_0 - h$
- $BR^2 \frac{\alpha - sin\,\alpha\, cos\,\alpha}{2}$ **è il volume del fluido che insiste sopra la superficie interna curva della diga ((settore circolare - triangolo)xB)**

5. La forza di Archimede ed il galleggiamento

Consideriamo un corpo completamente immerso in un fluido come in figura. Assumiamo per semplicità che sia composto da due parallelepipedi a base quadrata aventi lato ed altezza rispettivamente L_1 ed H_1, il più piccolo, e L_2 ed H_2, il più grande.



Calcoliamo la risultante delle forze di pressione sulla superficie esterna del corpo nell'ipotesi che la superficie superiore si trovi ad una distanza *h_0* dal pelo libero del fluido.

Tenendo conto che le forze di pressione sulle superfici laterali si fanno equilibrio si ha:

$$\left|\vec{F}\right| = L_2^2\{p_{atm} + \rho g(h_0 + H_1 + H_2)\} - \left(L_2^2 - L_1^2\right)\{p_{atm} + \rho g(h_0 + H_1)\} - L_1^2\{p_{atm} + \rho g h_0\}$$

e quindi

$$\left|\vec{F}\right| = \rho g L_2^2 H_2 + \rho g L_1^2 H_1$$

ovvero

$$\left|\vec{F}\right| = \rho g V_{corpo}$$

Sebbene ottenuto in un caso particolare, questo risultato è del tutto generale ed esprime il noto *principio di Archimede*:

un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato

Si nota quindi che il principio di Archimede è una conseguenza diretta della distribuzione idrostatica della pressione in un fluido in quiete, cioè della legge di Stevino.

La forza di pressione agente su di un corpo generico è

$$F_{Arch} = -\int_A p\vec{n}\, dA$$

D'altra parte, esiste una forma del *Teorema della divergenza* che consente di trasformare l'integrale di superficie considerato in un integrale di volume

$$-\int_A p\vec{n}dA = -\int_V \nabla p\, dV$$

Il volume coincide con quello occupato dal corpo. Poiché per la legge di Stevino è

$$\nabla p = \rho\vec{g}$$

si ha

$$\vec{F}_{Arch} = -\int_V \rho\, \vec{g}\, dV$$

che rappresenta il principio di Archimede nella sua forma più generale.

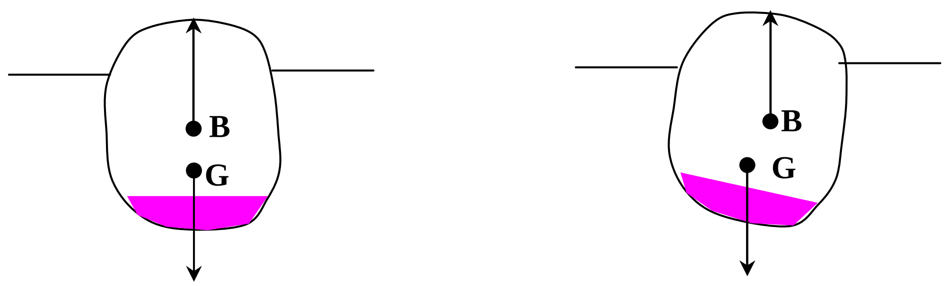
Come è ovvio, i corpi galleggiano se la forza di Archimede relativa alla parte sommersa è uguale ed opposta al peso del corpo; altrimenti affondano.

Quando un corpo galleggia, il galleggiamento può inoltre essere *stabile* o *instabile*. Il termine stabilità ha lo stesso significato visto in Fisica Generale per l'equilibrio di sistemi meccanici.

Poiché la forza di galleggiamento può considerarsi sempre applicata al baricentro del fluido spostato (*centro di spinta*), la posizione di questo punto rispetto al baricentro del corpo decide della stabilità.

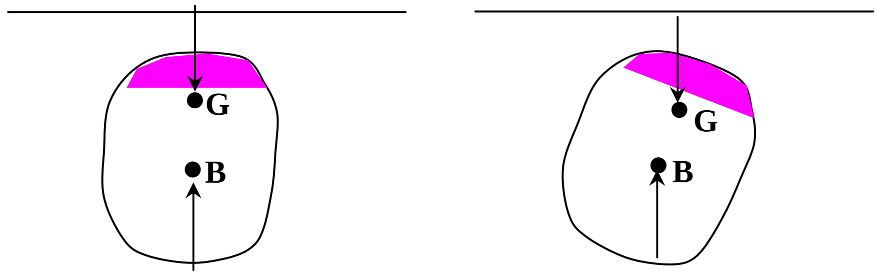
Consideriamo alcuni casi:

Corpo galleggiante con baricentro al di sotto del centro di spinta:
<u>sistema stabile</u>



(B= Centro di spinta, G = baricentro del corpo)

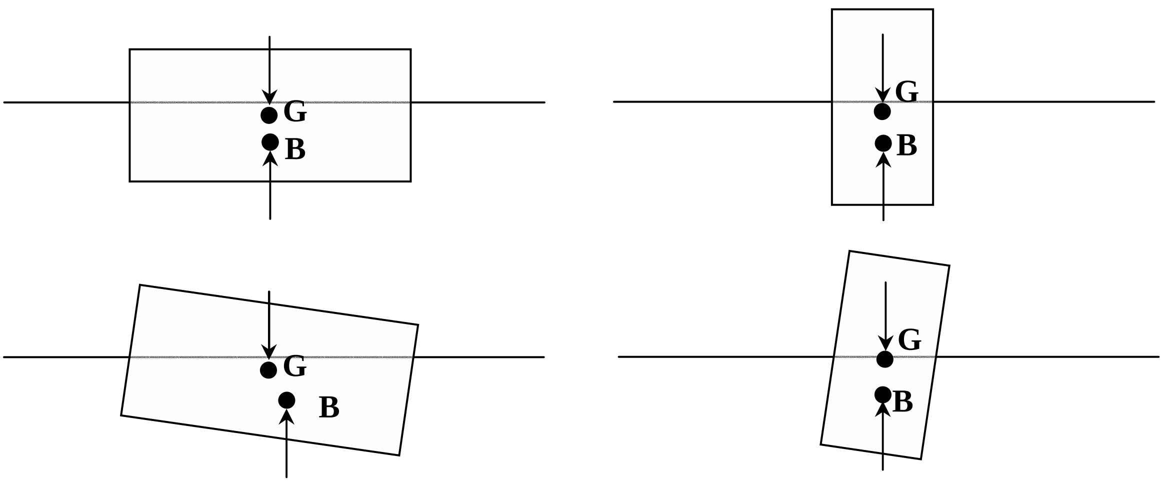
Corpo sommerso con baricentro al di sopra del centro di spinta:
<u>sistema instabile</u>



(B= Centro di spinta, G = baricentro del corpo)

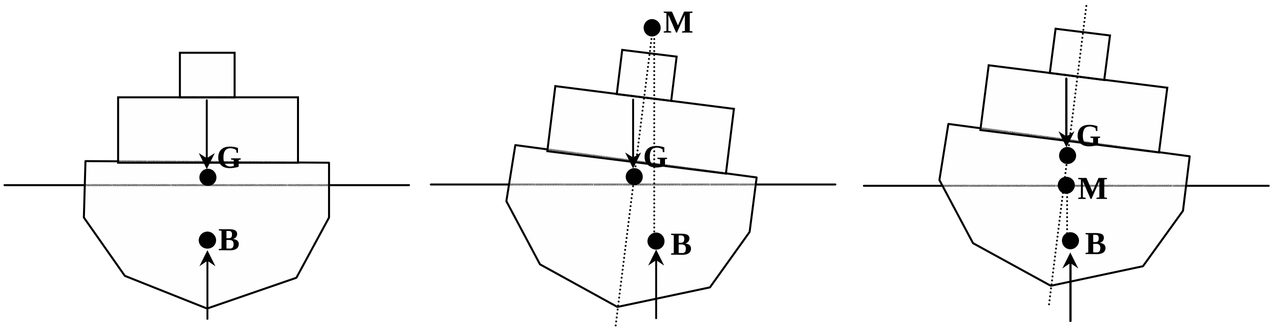
Per un corpo galleggiante con baricentro al di sopra del centro di spinta l'equilibrio può essere stabile o instabile a seconda di come centro di spinta si sposta durante le oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio

Corpo galleggiante con baricentro al di sopra del centro di spinta:
<u>sistema stabile o instabile</u>



Stabile **Instabile**

Se il baricentro è posto al di sopra del centro di spinta, viene ad assumere importanza la posizione del *metacentro*, cioè dell'intersezione della linea d'azione della forza di galleggiamento in una configurazione inclinata con quella in condizione verticale.



Stabile **Instabile**

Si nota che per un corpo galleggiante si ha stabilità quando il metacentro si trova al di sopra del baricentro ed instabilità in caso contrario.

6. Fluidi con moto di corpo rigido

In alcuni casi un fluido può trovarsi in condizioni di moto senza che al suo interno si sviluppino sforzi di taglio. In tal caso, il fluido si muove come se fosse un corpo rigido.

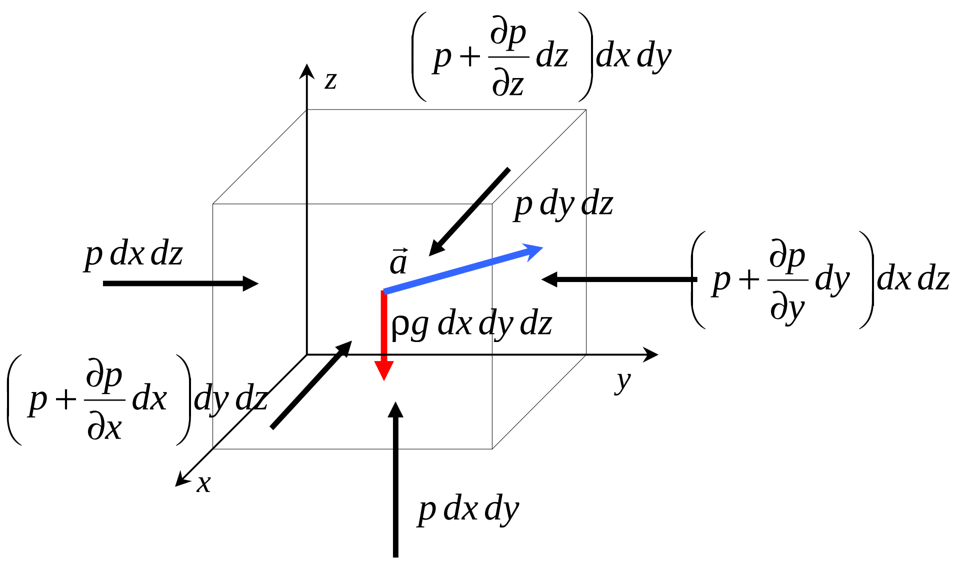
Esempi tipici:

- **fluido trasportato in un recipiente in moto uniformemente accelerato;**
- **fluido in rotazione intorno ad un asse.**

Per trattare questi casi è necessario applicare nuovamente le condizioni di equilibrio nella forma della 2ª legge della Dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

in cui le forze di pressione e la forza peso sono a primo membro



Si ha

$$p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz = \rho a_x\,dx\,dy\,dz$$

$$p\,dx\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx\,dz = \rho a_y\,dx\,dy\,dz$$

$$p\,dx\,dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dx\,dy - \rho g\,dx\,dy\,dz = \rho a_z\,dx\,dy\,dz$$

e quindi

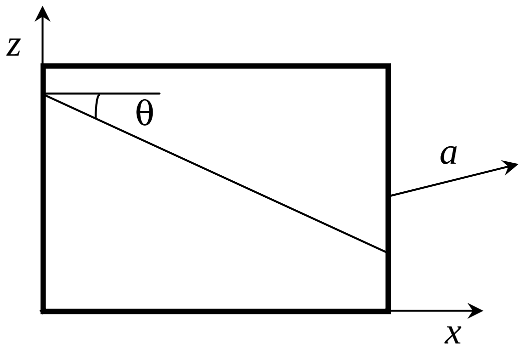
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + a_z) = -\rho g\left(1 + \frac{a_z}{g}\right)$$

Ponendo al solito $\vec{g} \equiv \{0,0,-g\}$**, si ha**

$$\nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{a})$$

Applicazioni:

<u>Recipiente in moto uniformemente accelerato</u>



Lo scopo del calcolo è valutare l'inclinazione della superficie libera del fluido, tenendo conto che essa è una superficie a pressione costante.

Il differenziale della pressione è dato da:

$$dp = -\rho a_x dx - \rho g\left(1 + \frac{a_z}{g}\right)dz$$

Dal momento che le accelerazioni sono costanti in ogni direzione, l'andamento della pressione può essere ottenuto facilmente integrando a partire dal punto $(x = 0, z = 0)$ **in cui si assume** $p = p_0$**. Si ha:**

$$p(x,z) = p_0 - \rho a_x x - \rho g\left(1 + \frac{a_z}{g}\right)z$$

Le superfici a pressione costante sono quindi piani del tipo

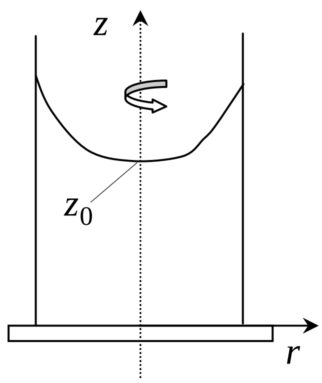
$$-\rho a_x x - \rho g\left(1 + \frac{a_z}{g}\right)z = \overline{p} - p_0 = cost.$$

Anche la superficie libera è una superficie a pressione costante ($= p_{atm}$**) e quindi un piano tale che**

$$dp = -\rho a_x\, dx - \rho g\left(1 + \frac{a_z}{g}\right) dz = 0 \Rightarrow -\frac{dz}{dx} = tan\,\theta = a_x \Big/ g\left(1 + \frac{a_z}{g}\right)$$

La determinazione della posizione della superficie richiede la conoscenza del volume di fluido inizialmente nel recipiente.

<u>Fluido in rotazione intorno ad un asse verticale</u>



L'accelerazione di ogni particella di fluido è l'accelerazione centripeta data da

$$a_r = -\omega^2 r$$

In coordinate cilindriche, la relazione

$$\nabla p = \rho\left(\vec{g} - \vec{a}\right)$$

dà luogo alle seguenti relazioni

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Il differenziale totale della pressione, allora, diventa:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho\omega^2 r\, dr - \rho g\, dz$$

Integrando a partire da *r=0* e *z=*z_0 in cui la pressione vale p_0 si ha:

$$p(r,z) = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g\,(z - z_0)$$

Se supponiamo che *r=0* e *z=*z_0 si trovi sulla superficie libera e che quindi $p_0 = p_{atm}$ l'equazione della superficie è:

$$p_{atm} = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g\,(z - z_0) \quad \Rightarrow \quad z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

che rappresenta un paraboloide di rotazione.

Richiami ad alcuni concetti di Analisi Matematica

La Derivata Parziale

- **Sia data una funzione reale di più variabili**

$$f(P), P \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in X \subseteq S_n$$

ed un punto $P_0 \equiv \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$ **del suo insieme di definizione. Consideriamo la restrizione** $\varphi(x_i)$ **della funzione all'insieme** X_i **definito come l'insieme dei punti di** X **alle cui coordinate, tranne la i-esima, sono stati assegnati valori costanti, uguali alle coordinate di** P_0

$$P_0 \equiv \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0\}$$

La funzione $\varphi(x_i)$ **è quindi una funzione della sola variabile** x_i**. Se essa è derivabile in** x_i^0 **si dice che:**

f è parzialmente derivabile rispetto alla variabile x_i ***nel punto*** P_0
e $\varphi'(x_i)$ ***prende il nome di <u>derivata parziale</u>***
rispetto ad x_i ***di f nel punto*** P_0 ***che si indica con***

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P_0} \qquad \textbf{o anche} \qquad f_{x_i}(P_0)$$

<u>Esempio</u>: il *coefficiente di dilatazione isobaro* di un gas perfetto

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

essendo

$$pv = RT \qquad \Rightarrow \qquad v = v(P,T) = \frac{RT}{p}$$

si ha

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$$ **(<u>nota</u>: *p* è stata trattata come una costante)**

per cui

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{p}{RT}\frac{R}{p} = \frac{1}{T}$$

<u>Provare che</u> la compressibilità isoterma di un gas perfetto è

$$\kappa = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}$$

Il Gradiente

- **Se l'insieme dei punti in cui esistono tutte le *n* derivate parziali di *f* non è vuoto e *P_0* appartiene a tale insieme, il vettore**

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0},\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{P_0},\ldots,\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{P_0}\right\}$$

viene detto *gradiente di f in P_0* e si indica con

$$grad\ f \qquad \mathbf{o} \qquad \nabla f$$

Esso è una *funzione vettoriale* avente come *funzioni componenti* le derivate parziali della funzione *f*.

Esempio 1:

Consideriamo il piano

$$f = f(x,y) = x$$

Si ha

$$\nabla f \equiv \{1,0\}$$

Ciò esprime che la variazione di *f* avviene solo lungo l'asse x e non lungo l'asse y. Infatti, se a partire da un punto (x_0,y_0) scegliessimo di percorrere una retta ad x costante (di versore $\vec{n}=\{0,1\}$) incontreremmo punti in cui *f* è costante; in altre parole la derivata della funzione *f* lungo tale retta sarebbe nulla. Ciò si esprime scrivendo che:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \vec{n} = derivata\ direzionale\ di\ \ f\ \ lungo\ \vec{n} = 0$$

Provare che, dato il piano

$$f = f(x,y) = x + y$$

la derivata direzionale lungo la direzione definita dal versore $\vec{n}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ è nulla e fornirne una spiegazione intuitiva.

Il Differenziale di una funzione *f*, *df*, si ottiene dalla relazione

$$df = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P_0} dx_i = \nabla f \cdot d\vec{x}$$

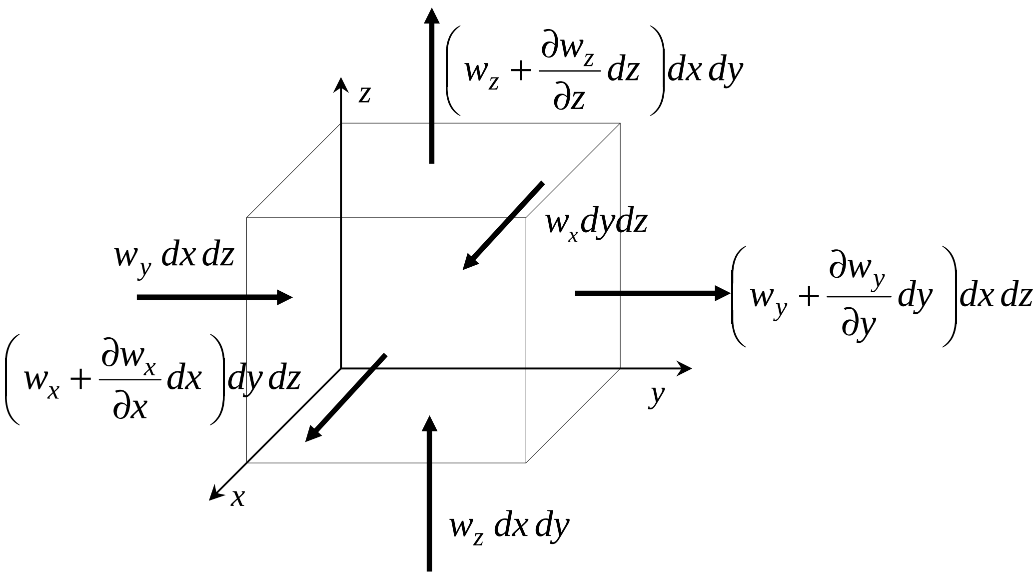
La divergenza di un vettore $\vec{w}$ è la somma delle derivate delle sue componenti rispetto alla coordinata corrispondente:

$$div\,\vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Essa può essere scritta come il prodotto scalare dell'operatore *nabla*, $\nabla \cdot \equiv \left\{ \frac{\partial \cdot}{\partial x}, \frac{\partial \cdot}{\partial y}, \frac{\partial \cdot}{\partial z}, \right\}$, per il vettore $\vec{w}$:

$$div\,\vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{w}$$

Il significato della divergenza in molti problemi della fisica può essere compreso considerando il disegno seguente



Se consideriamo il flusso del vettore $\vec{w}$ attraverso le superfici laterali dell'elemento infinitesimo, si ha:

$$\sum_{facce\ dell'elemento} \vec{w} \cdot \vec{n}\,dS = \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = div\,\vec{w}\,dV$$

Questo risultato si esprime in termini integrali come segue:

$$\int_S \vec{w} \cdot \vec{n}\,dS = \int_V div\,\vec{w}\,dV$$ **(teorema della divergenza)**

Il teorema può essere scritto anche per tensori e scalari

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{\vec{q}}\,dS = \int_V div\,\vec{\vec{q}}\,dV \qquad \int_S q\,\vec{n}\,dS = \int_V \nabla q\,dV$$