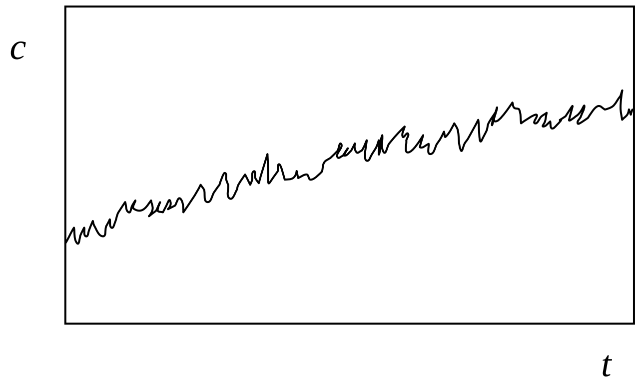
Trattazione Statistica del Moto Turbolento

(metodo di Reynolds)

- **Il moto turbolento è caratterizzato dalla fluttuazione caotica delle variabili in gioco (velocità, pressione, temperatura, ecc.) intorno a valori "medi" che possono essere anch'essi variabili (più lentamente) nel tempo**



- **La descrizione del comportamento istantaneo del fluido è generalmente di scarso interesse per le applicazioni, anche perché i valori misurati ad un dato istante non saranno mai gli stessi**
- **E' allora preferibile descrivere la variazione dei valori "medi" delle variabili di interesse, caratterizzando la turbolenza in modo statistico**
- **A tale scopo si definisce il valore "medio" della generica variabile intensiva c tramite la relazione**

$$\bar{c} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} c \; dt$$

e si decompone il valore istantaneo di c nella somma del valore medio più una componente fluttuante a media nulla

$$c = \bar{c} + c' \qquad\qquad \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} c' \; dt = 0$$

- **L'intervallo di tempo Δt deve essere scelto abbastanza lungo da mediare le fluttuazioni dovute alla turbolenza, ma deve risultare sufficientemente breve rispetto alla scala di variazione temporale delle grandezze medie**

- **L'entità delle fluttuazioni viene generalmente valutata tramite le loro medie quadratiche** $\overline{c'^2}$
- **In particolare, nel caso della velocità si considerano le quantità**

$\sqrt{\overline{w_i'^2}}$ ***intensità della turbolenza per la componente i-esima***

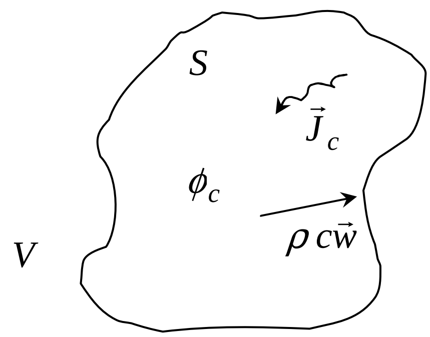
$\sqrt{\overline{w_x'^2}+\overline{w_y'^2}+\overline{w_z'^2}}$ ***intensità della turbolenza***

$\overline{w_i' w_j'} \qquad (i, j = x, y, z)$ ***doppia correlazione***

- **L'*intensità della turbolenza* è direttamente legata all'energia cinetica per unità di massa legata alle fluttuazioni**

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{w_x'^2}+\overline{w_y'^2}+\overline{w_z'^2}\right)$$

Equazioni di bilancio in termini di variabili mediate



Rivisitiamo le equazioni differenziali di bilancio già viste a suo tempo derivandole da un bilancio macroscopico.

Sia data la generica proprietà estensiva C **e sia** $c(\vec{r}, t)$ **il suo valore specifico per unità di massa. Il bilancio di** C **su di un volume** V **<u>arbitrario</u> delimitato da una superficie chiusa** S **assume la forma:**

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho c \, dV}_{\substack{\textit{variazione di C} \\ \textit{nel volume V}}} = -\underbrace{\int_S \rho\, c\,\vec{w}\cdot\vec{n}\, dS}_{\substack{\textit{portata di C} \\ \textit{in uscita col fluido} \\ (\textit{avvezione})}} + \underbrace{\int_S \vec{J}_c \cdot \vec{n}\, dS}_{\substack{\textit{sorgente} \\ \textit{superficiale di C} \\ (\textit{non avvettiva})}} + \underbrace{\int_V \rho \phi_c dV}_{\substack{\textit{sorgente} \\ \textit{volumetrica di C}}}$$

Si è posto: $\vec{J}_c(\vec{r}, t)$ **= sorgente superficiale <u>non-avvettiva</u> di** C

$\phi_c(\vec{r}, t)$ **= sorgente di** C **per unità di massa**

Poiché V **è fisso, si ha:** $\frac{d}{dt}\int_V \rho\, c\, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, c)\, dV$

Si applica ora il teorema della divergenza agli integrali superficiali

$$\int_S \rho\; c\,\vec{w}\cdot\vec{n}\, dS = \int_V \nabla\cdot(\rho\; c\,\vec{w})\, dV \qquad\qquad \int_S \vec{J}_c\cdot\vec{n}\, dS = \int_V \nabla\cdot\vec{J}_c\, dV$$

ottenendo

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, c) + \nabla\cdot(\rho\; c\,\vec{w}) - \nabla\cdot\vec{J}_c - \rho\,\phi_c\right] dV = 0$$

Per l'arbitrarietà di V**, deve essere nulla la funzione integranda**

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, c)}_{\substack{\text{variazione}\\ \text{temporale}}} + \underbrace{\nabla\cdot(\rho\; c\,\vec{w})}_{\substack{\text{termine avvettivo}\\ \text{(trasporto dovuto al fluido)}}} = \underbrace{\nabla\cdot\vec{J}_c}_{\substack{\text{termine}\\ \text{non avvettivo}\\ \text{(diffusivo)}}} + \underbrace{\rho\,\phi_c}_{\substack{\text{termine}\\ \text{di sorgente}}}}$$

forma locale – istantanea del bilancio di C

- **Ponendo:**
  - $c = 1$, $\vec{J}_c = 0$, $\phi_c = 0$ **si ha *(bilancio di massa)***

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\vec{w} = 0$$

  - $c \to \vec{w}$, $\vec{J}_c \to \vec{\vec{\sigma}} = \vec{\vec{\tau}} - p\vec{\vec{I}}$, $\phi_c \to \vec{g}$ **si ha *(bilancio di quantità di moto)***

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{w}) + \nabla\cdot(\rho\vec{w}\vec{w}) = \nabla\cdot\vec{\vec{\tau}} - \nabla p + \rho\vec{g}$$

  - $c = u^0 = u + \frac{w^2}{2}$, $\vec{J}_c = -\vec{q}'' + \vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{w}$, $\phi_c = \frac{q'''}{\rho} + \vec{g}\cdot\vec{w}$ **si ha**

(bilancio di energia)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\, u^0\right) + \nabla\cdot\left(\rho\, u^0\vec{w}\right) = -\nabla\cdot\vec{q}'' + \nabla\cdot\left[\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{w}\right] + q''' + \rho\,\vec{g}\cdot\vec{w}$$

- **Nel caso di moto turbolento, la forma locale ed istantanea delle equazioni di bilancio per la variabile estensiva C di valore specifico c può essere espressa in termini di variabili mediate**
- **A tale scopo, si applica l'operatore di media temporale ad ambo i membri della equazione, ottenendo**

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho c)}+\overline{\nabla\cdot(\rho\, c\,\vec{w})}=\overline{\nabla\cdot\vec{J}_c}+\overline{\rho\,\phi_c}$$

in cui si è sfruttata la linearità dell'operatore integrale

- **Per le ipotesi fatte su Δt si ha**

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, c)}\approx\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\rho\, c)}$$

- **Inoltre, per un sistema di coordinate stazionario, si ha**

$$\overline{\nabla\cdot(\rho\, c\,\vec{w})}=\nabla\cdot\overline{(\rho\, c\,\vec{w})} \qquad \overline{\nabla\cdot\vec{J}_c}=\nabla\cdot\overline{\vec{J}_c}$$

- **Perciò, risulta**

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\rho c)}+\nabla\cdot\overline{(\rho\, c\,\vec{w})}=\nabla\cdot\overline{\vec{J}_c}+\overline{\rho\,\phi_c}$$

- **A questo punto si introduce l'ipotesi che ogni variabile sia decomponibile in un contributo medio ed uno fluttuante**

$$\rho=\overline{\rho}+\rho' \qquad w=\overline{w}+w' \qquad u^0=\overline{u^0}+u^{0\,\prime}$$

e si tiene conto che la media di ogni componente fluttuante è nulla

- **Si ha:**

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\rho\, c)}=\frac{\partial}{\partial t}\overline{\left[(\overline{\rho}+\rho')(\overline{c}+c')\right]}=\frac{\partial}{\partial t}\overline{\overline{\rho}\,\overline{c}}+\frac{\partial}{\partial t}\overline{\overline{\rho}c'}+\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho'\overline{c}}+\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho' c'}$$

Tenendo conto che

$$\overline{\overline{\rho}\,\overline{c}}=\overline{\rho}\overline{c} \quad \textbf{e} \quad \overline{\overline{\rho}c'}=\overline{\rho'\overline{c}}=0$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\rho\, c)}=\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho}\,\overline{c}+\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho' c'}$$

- **Per il termine avvettivo, si ha:**

$$\overline{(\rho\, c\,\vec{w})} = \overline{(\overline{\rho} + \rho')(\,\overline{c} + c')(\overline{\vec{w}} + \vec{w}')}$$

$$= \overline{\overline{\rho}\,\overline{c}\,\overline{\vec{w}}} + \overline{\overline{\rho}\,\overline{c}\,\vec{w}'} + \overline{\overline{\rho}\,c'\overline{\vec{w}}} + \overline{\rho'\,\overline{c}\,\overline{\vec{w}}} + \overline{\overline{\rho}\,c'\vec{w}'} + \overline{\rho'\,\overline{c}\,\vec{w}'} + \overline{\rho'\,c'\overline{\vec{w}}} + \overline{\rho'\,c'\vec{w}'}$$

in cui è

$$\overline{\overline{\rho}\,\overline{c}\,\overline{\vec{w}}} = \overline{\rho}\,\overline{c}\,\overline{\vec{w}} \qquad \overline{\overline{\rho}\,\overline{c}\,\vec{w}'} = \overline{\overline{\rho}\,c'\overline{\vec{w}}} = \overline{\rho'\,\overline{c}\,\overline{\vec{w}}} = 0$$

$$\overline{\overline{\rho}\,c'\vec{w}'} = \overline{\rho}\,\overline{c'\vec{w}'} \qquad \overline{\rho'\,\overline{c}\,\vec{w}'} = \overline{c}\,\overline{\rho'\,\vec{w}'} \qquad \overline{\rho'\,c'\overline{\vec{w}}} = \overline{\rho'\,c'}\,\overline{\vec{w}}$$

Si ha perciò:

$$\overline{(\rho\, c\,\vec{w})} = \overline{\rho}\,\overline{c}\,\overline{\vec{w}} + \overline{\rho}\,\overline{c'\vec{w}'} + \overline{c}\,\overline{\rho'\,\vec{w}'} + \overline{\rho'\,c'}\,\overline{\vec{w}} + \overline{\rho'\,c'\,\vec{w}'}$$

- **Si pone quindi**

$$\vec{J}_c^{\,t} = \overline{\rho}\,\overline{c'\vec{w}'} + \overline{c}\,\overline{\rho'\,\vec{w}'} + \overline{\rho'\,c'}\,\overline{\vec{w}} + \overline{\rho'\,c'\,\vec{w}'}$$

che, pur derivando da un termine *avvettivo*, è espresso formalmente come un flusso superficiale *non avvettivo* (diffusivo*) di origine turbolenta*

- **Operando in modo analogo a quanto visto sopra, risulta poi**

$$\overline{\rho\,\phi_c} = \overline{(\overline{\rho} + \rho')(\overline{\phi}_c + \phi_c')} = \overline{\rho}\,\overline{\phi}_c + \overline{\rho'\phi_c'}$$

- **Con queste definizioni la generica equazione di bilancio in termini di variabili mediate diventa**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\,\overline{c}) + \nabla\cdot(\overline{\rho}\;\overline{c}\;\overline{\vec{w}}) = \nabla\cdot\overline{\vec{J}_c} + \overline{\rho}\;\overline{\phi}_c + \left\{\overline{\rho'\phi_c'} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho' c'}\right) - \nabla\cdot\vec{J}_c^{\,t}\right\}$$

in cui, oltre ai termini dipendenti dalle sole variabili mediate, compaiono termini dovuti alla presenza delle fluttuazioni

- **Assumendo che le fluttuazioni della densità siano trascurabili (oppure che il fluido sia incomprimibile), si ha**

$$\rho' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\rho'\,\phi_c'} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho' c'}\right) = 0 \qquad , \qquad \vec{J}_c^{\,t} = \rho\overline{c'\vec{w}'}$$

per cui, l'equazione di bilancio in termini di variabili mediate assume la forma

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\overline{c}) + \nabla\cdot(\rho\;\overline{c}\;\overline{\vec{w}}) = \nabla\cdot\overline{\vec{J}_c} + \rho\,\overline{\phi}_c - \nabla\cdot\rho\overline{c'\vec{w}'}}$$

che è formalmente simile alla forma locale-istantanea originale, differendone principalmente per la presenza del termine

$$\boxed{-\nabla \cdot \rho \overline{c' \vec{w}'}}$$

- **La presenza di questo termine ricorda che, sebbene le equazioni siano espresse in termini di variabili mediate, le fluttuazioni turbolente giocano un ruolo importante nel trasporto di** C
- **Ciò diviene più chiaro scrivendo l'equazione nella forma**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \bar{c}\right) + \nabla \cdot \left(\rho\ \bar{c}\ \overline{\vec{w}}\right) = \nabla \cdot \left(\overline{\vec{J}_c} - \vec{J}_c^{\,t}\right) + \rho \overline{\phi}_c}$$

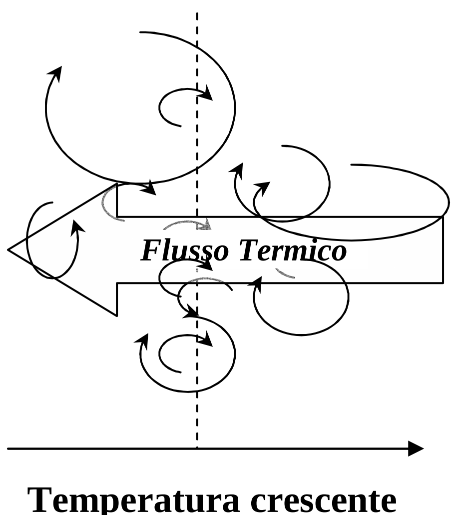
da cui si nota che le equazioni in termini di variabili mediate possono essere trattate come quelle locali-istantanee purché si adotti per il termine di flusso effettivo una definizione appropriata

$$\boxed{\vec{J}_c^{\,eff} = \overline{\vec{J}_c} - \vec{J}_c^{\,t}}$$

che tenga conto sia dello scambio molecolare (di quantità di moto o energia) che di quello turbolento. Si ha quindi:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \bar{c}\right) + \nabla \cdot \left(\rho\ \bar{c}\ \overline{\vec{w}}\right) = \nabla \cdot \vec{J}_c^{\,eff} + \rho \overline{\phi}_c}$$

- **Infatti, lo scambio di quantità di moto e di calore in un moto turbolento avviene non solo a causa dei meccanismi molecolari ma anche per il mescolamento del fluido**



♦ ***zone a maggiore e minore velocità scambiano fluido tra loro dando luogo ad un trasporto netto di quantità di moto***

♦ ***zone più fredde e più calde scambiano fluido tra loro dando luogo ad un trasporto netto di energia termica***

- **Ciò accade anche in presenza di avvezione media nulla, cioè anche se** $\nabla \cdot \left(\rho\ \bar{c}\ \overline{\vec{w}}\right) = 0$**, poiché anche in tal caso può risultare** $\nabla \cdot \rho \overline{c' \vec{w}'} \neq 0$

- **Questo rende ragione della scelta di trattare il termine $\rho\overline{c'\vec{w}'}$ come un termine di flusso superficiale *non avvettivo***
- **A questo punto, con le scelte già viste per c, $\vec{J}_c$ e ϕ_c si ottengono le equazioni di bilancio di massa, quantità di moto ed energia in termini di variabili mediate:**
  - **massa**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\,\overline{\vec{w}}\right)=0$$

  - **quantità di moto**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\overline{\vec{w}}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\,\overline{\vec{w}}\,\overline{\vec{w}}\right)=\nabla\cdot\left(\overline{\overline{\vec{\tau}}}-\overline{p\vec{\vec{I}}}\right)+\rho\vec{g}-\nabla\cdot\left(\rho\,\overline{\vec{w}'\,\vec{w}'}\right)$$

  - **energia (di stagnazione)**

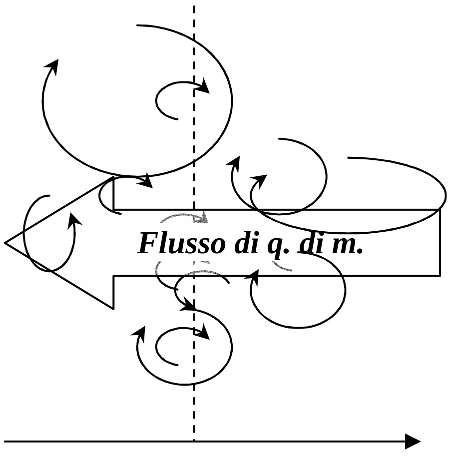
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{u^0}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\overline{u^0}\,\overline{\vec{w}}\right)=\nabla\cdot\left[-\overline{\vec{q}''}+\overline{\left(\vec{\vec{\tau}}-p\vec{\vec{I}}\right)\cdot\vec{w}}\right]+\overline{q'''}+\rho\vec{g}\cdot\overline{\vec{w}}-\nabla\cdot\left(\rho\,\overline{u^{0\prime}\,\vec{w}'}\right)$$

Scambio di quantita' di moto in moto turbolento

- **Come abbiamo visto, l'equazione di bilancio di quantità di moto in termini di variabili mediate è**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\overline{\vec{w}}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\,\overline{\vec{w}}\,\overline{\vec{w}}\right)=\nabla\cdot\left(\overline{\overline{\vec{\tau}}}-\overline{p\vec{\vec{I}}}\right)+\rho\vec{g}-\nabla\cdot\left(\rho\,\overline{\vec{w}'\,\vec{w}'}\right)$$

- **Secondo quanto detto in precedenza, il termine $\rho\overline{\vec{w}'\,\vec{w}'}$ può essere interpretato come il contributo turbolento al flusso superficiale di quantità di moto, ovvero al *tensore degli sforzi* $\vec{\vec{\tau}}$**



Velocità crescente

- **Questo contributo turbolento prende il nome di *tensore degli sforzi di Reynolds* (si tratta ancora di un prodotto diadico di velocità)**

$$\vec{\vec{\tau}}_{Re}=-\rho\overline{\vec{w}'\,\vec{w}'}$$

ed il suo significato può essere descritto con riferimento alla figura a lato, ottenuta per analogia da quella relativa allo scambio termico

- **Il valore effettivo del tensore degli sforzi, risulta quindi dalla sovrapposizione dei contributi viscoso e turbolento**

$$\vec{\vec{\tau}}_{eff} = \vec{\vec{\tau}} + \vec{\vec{\tau}}_{Re} = \vec{\vec{\tau}} - \rho\,\overline{\vec{w}'\,\vec{w}'}$$

- **L'equazione di bilancio di quantità di moto diventa quindi**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\vec{\overline{w}}\right) + \nabla\cdot\left(\rho\,\vec{\overline{w}}\,\vec{\overline{w}}\right) = -\nabla\overline{p} + \nabla\cdot\left(\overline{\vec{\vec{\tau}}} + \vec{\vec{\tau}}_{Re}\right) + \rho\vec{g}$$

- **La valutazione del tensore degli sforzi di Reynolds può essere fatta in analogia con il caso laminare**

$$\left(\vec{\vec{\tau}}_{Re}\right)_{i,j} = -\left(\rho\,\overline{\vec{w}'\,\vec{w}'}\right)_{i,j} = \rho\left(\varepsilon_M\right)_{i,j}\left[\frac{\partial\overline{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{w}_j}{\partial x_i}\right]$$

  in cui $\left(\varepsilon_M\right)_{i,j}$ è detta *diffusività turbolenta della quantità di moto* (*"eddy diffusivity for momentum transfer" o "eddy viscosity"*)

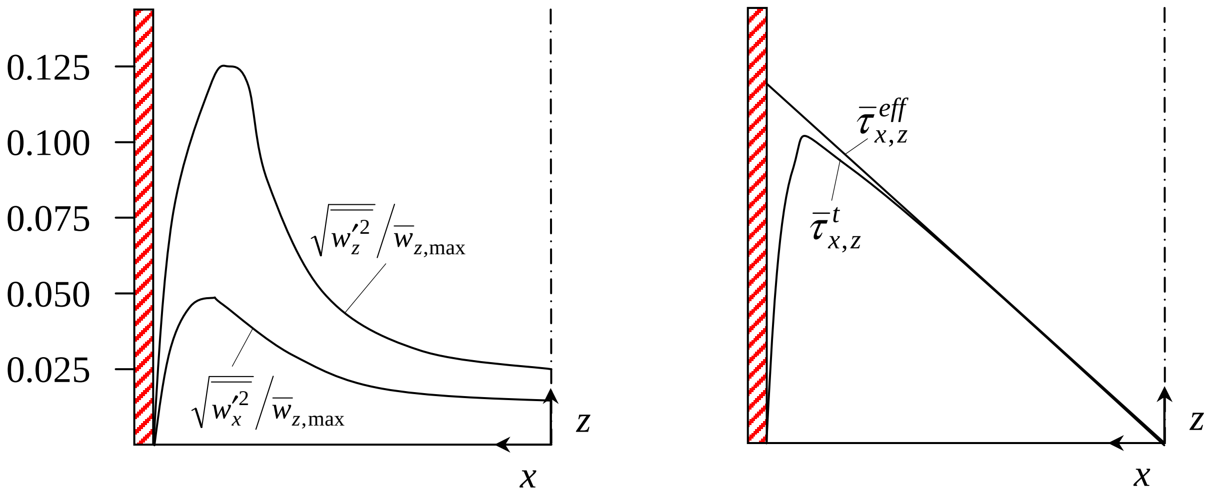
- **Risulta perciò che**

$$\left(\vec{\vec{\tau}}_{eff}\right)_{i,j} = \left(\vec{\vec{\tau}}\right)_{i,j} + \left(\vec{\vec{\tau}}_{Re}\right)_{i,j} = \left[\mu + \rho\left(\varepsilon_M\right)_{i,j}\right]\left[\frac{\partial\overline{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{w}_j}{\partial x_i}\right]$$

- **$\left(\varepsilon_M\right)_{i,j}$ ha le stesse unità di misura di ν cioè $\left[m^2/s\right]$, ma a differenza della viscosità cinematica *non è una proprietà termofisica del fluido, poiché dipende anche dal campo di moto***
- **Dovendo valutare la viscosità turbolenta è necessario distinguere tra diversi tipi di turbolenza:**
  - ***turbolenza isotropa*: le grandezze caratteristiche della turbolenza restano inalterate se si cambia il sistema di riferimento in un dato punto**
  - ***turbolenza omogenea*: le grandezze caratteristiche della turbolenza restano inalterate spostandosi da un punto all'altro**
  - ***turbolenza omogenea ed isotropa*: è una situazione idealizzata che unisce le caratteristiche dei due casi precedenti; si può ottenere ad esempio in una galleria del vento a valle di una griglia**
  - ***turbolenza di parete*: il moto turbolento è influenzato dalla presenza di un confine solido; la turbolenza è quindi anisotropa**

- ♦ *turbolenza libera*: **si verifica nel moto turbolento di un fluido non direttamente influenzato da un confine materiale (ad es., nei getti e nelle scie)**

- **Per quanto riguarda gli effetti di parete sulla turbolenza si considerino i grafici seguenti relativi al moto tra due piastre piane:**
- **Dai grafici si nota che nel caso considerato:**



- ♦ **l'intensità di turbolenza normalizzata alla velocità media nel canale è dell'ordine di qualche % (fino al 10% lungo la direzione del moto)**
- ♦ **in prossimità della parete l'intensità di turbolenza lungo *z* è maggiore di quella lungo *x* (turbolenza anisotropa)**
- ♦ **in prossimità della parete l'intensità di turbolenza varia considerevolmente, raggiungendo un massimo ad una certa distanza; poi diminuisce andando verso il centro del canale**
- ♦ **l'intensità di turbolenza nel centro del canale assume valori paragonabili nelle due direzioni; la variazione con *x* è inoltre più blanda (tendenza alla turbolenza isotropa ed omogenea)**
- ♦ **lo sforzo di taglio effettivo decresce linearmente andando dalla parete verso il centro dove è nullo, come deriva da un bilancio di forze**
- ♦ **lo sforzo di taglio turbolento è nullo alla parete (nel sottostrato laminare, dove il contributo viscoso predomina) ma diviene rapidamente uguale allo sforzo totale con l'aumentare della distanza dalla parete**

- **Sono stati proposti diversi modelli per definire la diffusività turbolenta della quantità di moto. Ne citiamo alcuni.**
    - ♦ ***Viscosità turbolenta di Boussinesq***

      E' una delle prime soluzioni proposte per il problema (1877) che consiste nella definizione di una *viscosità turbolenta* μ^t da definirsi punto per punto

$$\tau_{yx}^t = \mu^t \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y}$$

    - ♦ ***Lunghezza di miscelamento di Prandtl (1925)***

      Prandtl ha assunto una formulazione del tipo

$$\tau_{yx}^t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} \right| \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y}$$

      in cui l è la *lunghezza di miscelamento*, cioè la distanza che deve essere coperta da una particella per produrre lo sforzo di taglio turbolento dato l'assegnato gradiente di velocità

      Il modello è analogo alla teoria cinetica, che vede la viscosità molecolare come una velocità (molecolare media) per una lunghezza (cammino libero medio)

      Prandtl assunse l dipendente linearmente dalla distanza dalla parete, con una legge del tipo $l = ky$.

    - ♦ ***Ipotesi di similitudine di von Karman (1930)***

      Sulla base di considerazioni dimensionali, von Karman propose una formulazione del tipo

$$\tau_{yx}^t = \rho k_2^2 \left| \frac{\left(\partial \overline{w}_x / \partial y\right)^3}{\left(\partial^2 \overline{w}_x / \partial y^2\right)^2} \right| \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y}$$

      in cui k_2 è una costante universale il cui valore per flusso turbolento in tubi è circa 0.36-0.40

♦ ***Formula empirica di Deissler per la zona vicina ad una parete (1955)***

Per trattare la zona prossima ad una parete Deissler ha proposto la seguente relazione empirica

$$\tau_{yx}^{t} = \rho n^2 \overline{w}_x y \left[1 - \exp\left(-n^2 \overline{w}_x y / \nu\right)\right] \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y}$$

Sulla base della distribuzione delle velocità in tubi, Deissler ha stimato $n \approx 0.124$

Scambio termico in moto turbolento

- **Come abbiamo visto, l'equazione di bilancio di energia (di stagnazione) in termini di variabili mediate risulta**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \overline{u^0}\right) + \nabla \cdot \left(\rho \overline{u^0}\, \overline{\vec{w}}\right) = \nabla \cdot \left[-\overline{\vec{q}''} + \overline{\left(\vec{\vec{\tau}} - p\vec{\vec{I}}\right) \cdot \vec{w}}\right] + \overline{q'''} + \rho \vec{g} \cdot \overline{\vec{w}} - \nabla \cdot \left(\rho\, \overline{u^{0\prime}\, \vec{w}'}\right)$$

- **Da questa equazione è possibile ottenere l'equazione di bilancio di energia termica che per un fluido incomprimibile in moto stazionario assume la forma**

$$\nabla \cdot \left(\rho C_p \overline{T}\, \overline{\vec{w}}\right) = -\vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{q}''} + \overline{q'''} + \overline{\Phi} - \nabla \cdot \left(\rho C_p\, \overline{T' \vec{w}'}\right)$$

- **Si nota che il vettore**

$$\rho C_p\, \overline{T' \vec{w}'}$$

rappresenta il contributo turbolento allo scambio termico

$$\vec{q}''_{eff} = \vec{q}'' + \rho C_p\, \overline{T' \vec{w}'}$$

- **In analogia con la legge di Fourier dello scambio termico conduttivo, è allora possibile scrivere**

$$\rho C_p \left\{\overline{T' \vec{w}'}\right\}_j = -\rho C_p \left(\varepsilon_H\right)_j \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}$$

in cui $(\varepsilon_H)_j$ **rappresenta la *diffusività termica turbolenta*** $\left[m^2/s\right]$ **. Si ha perciò**

$$\left\{\vec{q}''_{eff}\right\}_j = -\rho C_p \left[\alpha + \left(\varepsilon_H\right)_j\right]\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}$$

in cui compaiono i contributi molecolare (conduzione) e turbolento

- **Per la natura di ε_H valgono considerazioni analoghe a quelle viste per ε_M; in particolare, essa non dipende solo dal fluido, ma anche dal campo di moto**
- **Poiché i vortici che danno luogo al trasporto turbolento di quantità di moto sono gli stessi che trasportano anche l'energia, è ragionevole ipotizzare che**

$$Pr_t = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H} = numero\ di\ Prandtl\ turbolento = 1$$

- **Ciò vale con accettabile approssimazione per fluidi con numero di Prandtl (molecolare) prossimo ad 1. In questo caso si ha dunque**

$$\varepsilon_H = \varepsilon_M$$

- **Per metalli liquidi si ha $\varepsilon_H < \varepsilon_M$ e vale la relazione di Dwyer**

$$\frac{\varepsilon_H}{\varepsilon_M} = 1 - \frac{1.82}{Pr\left(\frac{\varepsilon_M}{\nu}\right)_{max}^{1.4}}$$

in cui "max" indica il valore massimo nel canale