

# Moto Monodimensionale di Fluidi Compressibili

## Considerazioni introduttive

- Fino a questo punto, ci siamo occupati di fluidi e condizioni di moto in cui la compressibilità non aveva un ruolo importante: l'uso di equazioni per fluido incompressibile, in un tale caso, ha semplificato notevolmente la trattazione
- Esistono però situazioni in cui la compressibilità non può essere trascurata e, come abbiamo già avuto modo di osservare, tra queste ci sono le condizioni in cui il numero di Mach è prossimo ad 1
- Richiamiamo innanzitutto il concetto di *compressibilità isoterma*, già visto a suo tempo come proprietà generale dei fluidi

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} = \text{compressibilità isoterma}$$

Evidentemente,  $\kappa$  è maggiore quanto più il volume specifico del fluido varia in funzione della pressione. Talora si usa anche il reciproco della compressibilità (*bulk compression modulus*).

- Evidentemente i liquidi hanno una bassa compressibilità e possono essere considerati incompressibili nella maggioranza dei casi, mentre i vapori ed i gas possono essere considerati incompressibili solo in casi ben definiti
- Per i gas è inoltre possibile adottare il modello semplificato di gas perfetto, con la legge di stato

$$pv = RT$$

- Per flusso adiabatico e senza attriti (isentropico) la relazione di stato precedente si semplifica nella

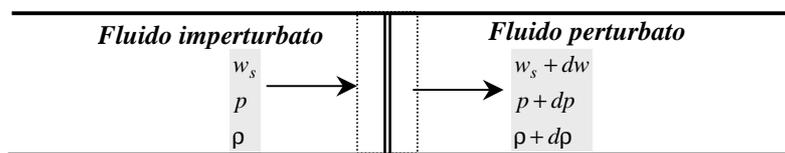
$$pv^k = \text{cost}$$

in cui  $k$  è dato da  $k = c_p/c_v$  in cui compaiono i calori specifici a volume e pressione costante

$$du = c_v dT \quad dh = c_p dT$$

## Velocità del suono

- L'esperienza mostra che le piccole perturbazioni di pressione si propagano nei fluidi con una velocità ben definita, che prende il nome di *velocità del suono*
- Per ottenere una relazione che definisca la velocità del suono si può fare riferimento ad una situazione monodimensionale come quella riportata in figura, in cui una piccola perturbazione di pressione si muove con velocità  $w_s$
- Consideriamo un sistema di riferimento solidale con un piccolo



volume di controllo a cavallo della discontinuità. Rispetto a tale sistema di riferimento:

- il fluido “imperturbato”, con pressione  $p$  e densità  $\rho$ , entra nel volume di controllo con velocità  $w_s$  ;
- il fluido “perturbato”, con pressione  $p + dp$  e densità  $\rho + d\rho$ , esce dal volume di controllo con velocità  $w_s + dw$  ;
- Un *bilancio stazionario di massa* per il volume di controllo fornisce

$$\underbrace{\rho w_s A}_{\text{portata in ingresso}} = \underbrace{(\rho + d\rho)(w_s + dw) A}_{\text{portata in uscita}}$$

cioè la portata entrante è uguale a quella uscente

- Il bilancio stazionario di quantità di moto lungo l'asse del condotto per il volume di controllo dà quindi

$$\underbrace{pA}_{\text{forza di pressione lato imperturbato}} - \underbrace{(p + dp)A}_{\text{forza di pressione lato perturbato}} = \underbrace{\rho w_s A}_{\text{portata ingresso-uscita}} \left[ \underbrace{w_s + dw}_{\text{velocità in uscita}} - \underbrace{w_s}_{\text{velocità in ingresso}} \right]$$

$$\Rightarrow -dp = \rho w_s dw \quad (^\circ)$$

- **L'equazione di continuità, peraltro dà**

$$\underbrace{\rho w_s A}_{\text{portata in ingresso}} = \underbrace{(\rho + d\rho)(w_s + dw)A}_{\text{portata in uscita}} \Rightarrow \rho w_s A = \rho w_s A + \rho dw A + w_s d\rho A + d\rho dw A$$

**da cui, trascurando il prodotto  $d\rho dw$ , si ha**

$$\rho dw = -w_s d\rho \Rightarrow dw = -w_s \frac{d\rho}{\rho}$$

- **Sostituendo questa relazione nella (°), si ha:**

$$-dp = \rho w_s dw \Rightarrow -dp = -\rho w_s^2 \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow w_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

- **Poiché si assume generalmente che la perturbazione sia molto piccola ed il processo ad essa connesso adiabatico e reversibile (cioè isentropico) si pone**

$$w_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

- **Per un gas perfetto in condizioni adiabatiche si ha:**

$$pv^k = \text{cost} \Rightarrow p = \text{cost} \times \rho^k \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \rho} = \text{cost} \times k\rho^{k-1}$$

**Essendo**

$$\text{cost} = pv^k$$

**si ha**

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = pv^k k\rho^{k-1} = k pv = kRT$$

**e quindi**

$$w_s = \sqrt{kRT}$$

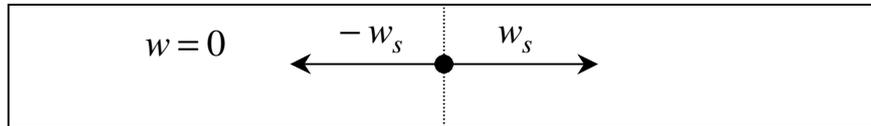
- **Ad esempio per aria a temperatura di 20 °C (293 K) assumendo**

$$R \approx 287 \frac{J}{kg K} \quad k \approx 1.4$$

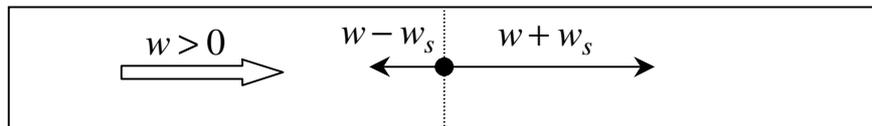
**risulta**

$$w_s = \sqrt{1.4 \times 287 \times 293.15} \approx 343 \text{ m/s}$$

- In un condotto monodimensionale come quello visto, ogni perturbazione di pressione si propaga lungo l'asse sia in avanti che all'indietro
  - se il fluido è in quiete la perturbazione si propagherà in avanti con velocità  $w_s$  e all'indietro con velocità  $-w_s$

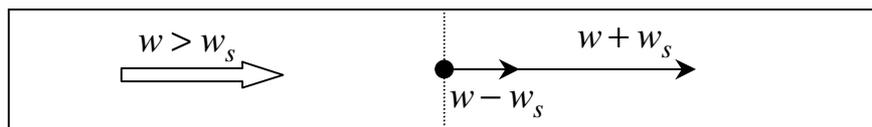


- più in generale, se il fluido è in moto con velocità  $w$  si ha che la velocità di propagazione in avanti risulta  $w + w_s$ , mentre in direzione opposta si ha  $w - w_s$



in altre parole, la velocità del fluido si sovrappone a quella della perturbazione di pressione

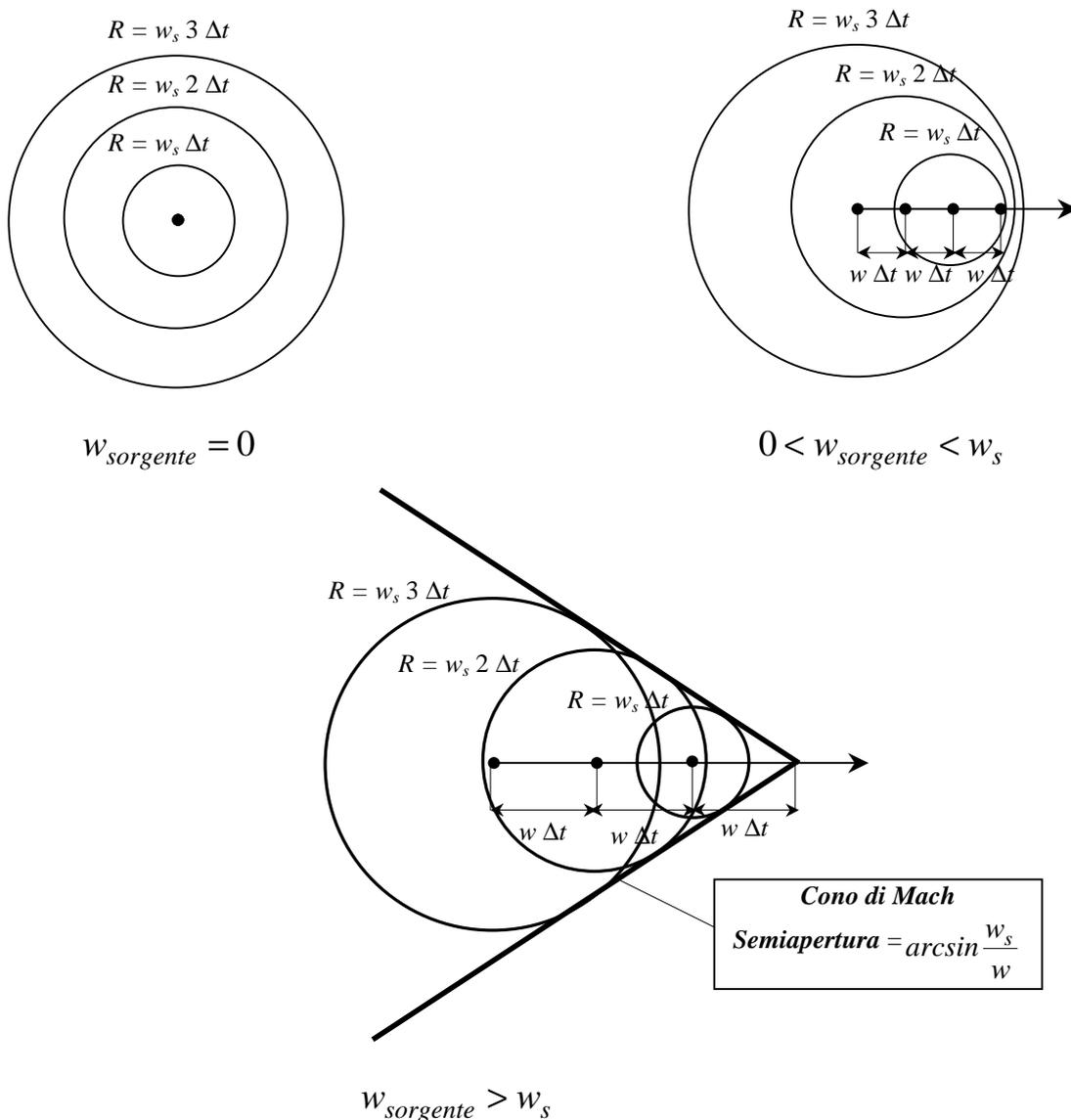
- per  $w > w_s$  accade quindi che le perturbazioni di pressione si propagano solo in avanti



questo fenomeno è molto importante perché comporta che in condizioni di flusso sonico o supersonico nessuna informazione sul valore della pressione a valle può risalire la corrente

- Analogamente se si considera la propagazione di una perturbazione emessa da una sorgente che genera impulsi ripetuti in condizioni tridimensionali si ha che:
  - se la sorgente è ferma, i fronti d'onda sono sfere concentriche
  - se la sorgente si muove con una velocità inferiore a quella del suono, si hanno ancora fronti d'onda sferici, ma non più concentrici

- se la sorgente si muove con velocità superiore a quella del suono, i fronti d'onda sono superfici sferiche contenute in una superficie conica (*cono di Mach*) che delimita la zona che ha risentito della perturbazione.



- Questo comportamento può essere spiegato considerando che:
  - la perturbazione si propaga con velocità pari a quella del suono rispetto al gas;
  - se la velocità della sorgente è inferiore a quella del suono, il fronte della perturbazione può “precedere” la sorgente nel moto
  - se la velocità è superiore a quella del suono, il fronte della perturbazione “resta indietro” rispetto alla sorgente

## Relazione di Hugoniot

- Consideriamo ora il moto monodimensionale stazionario di un fluido compressibile in un condotto senza attriti e scambi termici (flusso isentropico) con sezione variabile
- Applichiamo il Teorema di Bernoulli in forma differenziale, nel caso di assenza di attriti

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) + \frac{dp}{\rho g} + dz = 0$$

Assumiamo inoltre che sia  $dz = 0$ . Si ha:

$$w dw + \frac{dp}{\rho} = 0$$

- Se il moto è isentropico risulta

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho = w_s^2 d\rho$$

da cui

$$w dw + w_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad ({}^{\circ\circ})$$

- Dall'equazione di bilancio di massa stazionaria in un condotto a sezione variabile

$$d(\rho w A) = 0$$

(cioè, la portata di massa non varia lungo il condotto) si ha

$$w A d\rho + \rho w dA + \rho A dw = 0$$

e dividendo ambo i membri per  $\rho w A$  si ottiene:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} = 0$$

- Ricavando  $d\rho/\rho$  dalla (°°) e sostituendo nella precedente si ha

$$-\frac{w dw}{w_s^2} + \frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} \left(1 - \frac{w^2}{w_s^2}\right) = 0$$

e quindi

$$\frac{dA}{A} = \frac{dw}{w} \left(\frac{w^2}{w_s^2} - 1\right)$$

- Introducendo il *numero di Mach*

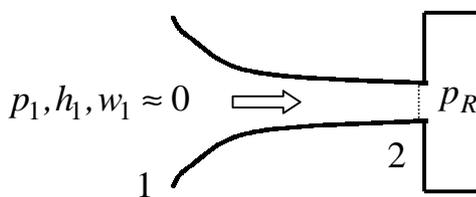
$$M = \frac{w}{w_s}$$

si ha infine

$$\boxed{\frac{dA}{A} = \frac{dw}{w} (M^2 - 1)} \quad (\text{relazione di Hugoniot})$$

- La precedente mostra che:
  - per *moto subsonico* ( $M < 1$ ), una variazione positiva di area comporta una variazione negativa di velocità e viceversa;
  - per *moto supersonico* ( $M > 1$ ), le variazioni di area e velocità sono concordi: dove l'area aumenta anche la velocità aumenta e dove l'area diminuisce anche la velocità diminuisce;
  - se in qualche punto del condotto si verifica la condizione  $M = 1$  allora in quel punto è  $dA = 0$ , cioè l'area è massima o minima;
- Qualora il condotto avesse sezione uniforme e si verificassero le condizioni per avere  $M = 1$ , la stessa vena fluida subirebbe una contrazione per ottenere  $dA = 0$
- In un condotto a sezione uniforme si ha *portata critica (choked flow)* quando si ha  $M = 1$  all'uscita ed una ulteriore diminuzione della pressione nell'ambiente a valle non ha alcuna influenza su ciò che accade nel condotto

### *Portata critica in un ugello convergente*



- Consideriamo un *ugello* come quello descritto a titolo di esempio in figura, percorso da un gas perfetto in condizioni stazionarie, adiabatiche e senza attrito.
- Esso connette un ambiente con le condizioni indicate dal pedice 1 con un ambiente (ricevente) caratterizzato, per i nostri scopi, dalla sola pressione  $p_R$ .
- Ci proponiamo di valutare come vari la portata nell'ugello al variare della pressione  $p_R$  nell'ambiente ricevente.

- **Note le condizioni nella sezione 2, prossima all'uscita, si ha:**

$$W = \rho_2 w_2 A_2$$

**E' quindi necessario calcolare  $\rho_2$  e  $w_2$ . In condizioni stazionarie, infatti, in qualunque punto del condotto risulta**

$$W = \rho w A = \rho_2 w_2 A_2$$

- **L'equazione di bilancio stazionario dell'energia tra le sezioni 1 e 2 si scrive nella forma**

$$\frac{w_1^2}{2} + h_1 = \frac{w_2^2}{2} + h_2$$

**che esprime che la somma dell'entalpia più l'energia cinetica in ingresso si mantiene inalterata nel condotto adiabatico.**

- **D'altra parte, in figura abbiamo ipotizzato che**

$$w_1 \approx 0$$

**ed ora aggiungiamo che, date la relazione termodinamica**

$$dh = T ds + v dp$$

**e l'ipotesi di isentropicità del flusso, si ha**

$$dh = v dp \quad \Rightarrow \quad h_2 - h_1 = \int_1^2 v dp$$

- **Con queste ipotesi il bilancio stazionario di energia assume la forma**

$$w_2^2 = -2 \int_1^2 v dp = 2 \int_2^1 v dp$$

- **Per eseguire l'integrale è necessario conoscere il tipo di trasformazione cui va soggetto il fluido: essa, per ipotesi, è di tipo adiabatico; si ha dunque**

$$pv^k = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad p_1 v_1^k = p v^k \quad \Rightarrow \quad v = \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{k}} v_1$$

**Allora**

$$w_2^2 = 2 v_1 p_1^{\frac{1}{k}} \int_2^1 \left( \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{k}} dp = 2 v_1 p_1^{\frac{1}{k}} \int_2^1 p^{-\frac{1}{k}} dp = 2 v_1 p_1^{\frac{1}{k}} \left[ \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} p^{1 - \frac{1}{k}} \right]_2^1$$

$$\begin{aligned}
&= 2v_1 p_1^{\frac{1}{k}} \left( \frac{k}{k-1} \right) \left[ p_1^{1-\frac{1}{k}} \right]_2^1 = 2v_1 p_1^{\frac{1}{k}} \left( \frac{k}{k-1} \right) \left[ p_1^{\frac{k-1}{k}} - p_2^{\frac{k-1}{k}} \right] \\
&= 2v_1 p_1^{\frac{1}{k}} p_1^{\frac{k-1}{k}} \left( \frac{k}{k-1} \right) \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = 2v_1 p_1 \left( \frac{k}{k-1} \right) \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]
\end{aligned}$$

• **Perciò**

$$w_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

**e, in termini di portata specifica per unità di area (*mass velocity*)**

$$\begin{aligned}
G = G_2 = \rho_2 w_2 &= \frac{w_2}{v_2} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{w_2}{v_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{v_1} \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \\
&= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{1}{v_1^2} p_1 v_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}
\end{aligned}$$

**e infine**

$$G = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \right] \quad ({}^{\circ\circ\circ})$$

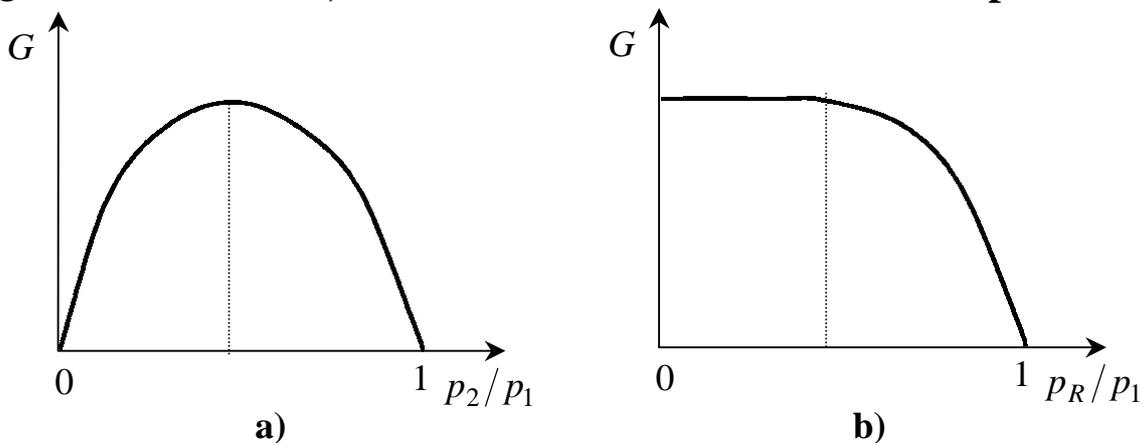
- **La relazione precedente può essere utilizzata una volta note le condizioni a monte (dette anche “di stagnazione”) nella sezione 1 e la pressione nella sezione 2**
- **Per quest’ultima, ricordando quanto visto in relazione alla propagazione delle perturbazioni di pressione, in un fluido in moto, si ha:**
  - **se la velocità in uscita è inferiore a quella del suono si può assumere:**

$$p_2 = p_R \quad (\text{flusso subsonico})$$

- se la velocità in uscita è divenuta uguale a quella del suono, a causa del continuo diminuire della pressione nel sistema ricevente,  $p_R$ , nessuna ulteriore diminuzione di tale pressione potrà influenzare il comportamento dell'ugello:

$$p_2 \geq p_R \quad (\text{flusso sonico})$$

- Tuttavia, rappresentando la portata specifica data dalla (°°°) in funzione del rapporto  $p_2/p_1$  si ha un grafico che qualitativamente è simile a quello mostrato nella figura a) seguente
- Questo andamento, che include una diminuzione della portata dopo



il raggiungimento di condizioni sonore (o *critiche*), non può perciò rappresentare l'andamento realmente osservabile in funzione di  $p_R$ , che invece riportato qualitativamente in figura b) :

- al diminuire di  $p_R$ , l'andamento della portata segue approssimativamente la (°°°) fino al raggiungimento del massimo (*portata critica*)
- successivamente la portata si mantiene costante ed uguale al valore critico
- Il valore della portata critica attraverso l'ugello si può quindi ottenere valutando il massimo della (°°°)

$$\frac{\partial G}{\partial (p_2/p_1)} = \frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ \frac{2}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}-1} \right] / \left[ 2 \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \left[ \frac{2}{k+1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}-1} - 1 \right] = 0 \Rightarrow \frac{2}{k+1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}-1} - 1 = 0$$

e quindi

$$\frac{2}{k+1} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 0 \Rightarrow \boxed{\left( \frac{p_2}{p_1} \right)_{max\ portata} = \frac{p_c}{p_1} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}}$$

in cui  $p_c$  è la **pressione critica**, che si stabilisce nella gola quando si raggiunge la portata critica

- Se assumiamo  $k \approx 1.4$ , risulta

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right)_{max\ portata} = \frac{p_c}{p_1} = \left( \frac{2}{1.4+1} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 0.53\dots$$

cioè, la pressione critica è circa la metà di quella a monte

- Sostituendo nella (°°°), si trova il valore massimo della portata:

$$\begin{aligned} G_{max} &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ \left( \frac{p_c}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_c}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1} \frac{2}{k}} - \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1} \frac{k+1}{k}} \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}} - \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1} \frac{k+1}{k-1}} - 1 \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1-k}{k-1}} - 1 \right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[ \frac{k+1}{2} - 1 \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[ \frac{k-1}{2} \right]} = \sqrt{k \frac{p_1}{v_1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \end{aligned}$$

e quindi

$$G_{max} = \sqrt{k \frac{p_1}{v_1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$$

che permette di calcolare la portata critica (specifica) per un gas perfetto in condizioni isentropiche, assegnate le condizioni a monte

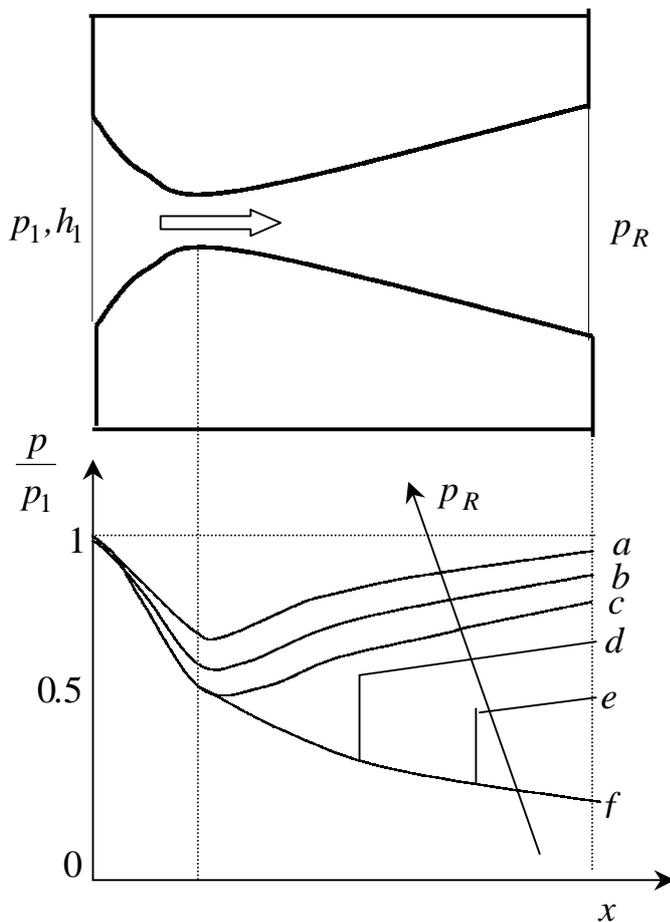
- E' bene ricordare che, più in generale:

*la portata critica è il valore massimo della portata che si ottiene quando un fluido compressibile transita tra due ambienti a pressione diversa*

### *L'ugello di de Laval*

- Come abbiamo visto, un ugello convergente permette di sfruttare il salto di entalpia disponibile solo parzialmente, cioè fino alle condizioni critiche nella gola.
- L'ugello di de Laval, invece, permette di utilizzare tutta la caduta di entalpia teoricamente disponibile a meno degli attriti. Esso è disegnato come segue:
  - possiede *una parte convergente*, arrotondata in modo da seguire la vena effluente libera;
  - possiede inoltre *una parte divergente*, sagomata in modo da seguire le variazioni di velocità e volume specifico conseguenti alle variazioni di pressione
- Discutiamone il comportamento alla luce dei profili di pressione mostrati nella figura successiva
  - a) per  $p_R$  non troppo elevata il moto è subsonico sia nel convergente che nel divergente
  - b) anche per valori di  $p_R$  lievemente inferiori accade come nel precedente caso a)
  - c) quando  $p_R$  raggiunge un valore ben preciso, *nella sezione ristretta si ha una velocità pari a quella del suono, ma nelle zone a monte e a valle di essa il flusso si mantiene subsonico*: da questo momento in poi le curve di pressione relative a valori di  $p_R$  più bassi coincideranno nel tratto convergente

d) *diminuendo ulteriormente  $p_R$  comincia ad essere presente un tratto supersonico nella zona divergente, coerentemente con la relazione di Hugoniot; se però  $p_R$  non è sufficientemente bassa da mantenere un regime supersonico nell'intero ugello, è presente una zona di discontinuità in cui il flusso passa bruscamente da supersonico a subsonico: per la diversità di propagazione delle informazioni sulla pressione al confine tra le due regioni, si instaura un'onda di "shock" stazionaria attraverso la quale la pressione subisce una discontinuità*



e) *anche per questo caso valgono le considerazioni precedenti, con l'unica differenza che l'onda d'urto si presenta più a valle*

f) *in questo caso, la pressione  $p_R$  è sufficientemente bassa da consentire che in tutto il tratto divergente si possa avere flusso supersonico: ciò permette una migliore utilizzazione del salto entalpico disponibile, poiché il fluido può accelerare ben oltre la velocità del suono*

- **In presenza di attriti la sezione in cui si raggiunge la velocità del suono non è esattamente la sezione ristretta ma è spostata leggermente a valle, come assunto nella figura precedente.**