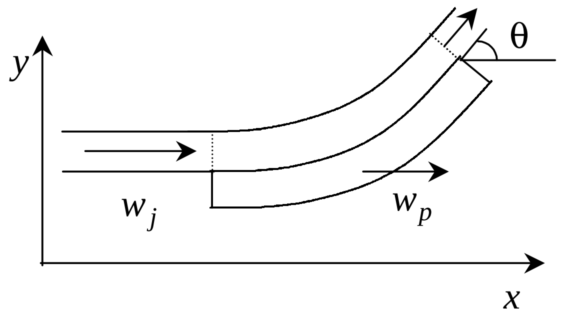
Modelli Matematici per il Moto di Fluidi
Discussione di problemi tipici

1. Paletta che deflette un getto

Una paletta in moto rettilineo uniforme con velocità w_p viene investita da un getto di fluido con velocità assoluta w_j. Nell'ipotesi che il getto segua la forma della paletta e mantenga la stessa forma tra ingresso ed uscita e trascurando gli attriti ed il peso proprio del fluido, valutare la forza esercitata sulla paletta al variare dell'angolo di uscita tra 0° e 180° (v. figura) dati w_j e $w_p < w_j$, l'area A_j del getto e la densità del fluido.



Discussione

Consideriamo il volume di controllo delimitato dalle sezioni di ingresso e di uscita del getto sulla paletta. Dalla sezione di ingresso entrerà una portata pari a

$$W_{j,in} = \rho\left(w_j - w_p\right)A_j$$

La portata in uscita in una situazione stazionaria sarà $W_{j,out} = W_{j,in}$. Con buona approssimazione i valori delle pressioni nelle sezioni di ingresso ed uscita saranno uguali alla pressione atmosferica (il getto è sottile e di sezione costante). La forza complessiva applicata lungo ogni asse dalla paletta al fluido dovrà quindi compensare la variazione della quantità di moto del fluido lungo tale asse. Essendo

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{w}\,dV = 0}$$

come risulta dall'ipotesi di stazionarietà del moto, dalla

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{w}\,dV = \sum_{k=1}^{N_F}\vec{F}_k + \left(\sum_j W_j\vec{w}_j\right)_{in} - \left(\sum_j W_j\vec{w}_j\right)_{out}}$$

si ha che la forza complessiva applicata dalla paletta al fluido è date da (le portate sono positive se "entranti")

$$\vec{F} = W_{j,out}\vec{w}_{j,out} - W_{j,in}\vec{w}_{j,in}$$

Per le portate in ingresso ed uscita, si ha poi:

$$W_{j,in} = W_{j,out} = \rho A_j\left(w_j - w_p\right)$$

in quanto la velocità relativa del fluido rispetto alla paletta è $w_j - w_p$ e, essendo in condizioni stazionarie, non vi è accumulo di massa sulla paletta.

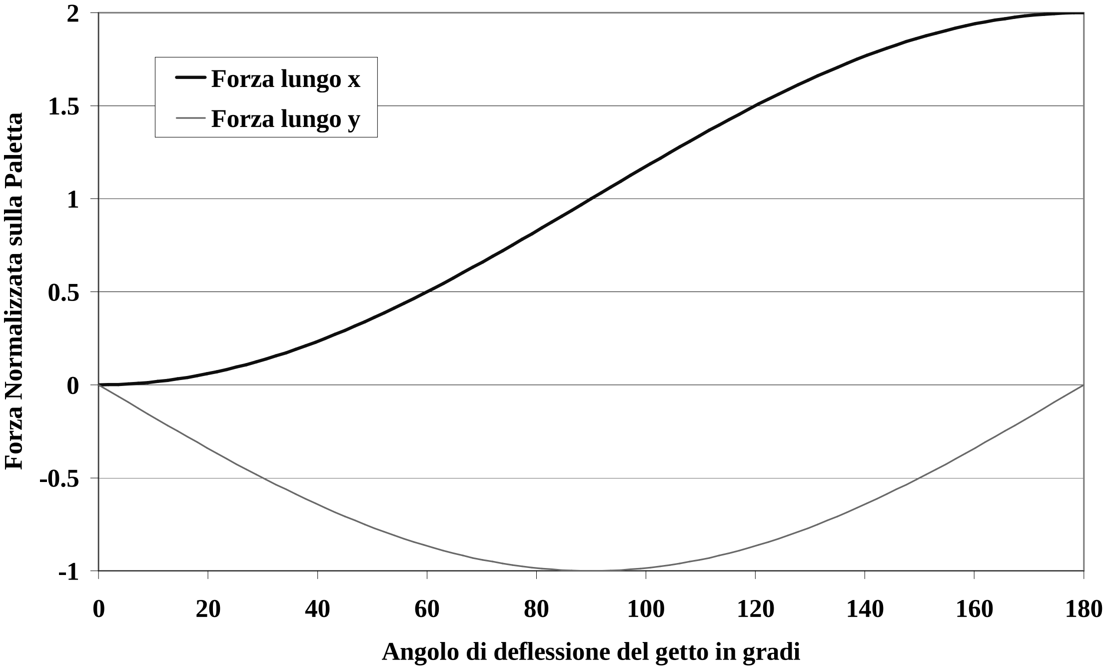
- Asse x:
  la velocità assoluta in entrata lungo x è: $w_{j,in,x} = w_j$; la velocità assoluta in uscita lungo x può essere ottenuta come la componente della velocità nel moto relativo più quella di trascinamento della paletta: $w_{j,out,x} = (w_j - w_p)cos\theta + w_p$. La forza esercitata sul fluido è quindi
  $$F_x = W_{j,out} w_{j,out,x} - W_{j,in} w_{j,in,x} = \rho A_j (w_j - w_p)[(w_j - w_p)cos\theta + w_p - w_j]$$
  cioè
  $$F_x = \rho A_j (w_j - w_p)^2 [cos\theta - 1]$$
  si nota che essa è sempre negativa, qualunque sia θ come ci si attende dall'intuizione fisica (la forza che deflette il getto diretto lungo l'asse x è sempre discorde con esso).

- Asse y:
  ragionando analogamente si ha: $w_{j,in,y} = 0$ e $w_{j,out,y} = (w_j - w_p)sin\theta$; la forza esercitata sul fluido è quindi
  $$F_y = W_{j,out} w_{j,out,y} - W_{j,in} w_{j,in,y} = \rho A_j (w_j - w_p)[(w_j - w_p)sin\theta]$$
  cioè
  $$F_y = \rho (w_j - w_p)^2 A_j \, sin\theta$$

Le forze applicate sulla paletta sono, per il principio di azione e reazione, uguali ed opposte a quelle valutate.

Le formule precedenti mostrano che:

- le forze tra fluido e paletta sono tanto minori quanto più la velocità della paletta approssima quella del getto;
- per quanto riguarda la dipendenza da θ come mostrato dal grafico sottostante:
  - la forza lungo x è nulla per $\theta = 0°$ e aumenta con l'angolo di deflessione raggiungendo un massimo per $\theta = 180°$ (getto deflesso all'indietro
  - la forza lungo y è sempre non positiva ed il suo valore assoluto ha un massimo per $\theta = 90°$ (getto deflesso verso l'alto); essa è nulla per $\theta = 0°$ e $\theta = 180°$



- poiché il valore della forza è normalizzato alla portata di quantità di moto in entrata, si riconosce che:
  - per $\theta = 0°$ (nessuna deflessione) le forze lungo entrambi gli assi sono nulle;
  - per $\theta = 90°$ (deflessione ad angolo retto) la forza lungo x corrisponde al totale annullamento della quantità di moto lungo x, mentre quella lungo y corrisponde alla generazione di una portata di quantità di moto lungo y pari a quella entrante
  - per $\theta = 180°$, la forza lungo x è doppia di quella corrispondente alla portata di quantità di moto in ingresso, mentre quella lungo y è nulla, coerentemente con il fatto che le quantità di moto in ingresso ed in uscita non hanno componenti lungo questa direzione

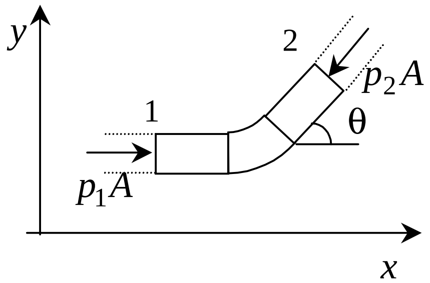
Attività proposte

- Verificare la soluzione del problema precedente, ragionando sulla base di un sistema di riferimento relativo alla paletta in movimento.

- Assegnare valori numerici plausibili ai dati di base e valutare le forze sulla paletta

2. Forze su di un tratto curvilineo di tubazione

Un tratto di tubo di sezione uniforme contiene una curva che deflette una portata W di fluido di un angolo θ. Trascurando il peso proprio del fluido, discutere il valore delle forze che il fluido applica alla tubazione in funzione dell'angolo di deflessione.



<u>Discussione</u>

Con riferimento al bilancio macroscopico di quantità di moto

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{w}\,dV = \sum_{k=1}^{N_F}\vec{F}_k + \left(\sum_j W_j\vec{w}_j\right)_{in} - \left(\sum_j W_j\vec{w}_j\right)_{out}}$$

trattandosi di un problema stazionario si ha:

$$\sum_{k=1}^{N_F}\vec{F}_k = \left(\sum_j W_j\vec{w}_j\right)_{out} - \left(\sum_j W_j\vec{w}_j\right)_{in} \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{N_F}\vec{F}_k = W\vec{w}_{out} - W\vec{w}_{in}$$

La sommatoria delle forze include sia le forze applicate dalla tubazione al fluido che le forze di pressione sulle due superfici estreme. Si ha:

- <u>Asse x</u>:

$$p_1A - p_2A\cos\theta + F_{t\to f,x} = W(w\cos\theta - w)$$

  in cui $F_{t\to f,x}$ è la componente lungo x della forza che la tubazione applica al fluido e si è posto: $w = W/(\rho A)$; facciamo l'ulteriore ipotesi che $p_1 = p_2 = p$, trascurando le perdite di carico. Si ha:

$$pA(1-\cos\theta) + F_{t\to f,x} = Ww(\cos\theta - 1) \quad\Rightarrow\quad F_{t\to f,x} = Ww(\cos\theta-1) - pA(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{F_{t\to f,x} = (Ww + pA)(\cos\theta - 1)}$$

- <u>Asse y</u>:

$$-pA\sin\theta + F_{t\to f,y} = Ww\sin\theta$$

$$\boxed{F_{t\to f,y} = (Ww + pA)\sin\theta}$$

Le forze che il fluido applica alla tubazione sono dunque

$$\boxed{F_{f\to t,x} = -F_{t\to f,x}} \qquad \boxed{F_{f\to t,y} = -F_{t\to f,y}}$$

Si può notare che gli andamenti delle due forze in funzione dell'angolo θ sono simili a quelli riscontrati nell'esercizio precedente. In questo caso oltre che dal termine legato alla quantità di moto del fluido, la forze dipendono anche dalla pressione sulle superfici estreme dello spezzone di tubazione considerato.

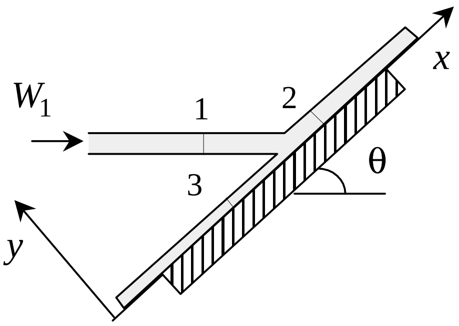
<u>Attività proposte</u>

- Per il caso $\theta = \pi/2$, $p = 550\ kPa$, $D = 0.102\ m$, Q = 3000 l/min calcolare il valore delle forze risultanti e discutere il possibile posizionamento di supporti per la tubazione in prossimità della curva.

- Discutere il ruolo delle perdite di carico nella valutazione delle forze sulla tubazione

- Svolgere nuovamente l'esercizio con valori diversi dell'area della sezione di ingresso e di quella d'uscita

3. Forza di impatto di un getto su di una piastra piana



Un getto di portata di massa W_1 ed area A_1 impatta su di una superficie inclinata di un angolo θ rispetto alla sua direzione. Trascurando i contributi della forza peso e degli attriti, valutare le componenti della forza applicata dal getto alla piastra.

Discussione

Considerato il volume di controllo tra le sezioni 1, 2 e 3 si ha

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V \rho \vec{w}\, dV = \sum_{k=1}^{N_F} \vec{F}_k + \left(\sum_j W_j \vec{w}_j \right)_{in} - \left(\sum_j W_j \vec{w}_j \right)_{out}}$$

Poiché il problema è stazionario, questa relazione si riduce ad un bilancio tra le forze applicate al fluido e la quantità di moto in ingresso ed uscita:

$$\sum_{k=1}^{N_F} \vec{F}_k = \left(\sum_{j=1}^{N_j} W_j \vec{w}_j \right)_{out} - \left(\sum_{j=1}^{N_j} W_j \vec{w}_j \right)_{in}$$

Si tratta ora di determinare le portate nelle sezioni 2 e 3. Dall'equazione di continuità, per i valori assoluti di tali portate si ha:

$$W_1 = W_2 + W_3$$

Assumendo che il fluido sia incomprimibile, si ha:

$$\rho A_1 w_1 = \rho A_2 w_2 + \rho A_3 w_3 \quad \Rightarrow \quad A_1 w_1 = A_2 w_2 + A_3 w_3$$

in cui compaiono i moduli delle velocità medie nelle tre sezioni. Inoltre trascurando i termini gravimetrici, il teorema di Bernoulli applicato tra le sezioni 1 e 2 e 1 e 3 fornisce

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho w_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho w_2^2 \qquad\qquad p_1 + \frac{1}{2}\rho w_1^2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho w_3^2$$

Poiché la pressioni nelle sezioni 1, 2 e 3 possono assumersi uguali alla pressione atmosferica (date le limitate dimensioni trasversali del getto) si ha

$$w_1 = w_2 = w_3$$

e l'equazione di continuità fornisce

$$A_1 = A_2 + A_3$$

A questo punto imponiamo il bilancio di quantità di moto lungo la piastra (asse x), tenendo conto che, in mancanza di attriti, la forza scambiata tra piastra e fluido in quella direzione sarà nulla. Si ha:

$$F_x = 0 = W_2 w_2 + W_3(-w_3) - W_1 w_1 \cos\theta = \rho A_2 w_2^2 - \rho A_3 w_3^2 - \rho A_1 w_1^2 \cos\theta$$

e quindi

$$A_2 w_1^2 - A_3 w_1^2 - A_1 w_1^2 \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 \cos\theta = A_2 - A_3$$

Combinando le due relazioni che riguardano l'area delle tre sezioni si ha:

$$A_1 = A_2 + A_3 \qquad\qquad A_1 \cos\theta = A_2 - A_3$$

$$A_2 = A_1 \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad\qquad A_3 = A_1 \frac{1-\cos\theta}{2}$$

Determinate le aree delle tre sezioni, si ha:

$$F_y = W_1 w_1 \sin\theta = \rho A_1 w_1^2 \sin\theta$$

Al solito, la forza sulla piastra è opposta quella applicata dalla piastra al fluido.

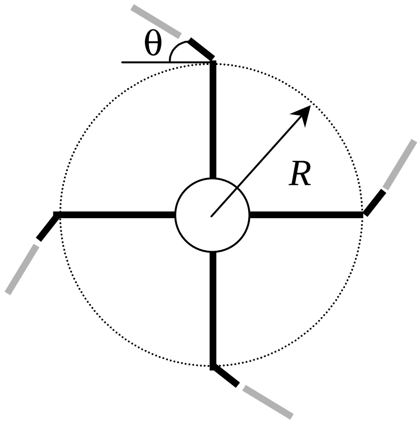
Riassumendo:

- per risolvere il problema abbiamo applicato:
  - l'equazione di continuità (conservazione della massa) che ci ha fornito una prima relazione tra le portate volumetriche in ingresso ed uscita dal volume di controllo;
  - il teorema di Bernoulli che ci ha permesso di stimare le velocità e ci ha fornito una relazione tra le aree nelle tre sezioni del volume di controllo;
  - il bilancio di quantità di moto lungo l'asse x, che ci ha fornito una ulteriore relazione tra le aree, permettendo di determinare quelle di uscita in funzione di quella del getto;
  - il bilancio di quantità di moto lungo y che ha determinato la forza applicata alla piastra lungo tale asse
- si osserva che:
  - A_2 è massima per $\theta = 0°$ e nulla per $\theta = 180°$; per A_3 accade l'inverso; per $\theta = 90°$ i due getti in cui si suddivide il getto principale hanno la stessa area: giustificare intuitivamente questi risultati
  - la forza massima sulla piastra si ha per $\theta = 90°$: giustificare intuitivamente questo risultato

Attività proposte

- Risolvere il problema nel caso in cui la piastra si muova con una velocità w_p rispetto al getto
- Considerare il caso di un getto d'acqua di 0.05 m di diametro e 10 m/s di velocità che impatta ortogonalmente su di una superficie e valutarne quantitativamente l'effetto dinamico sulla superficie stessa

4. Coppia sull'annaffiatore a bracci rotanti



Valutare la coppia resistente necessaria per mantenere l'annaffiatore a bracci rotanti in moto con velocità angolare costante, dati l'angolo θ il raggio R, la portata totale di fluido in uscita da ogni ugello, W_j, e la sezione di ogni ugello, A.

<u>Discussione</u>

In questo caso è necessario chiamare in causa il principio di conservazione del momento angolare. Poiché solo la velocità tangenziale dei quattro getti dà contributo valutiamola con riferimento alla figura.

La velocità dei getti relativa gli ugelli è

$$w_j^{rel} = \frac{W_j}{\rho A}$$

La sua componente tangenziale è allora:

$$w_{j,t}^{rel} = \frac{W_j}{\rho A} cos\,\theta$$

Se l'annaffiatore ruota con una velocità angolare costante nel tempo, ω, la velocità tangenziale assoluta del getto sarà uguale

$$w_{j,t}^{abs} = w_{j,t}^{rel} - \omega R = \frac{W_j}{\rho A} cos\,\theta - \omega R$$

La coppia resistente necessaria a mantenere il moto uniforme è quindi data dalla somma dei contributi dei 4 ugelli

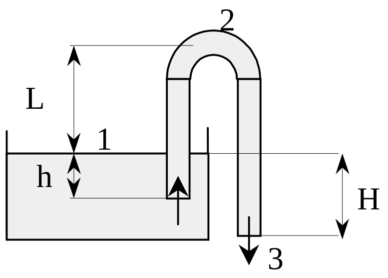
$$= 4 W_j w_{j,t}^{abs} R = 4 W_j R \left(w_{j,t}^{rel} - \omega R \right) = 4 W_j R \left[\frac{W_j}{\rho A} cos\,\theta - \omega R \right]$$

Si nota che:

- per ogni assegnato valore della velocità angolare, la differenza tra il valore della velocità tangenziale relativa dell'acqua in uscita dall'ugello determina il segno della coppia necessaria
- in particolare se $\theta = 0°$, la portata in uscita ha il massimo effetto "propellente", mentre tale effetto è nullo per $\theta = 90°$;
- per $\theta = 90°$ ed $\omega > 0$ la coppia resistente è negativa, diventa cioè la coppia motrice necessaria a mantenere in moto l'annaffiatore per moto puramente radiale.

5. Il sifone

Considerato il sifone rappresentato in figura si valuti la portata di fluido incomprimibile scaricata in funzione dei parametri geometrici del sistema e fisici del fluido.



Discussione

Consideriamo assenti gli attriti (fluido inviscido) ed assumiamo di aver inizialmente provocato una depressione sufficiente a valle del condotto tale da riempirlo di liquido.

Applichiamo il Teorema di Bernoulli tra le sezioni 1 e 3:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{w_3^2}{2g}$$

Si ha:

$$p_1 = p_3 \qquad z_1 = z_3 + H \qquad w_1 \approx 0$$

perciò

$$H = \frac{w_3^2}{2g} \qquad \Rightarrow \qquad w_3 = \sqrt{2gH}$$

La portata attraverso il sifone è quindi proporzionale alla radice quadrata del dislivello tra il pelo libero del liquido nel recipiente e la sezione di uscita del tubo.

Consideriamo ora la distribuzione della pressione nel tubo del sifone. Applicando il Teorema di Bernoulli tra la sezione ad un generico punto P nel tubo e quella di uscita, si ha:

$$z_P + \frac{p_P}{\rho g} + \frac{w_P^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{w_3^2}{2g}$$

Poiché per ogni sezione nel tubo si ha:

$$w = w_P = w_3$$

risulta

$$z_P + \frac{p_P}{\rho g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} \qquad \Rightarrow \qquad p_P = p_3 - \rho g (z_P - z_3)$$

Il valore più basso della pressione si avrà quindi nel punto più alto, cioè in 2:

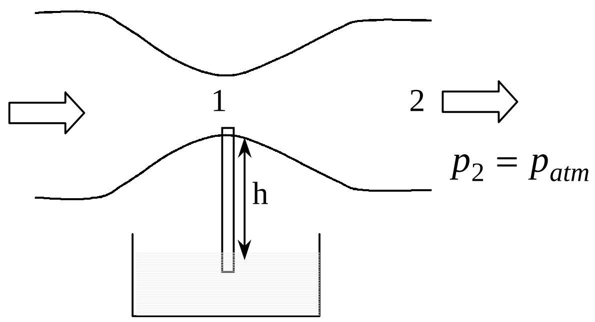
$$p_2 = p_3 - \rho g (z_2 - z_3) = p_{atm} - \rho g (L + H)$$

Attività proposte

- Discutere qualitativamente l'esercizio nel caso in cui siano presenti gli attriti
- Con riferimento ad un problema pratico, assegnare valori realistici per le dimensioni del tubo e le proprietà del fluido e calcolare numericamente la portata attraverso il sifone

6. Aspirazione di un fluido tramite un Venturi

Tramite la depressione generata nella sezione ristretta di un Venturi si vuole aspirare il fluido contenuto in un recipiente esposto alla pressione atmosferica collocato più in basso. Calcolare il valore minimo della velocità in uscita che permette l’aspirazione.



<u>Discussione</u>

Per semplicità trascuriamo ancora gli attriti ed applichiamo il Teorema di Bernoulli tra la sezione ristretta e quella di uscita. Si ha:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}$$

Essendo $z_1 = z_2$ e $p_2 = p_{atm}$, **si ottiene:**

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = p_{atm} - \frac{1}{2}\rho\left(w_1^2 - w_2^2\right)$$

D’altra parte, dall’equazione di continuità si ha:

$$w_1 A_1 = w_2 A_2 \qquad \Rightarrow \qquad w_1 = w_2 \frac{A_2}{A_1}$$

e quindi

$$p_1 = p_{atm} - \frac{1}{2}\rho w_2^2 \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1\right]$$

D’altra parte perché il fluido salga nella colonna di altezza h è necessario che

$$p_{atm} - p_1 \geq \rho g h \qquad (°)$$

Perciò

$$\frac{1}{2}\rho w_2^2 \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1\right] \geq \rho g h$$

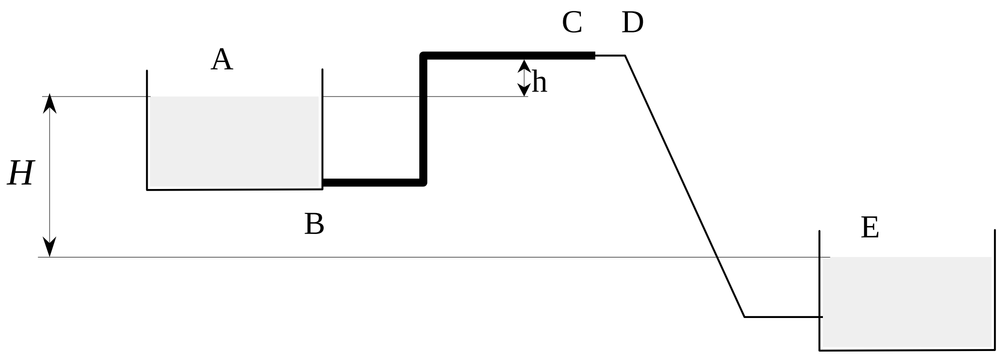
ovvero

$$w_2 \geq \sqrt{\frac{2gh}{\left[\left(A_2/A_1\right)^2 - 1\right]}}$$

<u>Attività proposte</u>

- Giustificare la relazione (°) tramite il Teorema di Bernoulli
- Assegnare valori plausibili alle grandezze in gioco e risolvere numericamente il problema

7. Flusso in una tubazione con perdite di carico



Calcolare la portata e la pressione in C per la tubazione di figura, assumendo che le perdite di carico siano distribuite come segue:

$$\text{Tratto AB: } K_{AB}\frac{w_{BC}^2}{2g} \qquad \text{Tratto BC: } K_{BC}\frac{w_{BC}^2}{2g}$$

$$\text{Tratto CD: } K_{CD}\frac{w_{CD}^2}{2g} \qquad \text{Tratto DE: } K_{DE}\frac{w_{CD}^2}{2g}$$

e che le aree dei tratti BC e CD siano A_{BC} ed A_{CD} rispettivamente.

<u>Discussione</u>

Applichiamo il teorema di Bernoulli tra la superficie A e la superficie E:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{w_A^2}{2g} = z_E + \frac{p_E}{\rho g} + \frac{w_E^2}{2g} + H_{L,AE}$$

Risulta:

$$z_A = z_E + H \qquad w_A \approx 0 \qquad w_E \approx 0 \qquad p_A = p_E = p_{atm}$$

$$H_{L,AE} = (K_{AB} + K_{BC})\frac{w_{BC}^2}{2g} + (K_{CD} + K_{DE})\frac{w_{CD}^2}{2g}$$

Perciò, si ha:

$$H = H_{L,AE}$$

ovvero

$$H = (K_{AB} + K_{BC})\frac{w_{BC}^2}{2g} + (K_{CD} + K_{DE})\frac{w_{CD}^2}{2g}$$

Esprimendo questa relazione in termini di portata volumetrica, si ha:

$$H = (K_{AB} + K_{BC})\frac{Q^2}{2gA_{BC}^2} + (K_{CD} + K_{DE})\frac{Q^2}{2gA_{CD}^2}$$

e quindi

$$\boxed{Q = \sqrt{\dfrac{2gH}{\dfrac{K_{AB}+K_{BC}}{A_{BC}^2}+\dfrac{K_{CD}+K_{DE}}{A_{CD}^2}}}}$$

Per valutare la pressione in C si pone

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{w_A^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{w_C^2}{2g} + H_{L,AC}$$

in cui

$$H_{L,AC} = \left(K_{AB} + K_{BC}\right)\frac{w_{BC}^2}{2g} = \left(K_{AB} + K_{BC}\right)\frac{Q^2}{2gA_{BC}^2}$$

Si ha inoltre:

$$z_C = z_A + h \qquad p_A = p_{atm} \qquad w_A \approx 0 \qquad w_C = w_{BC} = \frac{Q}{A_{BC}}$$

Perciò:

$$\frac{p_{atm}}{\rho g} = h + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{Q^2}{2gA_{BC}^2} + \left(K_{AB} + K_{BC}\right)\frac{Q^2}{2gA_{BC}^2}$$

e quindi

$$\boxed{p_C = p_{atm} - \rho g h - \left(1 + K_{AB} + K_{BC}\right)\frac{\rho Q^2}{2A_{BC}^2}}$$

<u>Attività proposte</u>

- Discutere il significato dei termini che compaiono nella formula ottenuta per p_C.
- Assegnare valori ragionevoli per le variabili geometriche, le proprietà del fluido e le perdite di carico e risolvere numericamente il problema.
- Modificare arbitrariamente la linea della tubazione mantenendo fisso il punto C e ripetere l'esercizio discutendo le possibili differenze con il caso precedente.