



UNIVERSITÀ DI PISA

Appunti di lezione per il corso di
Termofluidodinamica ed Elementi di CFD
III° Anno di Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Part I – Elementi di Termofluidodinamica

Prof. Walter AMBROSINI

E-mail: walter.ambrosini@ing.unipi.it

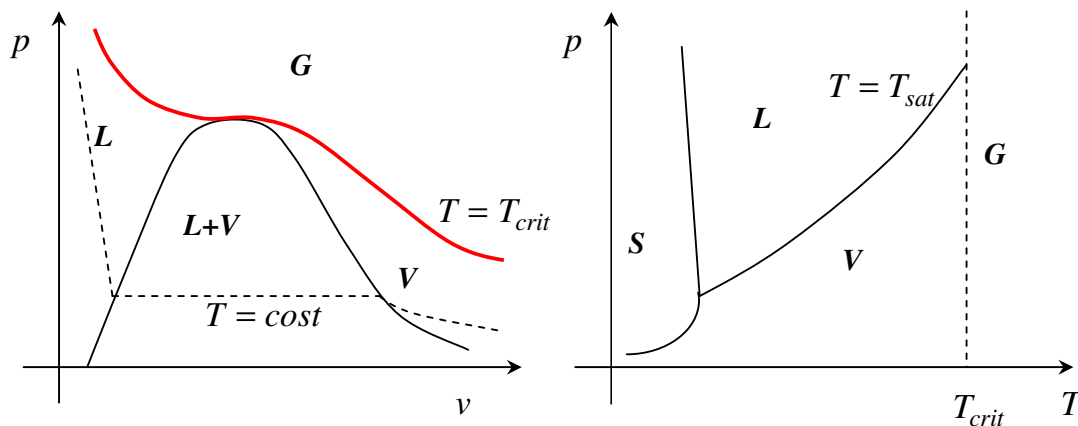
Anno Accademico 2010-2011

Generalità sui Fluidi ed il loro Comportamento Dinamico

1. Definizioni di base relative ai fluidi

FLUIDO:

- *non resiste a sforzi di taglio se non in moto*
- *non ha forma propria*
 - ◆ **ha** volume proprio \Rightarrow *liquido* (nell'ipotesi di l. incompressibile)
 - ◆ **non ha** volume proprio \Rightarrow *aeriforme*
 - al di sotto della $T_{crit} \Rightarrow$ *vapore* (**può** essere liquefatto per semplice compressione)
 - al di sopra della $T_{crit} \Rightarrow$ *gas* (**non può** essere liquefatto per compressione)



Per H_2O $T_{crit} = 647 \text{ K} \equiv 374 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_{crit} = 22.1 \text{ MPa}$. Per $T = T_{crit}$ si ha che $v_{l,sat}(T_{crit}) = v_{v,sat}(T_{crit})$, $h_{l,sat}(T_{crit}) = h_{v,sat}(T_{crit})$, ecc.

- **La Termofluidodinamica ha come oggetto i processi termici e dinamici che riguardano i fluidi**

Variabili in gioco: $p =$ pressione, $T =$ temperatura, $\vec{w} =$ velocità (o equivalenti)

2. Modelli Matematici per la Descrizione dei Fluidi

Dalla Fisica Generale sappiamo che nella Meccanica del punto materiale:

- *un punto è caratterizzato dalla sua “legge oraria” $\vec{r} = \vec{r}(t)$ e dalla sua massa*
- *sistemi di punti materiali sono caratterizzati dalle “leggi orarie” dei vari punti e dalle relative masse*

Nella Meccanica dei Fluidi:

- **si hanno particelle più o meno intimamente interagenti**
- **se il libero cammino medio delle particelle (molecole) è molto inferiore in confronto alle dimensioni in gioco si fa l’ipotesi che il fluido costituisca un mezzo CONTINUO**
- **questa ipotesi consente di scrivere equazioni di bilancio che rappresentano bilanci macroscopici o microscopici su regioni contenenti un mezzo continuo**

Anche nella Meccanica dei Fluidi si possono definire grandezze cinematiche locali quali la posizione, la velocità e l’accelerazione:

- **PUNTO DI VISTA EULERIANO (o spaziale o locale)**
fissato un punto nello spazio, \vec{r} , si valutano la velocità, l’accelerazione e tutte le altre proprietà in quel punto
- **PUNTO DI VISTA LAGRANGIANO (o sostanziale o materiale)**
si considera la particella che occupa inizialmente una certa posizione, $\vec{r}_p(0) = \vec{r}_0$, e la si segue nel suo moto considerando la variazione delle sue proprietà (velocità, accelerazione, temperatura, ecc.)

Nel caso di “gas rarefatti” o condotti molto piccoli l’ipotesi del continuo non è applicabile: i liberi cammini medi delle molecole sono dello stesso ordine di grandezza delle lunghezze in gioco

$$N_{Knudsen} = \frac{\text{libero cammino medio}}{\text{lunghezze in gioco nel problema}}$$

Per quanto riguarda le variabili indipendenti nei problemi di fluidodinamica in cui vale l’ipotesi del continuo, si ha

- **in assenza di fenomeni termici, le variabili da considerare sono le tre componenti della velocità: w_x, w_y, w_z , la pressione e le proprietà (generalmente costanti) del fluido (densità, viscosità, ecc.)**
- **quando i fenomeni termici sono importanti, si deve poter definire lo stato termodinamico del fluido in ogni punto: ad es., p, T, w_x, w_y, w_z possono essere scelte come variabili indipendenti e devono essere assegnate opportune “relazioni di stato” per definire le altre variabili termodinamiche e relazioni per valutare le proprietà termofisiche (viscosità, conducibilità, tensione superficiale)**

Per un sistema in equilibrio termodinamico vale la legge di Gibbs che specifica il numero di variabili termodinamiche da assegnare per definire univocamente lo stato termodinamico di una sostanza

$$V = C - F + 2$$

V = numero di variabili, C = numero dei componenti chimici, F = numero di fasi

Esempi rilevanti:

- **Fluido monofase monocomponente:** $C = 1, F = 1, \Rightarrow V = 2$
ad es. $\rho = \rho(p, T)$
- **Fluido bifase monocomponente in equilibrio termico** ($T_l = T_v$):
 $C = 1, F = 2, \Rightarrow V = 1$; **infatti:** $p = p_{sat}(T)$ o $T = T_{sat}(p)$, **per cui:**
 $\rho_l = \rho_{l,sat}(p) \equiv \rho_{l,sat}(T)$ e $\rho_v = \rho_{v,sat}(p) \equiv \rho_{v,sat}(T)$. **Si noti che per definire i valori “medi” delle proprietà intensive per la miscela c’è invece bisogno di una informazione aggiuntiva sulla “estensione” relativa di liquido e vapore: ad es.**
 $\rho_m = \rho_m(p, \alpha) = (1 - \alpha)\rho_{l,sat}(p) + \alpha\rho_{g,sat}(p)$
- **Fluido bifase monocomponente con temperature e pressioni diverse per ciascuna fase** ($p_l \neq p_v$ e $T_l \neq T_v$): **si deve assegnare una coppia di variabili per ogni fase: si applica la regola delle fasi a ciascuna fase. Ad es.:** $\rho_l = \rho_l(p_l, T_l)$ e $\rho_v = \rho_v(p_v, T_v)$. **Come nel caso precedente, si deve aggiungere una informazione sulle quantità dell’una e dell’altra fase presenti; ad es.:** α o x .
- **Fluido bifase con temperature e pressioni diverse per ciascuna fase** ($p_l \neq p_g$ e $T_l \neq T_v$) **e noncondensabile in fase gas con pressione parziale** p_n ; **si ha:**

$$\rho_l = \rho_l(p_l, T_l) \quad \rho_g = \rho_v(p_v, T_g) + \rho_n(p_n, T_g)$$

$$p_g = p_v + p_n$$

l’aeriforme è una miscela daltoniana

La relazione di stato per un fluido monofase può essere data nella forma

$$\rho = \rho(p, T)$$

Della precedente è possibile avere casi particolari:

- **fluido barotropico (la temperatura varia poco):** $\rho = \rho(p)$
- **fluido con densità non dipendente dalla pressione:** $\rho = \rho(T)$
- **fluido incomprimibile:** $\rho = \text{cost}$
- **fluido di Boussinesq:** è considerato incomprimibile a tutti gli effetti tranne che per ciò che riguarda il galleggiamento dovuto alle differenze di temperatura:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$$

in cui T_0 è una temperatura di riferimento, ρ_0 la densità corrispondente ed è

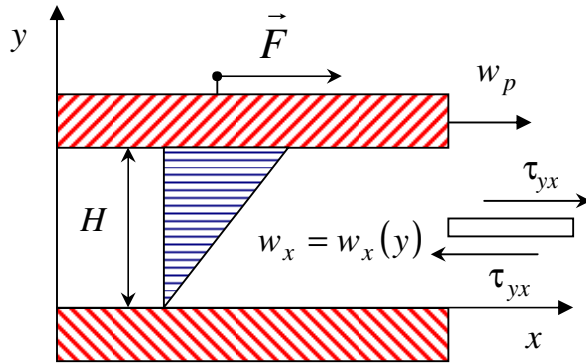
$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \text{coefficiente di espansione termica isobaro}$$

3. Variabili Rilevanti

- **Pressione**

a) In un fluido in quiete è la forza normale di compressione agente per unità di superficie

- **nei fluidi in quiete la pressione è isotropa e viene detta *idrostatica***
- **nei fluidi in moto, nascono sforzi tangenziali, e anche lo sforzo normale non coincide esattamente con la pressione a causa di sforzi viscosi normali**



Moto Piano di Couette

• Viscosità

Considerato il fluido in moto laminare tra due piastre piane, si ha che per mantenere la piastra superiore in moto uniforme è necessario applicare una forza \vec{F} data da

$$|\vec{F}| = A\mu \frac{w_p}{H} \Rightarrow \frac{|\vec{F}|}{A} = \mu \frac{w_p}{H}$$

In termini locali, si pone una relazione di proporzionalità diretta (lineare) tra sforzo di taglio e gradiente di velocità

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dw_x}{dy} \quad (\text{legge di Newton della viscosità})$$

Def.: I fluidi i quali, in moto laminare, si comportano in questo modo vengono detti newtoniani (altrimenti, si dicono non-newtoniani)

I gas e i liquidi più comuni sono newtoniani. Le paste ed alcuni alti polimeri sono non-newtoniani

La costante di proporzionalità nella legge di Newton, μ è detta *viscosità dinamica* (o semplicemente viscosità); si ha:

$$\mu = \left[\frac{kg}{m \cdot s} \right] = [Pa \cdot s] = \left[10 \frac{g}{cm \cdot s} = 10 \text{ poise} \right]$$

➤ ordine di grandezza per acqua a T ambiente $\approx 10^{-3} \text{ kg l/(ms)}$

➤ ordine di grandezza per aria a T amb. e P atm. $\approx 2 \times 10^{-5} \text{ kg l/(ms)}$

Spesso in luogo di μ si usa la *viscosità cinematica* detta anche *diffusività molecolare della quantità di moto*

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

essa traduce la capacità dei fluidi di scambiare quantità di moto ed ha un ruolo analogo a quello che la *diffusività termica* ha per lo scambio termico

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

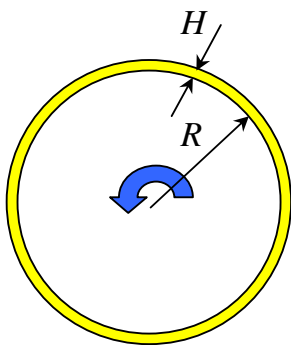
Generalmente si ha che:

- *nei liquidi*: μ diminuisce al crescere della temperatura
- *negli aeriformi*: μ cresce al crescere della temperatura

Ciò accade per il diverso meccanismo di trasporto della q . di moto

- *nei liquidi*: il trasporto avviene principalmente per gli urti tra le molecole
- *negli aeriformi*: il trasporto avviene principalmente a causa dello spostamento di molecole in volo libero

La viscosità può essere valutata, ad esempio, misurando il momento resistente agente su due cilindri concentrici, in rotazione l'uno rispetto all'altro, separati da uno strato del fluido in oggetto



Se $H \ll R$ le superfici cilindriche possono essere trattate come se fossero piane:

$$\tau = \mu \frac{w_{periferica}}{H} = \mu \frac{\omega R}{H}$$

La forza tangenziale totale è quindi

$$F = \tau \cdot 2\pi R \cdot L_{assiale} = \mu \frac{\omega R}{H} 2\pi R \cdot L_{assiale}$$

La coppia resistente agente sul cilindro interno quando esso è in moto è quindi data da:

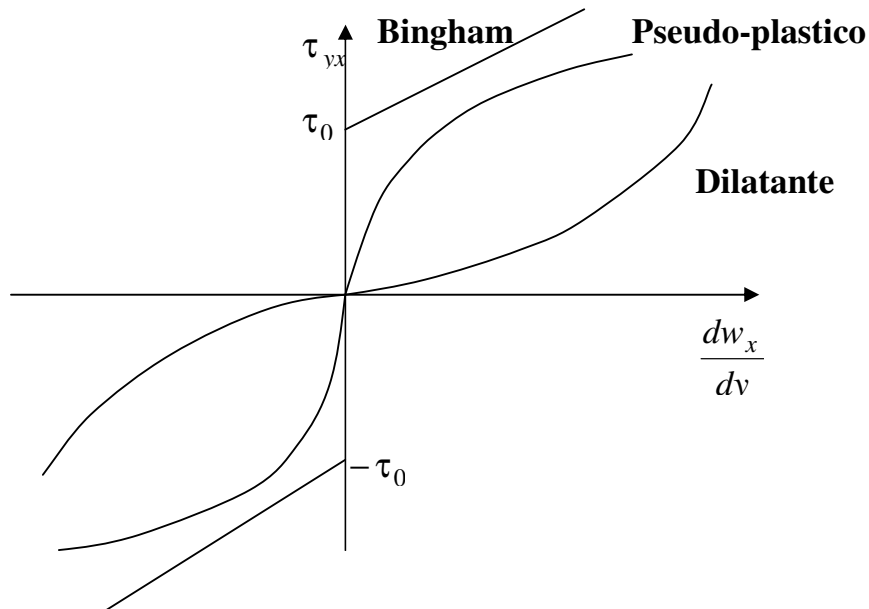
$$|\vec{M}| = FR = \mu 2\pi \frac{\omega R^3}{H} L_{assiale}$$

da cui

$$\mu = \frac{|\vec{M}| H}{2\pi \omega R^3 L_{assiale}}$$

Lo studio dei fluidi non-newtoniani fa parte della *reologia*

Per questi fluidi non vi è una relazione lineare tra sforzi di taglio e derivate della velocità



Si pone:

$$\tau_{yx} = \eta \frac{dw_x}{dy}$$

- **Si hanno diversi tipi di comportamento:**
 - ◆ η cresce con τ_{yx} : *comportamento dilatante*
 - ◆ η decresce con τ_{yx} : *comportamento pseudoplastico*
- **Sono stati sviluppati diversi modelli a due parametri:**
 - ◆ *modello di Bingham:*

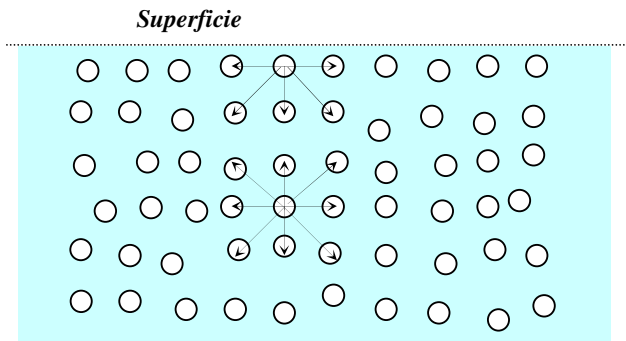
$$\tau_{yx} = \mu_0 \frac{dw_x}{dy} \pm \tau_0 \quad \left| \tau_{yx} \right| > \tau_0$$

$$\frac{dw_x}{dy} = 0 \quad \left| \tau_{yx} \right| \leq \tau_0$$

alcune vernici si comportano in questo modo

- **Tensione Superficiale**

Essa è dovuta alle forze che si scambiano reciprocamente le molecole; infatti, tali forze si fanno equilibrio all'interno del fluido, ma in vicinanza della superficie danno luogo ad una risultante diretta verso l'interno.



La tensione superficiale può essere definita come una forza per unità di lunghezza o una energia per unità di area

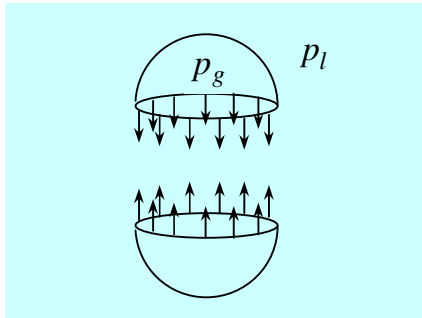
$$\sigma = \left[\frac{N}{m} \right] = \left[\frac{N \cdot m}{m^2} \right] = \left[\frac{J}{m^2} \right]$$

Nel primo caso essa rappresenta la tensione operante sull'unità di lunghezza della curva ottenuta tagliando l'interfaccia per mezzo di un'altra superficie (ad es., un piano)

Nel secondo caso, essa rappresenta l'energia che deve essere spesa per estendere l'area dell'interfaccia di un'unità di superficie (ad es., per aumentare il volume di una bolla o di una membrana).

La tensione superficiale ha notevole importanza nel caso di interfacce liquido-vapore, liquido-aria o liquido-solido, poiché provoca alcuni fenomeni interessanti.

➤ *La pressione in una bolla è maggiore di quella nel liquido esterno;*



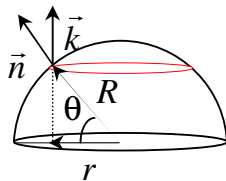
infatti considerando l'equilibrio di ogni metà di una bolla sferica (v. figura) si ha:

$$\underbrace{\sigma 2\pi R}_{\text{forza dovuta alla tensione superficiale}} = \underbrace{(p_g - p_l)\pi R^2}_{\text{risultante delle forze di pressione lungo la verticale}}$$

e quindi

$$p_g = p_l + \frac{2\sigma}{R}$$

Nella precedente il valore della forza verticale risultante dalla differenza di pressione tra interno ed esterno della bolla è stato ottenuto tramite le seguenti relazioni:



$$F_{\Delta p} = \int_S (p_g - p_l) \vec{n} \cdot \vec{k} dS$$

in cui

$$dS = 2\pi r R d\theta \quad r = R \cos \theta$$

e quindi

$$dS = 2\pi R^2 \cos \theta d\theta$$

D'altra parte è

$$\vec{n} \cdot \vec{k} = \sin \theta$$

e quindi

$$F_{\Delta p} = \int_S (p_g - p_l) \vec{n} \cdot \vec{k} dS = (p_g - p_l) \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

da cui

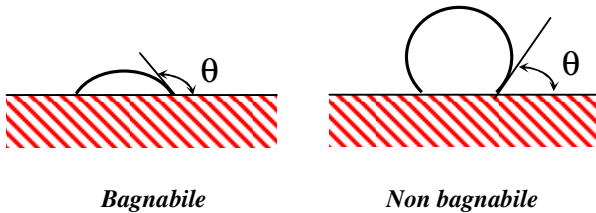
$$F_{\Delta p} = (p_g - p_l) 2\pi R^2 \int_0^1 \sin \theta d(\sin \theta) = (p_g - p_l) 2\pi R^2 \int_0^1 x dx = (p_g - p_l) \pi R^2$$

Si nota quindi che la forza risultante dalla differenza di pressione nella direzione del versore \vec{k} è pari al prodotto di tale differenza per la proiezione dell'area su cui insiste su di un piano normale al versore

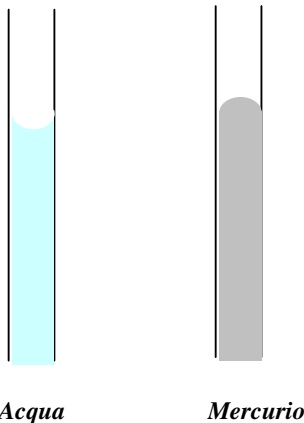
Per gocce di liquido in un gas si possono fare considerazioni analoghe.

➤ *Fenomeni di bagnabilità* si presentano quando liquidi sono in contatto con superfici solide ed altri fluidi (ad es., aria)

Questi fenomeni sono legati ai valori relativi delle energie superficiali



Un solido può essere considerato *bagnabile* o *non bagnabile* da un particolare liquido a seconda che l'angolo di contatto della superficie liquida con quella solida sia superiore o inferiore a 90°

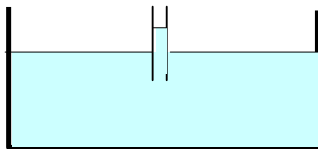


Acqua Mercurio
Menischi in tubi di vetro

La formazione di *menischi*, cioè di superfici libere incurvate, all'interno di tubi verticali contenenti un liquido è determinata da questi fenomeni e si incontra nei *manometri*

La formazione del menisco sulla superficie può avere notevole *importanza se il diametro del tubo è molto piccolo*

In questo caso, infatti, la forma della superficie (concava o convessa) può determinare una salita o una discesa del liquido rispetto al livello atteso, ad esempio, sulla base del principio dei "vasi comunicanti" (*capillarità*)



In particolare, se il tubo viene bagnato il fluido "sale", in caso contrario esso "scende"

4. Tipi di Moto di un Fluido

Alcuni tipi di moto considerati nella Fluidodinamica fanno riferimento a regimi di realmente osservati o a schematizzazioni convenienti dal punto di vista della modellizzazione

Moto Laminare e Moto Turbolento

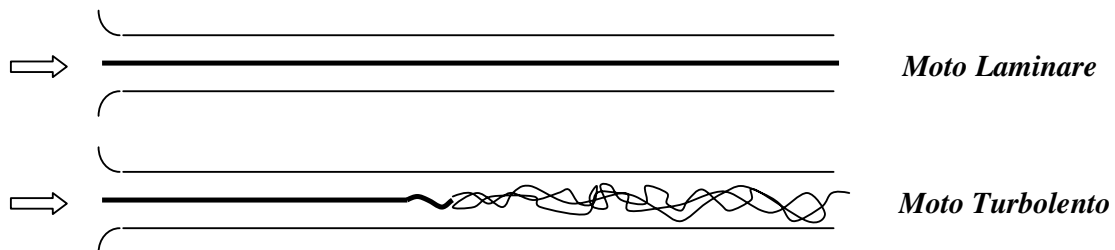
- **A velocità relativamente bassa il moto in un fluido avviene in modo “ordinato”, in “lamine” parallele che non si mescolano tra loro a livello macroscopico:**

questo è il regime di MOTO LAMINARE

- **Aumentando la velocità si presentano instabilità del moto che conducono a fluttuazioni caotiche della velocità ed hanno come risultato il mescolamento di filetti adiacenti:**

questo è il regime di MOTO TURBOLENTO

- **La transizione tra moto laminare e moto turbolento avviene quando le forze viscosi sono abbastanza più deboli di quelle di inerzia**
- **Osborne Reynolds (1842-1912) mostrò l'esistenza di questa transizione utilizzando un tubo di vetro in cui si poteva forzare una portata d'acqua variabile, mentre un apposito dispositivo provvedeva ad iniettare un sottile filamento di inchiostro; la transizione veniva evidenziata dalla dispersione del filamento**



- **La transizione tra moto laminare e turbolento può essere messa in relazione con la velocità, la viscosità e la densità del fluido ed il diametro del tubo.**

- Il parametro che regola la transizione è il *numero di Reynolds*

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D}{\mu}$$

in cui \bar{w} è la velocità media sulla sezione trasversale del condotto.

- I valori del numero di Reynolds a cui si ha la transizione sono compresi tra 2100 e 10^4 . Generalmente per $Re > 4000$ il moto si può considerare turbolento, mentre per $Re < 2000$ laminare

Moto Compressibile e Incompressibile

- Tutti i fluidi sono dotati di una certa *compressibilità* :
 - i gas e i vapori sono facilmente compressibili, cioè la variazione del loro volume è relativamente grande anche per variazioni modeste della pressione
 - i liquidi sono meno facilmente compressibili ma, nondimeno, il loro volume varia in funzione della pressione
- Una misura della compressibilità di un fluido è la variabile

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

che prende il nome di *compressibilità isoterma*

- Per un gas perfetto si ha:

$$pv = RT \quad \Rightarrow \quad v = \frac{RT}{p} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = - \frac{RT}{p^2}$$

$$\kappa = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{v} \frac{RT}{p^2} = \frac{1}{v} \frac{RT}{p} \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

perciò a pressione atmosferica si ha

$$\kappa \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$$

- Per l'acqua a temperatura ambiente e pressione atmosferica si ha

$$\kappa \approx 4.5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

- Ciononostante, anche gli aeriformi possono essere considerati incompressibili quando:
 - non ci siano variazioni spaziali o temporali elevate della pressione e della temperatura
 - quando la velocità sia sufficientemente inferiore a quella del suono (ad es., $w < 0.2 \div 0.3 w_{suono}$)
- Qualche volta al posto della compressibilità isoterma si considera il suo reciproco, detto *modulo di elasticità di volume*

Moto Subsonico e Supersonico

- La *velocità del suono* rappresenta la velocità con cui in un fluido si propagano le perturbazioni di pressione
- Essa è quindi un parametro importante che condiziona alcune proprietà dinamiche del moto
- Un numero adimensionale importante è quindi il numero di Mach.

$$M = \frac{w}{w_{suono}}$$

Si ha:

- *moto subsonico*, se $M < 1$
- *moto supersonico*, se $M > 1$,
- *moto transonico*, se è $M < 1$ ed $M > 1$ in zone diverse di un determinato sistema
- Per l'aria in condizioni normali si ha: $w_{suono} \approx 330 \text{ m/s}$ ovvero $w_{suono} \approx 1200 \text{ km/h}$

Moto Permanente o Transitorio

- *Moto Permanente*

Le variabili che caratterizzano il moto non variano nel tempo anche se possono variare da punto a punto

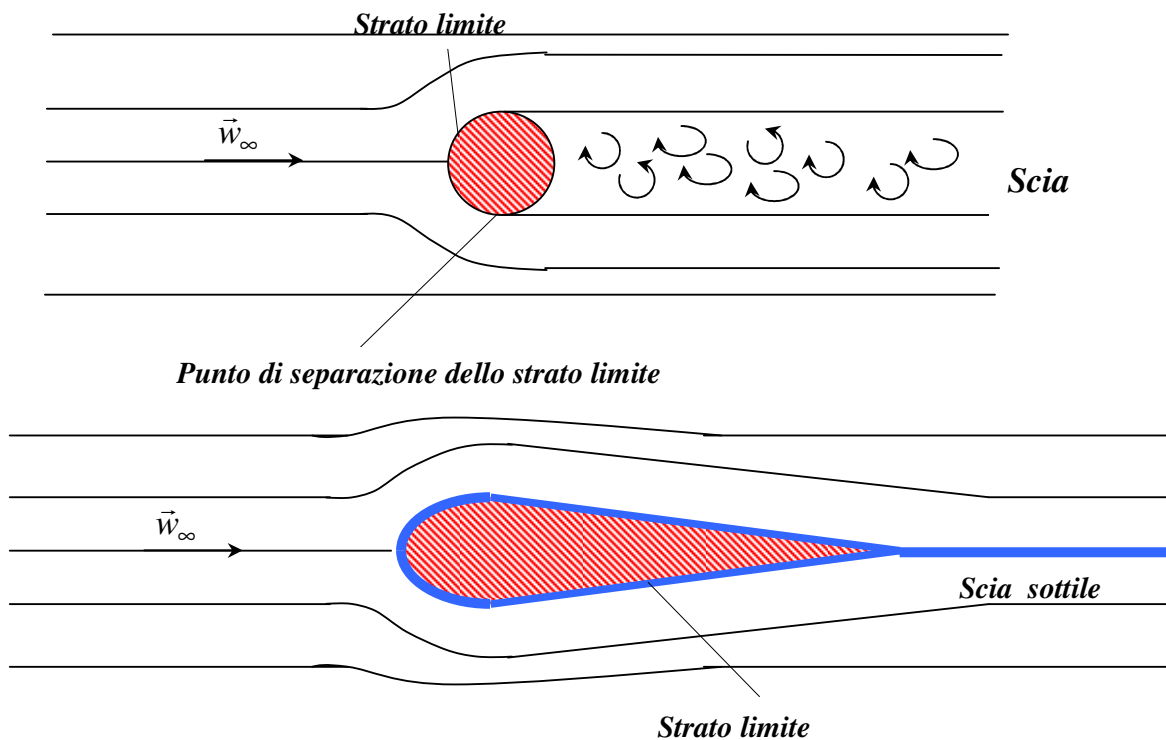
- *Moto Transitorio* (si hanno variazioni temporali)

Moto Esterno e Moto Interno

- **Moto Esterno**

Si tratta del moto sulla superficie esterna di un oggetto. Si possono distinguere tre regioni:

- una zona lontana dalla superficie in cui gli effetti dell'attrito sono trascurabili
- una zona vicina al corpo (*strato limite*), che può essere laminare o turbolenta, in cui si hanno considerevoli variazioni della velocità rispetto alla corrente libera
- una zona retrostante al corpo (*scia*) in cui si ha spesso elevata turbolenza e bassa pressione, tranne nel caso di corpi affusolati o basse velocità



- **Moto Interno**

Questo tipo di moto riguarda il flusso in condotti e tubi. In questo caso lo strato limite si ispessisce lungo il condotto e viene ad occupare l'intera sezione.

Modelli Matematici per il Moto di Fluidi

5. Leggi fondamentali per l'analisi della dinamica dei fluidi

L'esperienza mostra che i principi cui si richiamano le equazioni da applicare per risolvere i problemi di dinamica dei fluidi fanno capo a note leggi fondamentali della natura:

- *Conservazione della massa*

La massa non può essere creata né distrutta, ma solo trasportata.

- *Leggi della dinamica*

- Principio di inerzia: un corpo resta in quiete o in moto rettilineo uniforme fino a quando forze esterne non ne modificano lo stato
- 2^a legge della dinamica o (meglio) il principio di conservazione della quantità di moto:

$$\vec{F} = M \frac{d\vec{w}}{dt} \quad \text{o} \quad \vec{F} = \frac{d(M\vec{w})}{dt}$$

- Principio di azione e reazione: ad ogni forza (azione) corrisponde una reazione uguale ed opposta.
- *Principi della termodinamica*
 - Primo principio: l'energia non può né essere creata né distrutta, ma solo trasportata, trasformata o immagazzinata.

$$\delta Q = dU + \delta L$$

- Secondo principio:

In un senso generale, questo principio afferma che, nonostante l'energia non si crei né si distrugga, essa tende a *degradarsi* da forme più elevate (energia cinetica o potenziale) a forme meno elevate (calore ed energia interna a basse temperature).

Sono inoltre necessarie equazioni aggiuntive per "chiudere" il problema:

- *Equazioni di stato*

Esse sono necessarie per definire le relazioni tra le varie proprietà di un fluido dato un numero minimo di variabili (ad es., due)

$$\rho = \rho(p, T) \quad s = s(p, T)$$

- *Equazioni costitutive*

Sono necessarie per definire variabili aggiuntive chiamate in causa dalle equazioni di bilancio, quali ad es., gli sforzi viscosi e i flussi termici che non possono essere direttamente determinate sulla base delle variabili indipendenti

A questo proposito è bene distinguere tra:

- Proprietà estensive ed intensive

a) *Estensive*: il loro valore dipende dall'estensione (in massa o volume) e sono *additive*

Ad es.: $U, H, S, E, E_p, E_c, V, M$

e dato un sistema $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \Sigma_i$ si ha $M_{tot} = \sum_i M_i$, $E_{tot} = \sum_i E_i$, ecc.

b) *Intensive*: il loro valore non dipende dall'estensione ma esprime, in genere, una proprietà locale

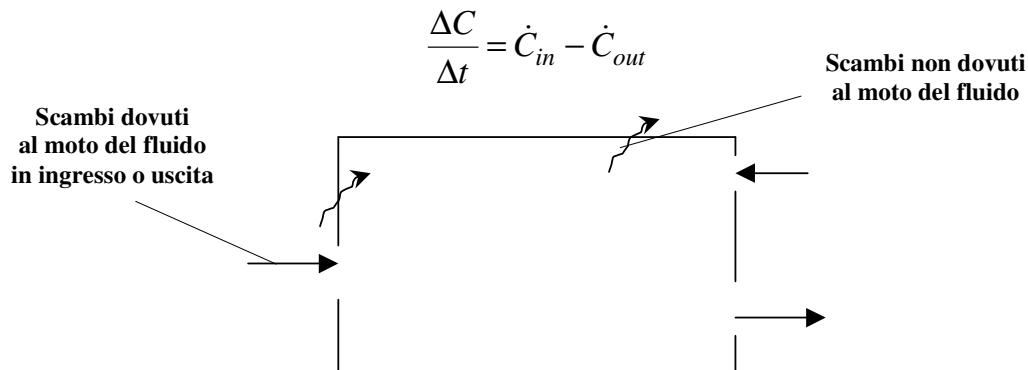
Ad es.: p, T, \bar{w} e i valori specifici delle proprietà estensive

$u, h, s, e, e_p, e_c, v, \rho$ e dato un sistema $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \Sigma_i$ si ha, in generale,

$T_{tot} \neq \sum_i T_i$, $p_{tot} \neq \sum_i p_i$, ecc.

6. Generalità sulle equazioni di bilancio della fluidodinamica

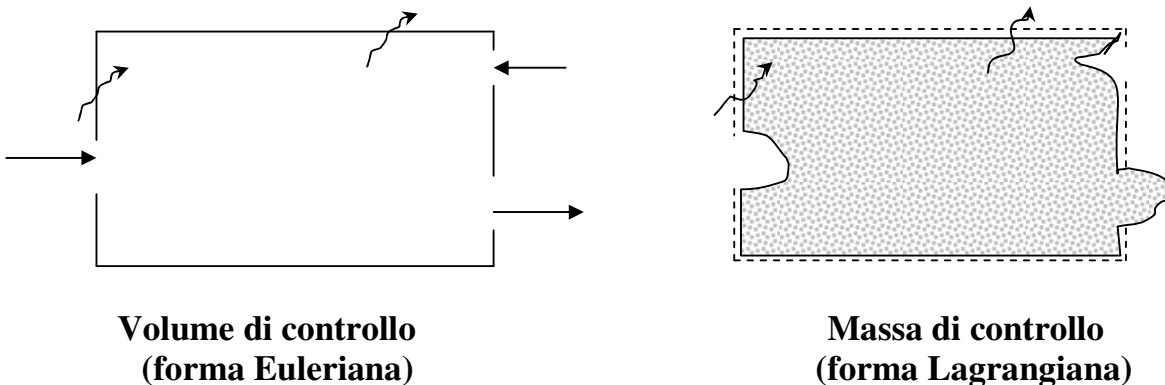
- Sono basate sul *concetto di bilancio*, che si applica alle proprietà estensive di sistemi, in generale, *aperti* cioè che consentono scambi di massa ed energia



Ciascuno dei principi fondamentali della fisica può essere espresso in forma di bilancio per ottenere una corrispondente equazione.

Si possono avere:

- *Equazioni per volumi o masse di controllo finiti (Integrali)*



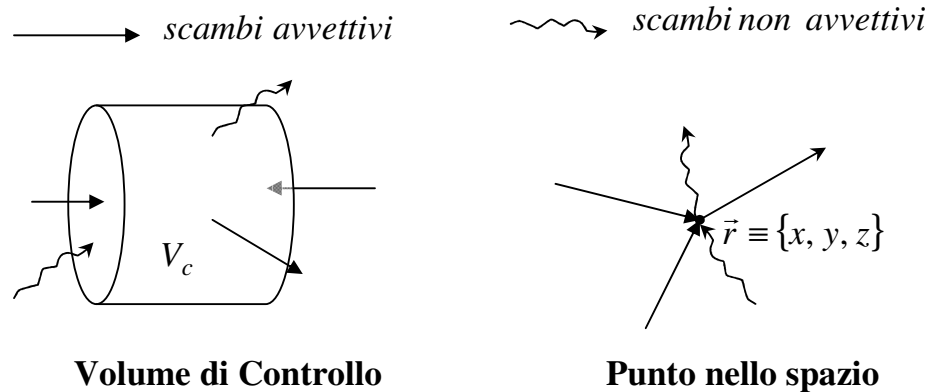
- *Equazioni Differenziali*

- ◆ Si tratta di relazioni *locali* ed *istantanee*, anche se ottenute come limite di bilanci su volumi (o masse) finiti che spesso richiedono una soluzione numerica (basata su volumi o masse finite)

Nello scrivere le equazioni è possibile adottare due diversi punti di vista:

◆ *Punto di vista EULERIANO (o spaziale o locale)*

Si fa riferimento ad un *volume di controllo* o ad un *punto nello spazio* $\vec{r} \equiv \{x, y, z\}$ per scrivere equazioni (integrali o differenziali rispettivamente) che riguardano il fluido ad essi associato



Nelle equazioni di bilancio, in questo caso, compaiono esplicitamente termini legati sia a scambi *avvettivi* (coinvolgenti scambio di fluido) che *non avvettivi*.

Per la generica variabile intensiva c si ha

$$c = c\{x, y, z, t\}$$

e la sua derivata temporale è semplicemente la derivata parziale

$$\frac{\partial c}{\partial t}$$

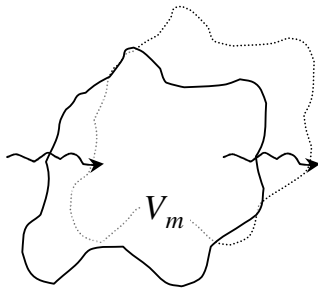
Esempio:

Il bilancio termico di una stanza con porte e finestre rappresenta una forma euleriana di bilancio di energia, perché è scritto facendo riferimento ad un volume ben definito.

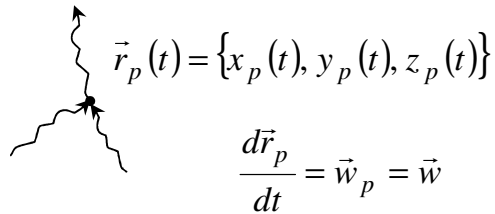
◆ **Punto di vista LAGRANGIANO (o materiale o sostanziale)**

Si fa riferimento ad una *massa di controllo* o ad una *particella materiale di fluido* (che si muovono quindi con la velocità del fluido rispetto al sistema di riferimento) per le quali si scrivono equazioni (integrali o differenziali rispettivamente) che riguardano il fluido ad esse associato

~~~~~ → scambi non avvettivi



**Massa di Controllo**



**Particella**

Le equazioni in questo caso non coinvolgono esplicitamente termini legati a scambi avvettivi, perché gli scambi di fluido con l'esterno sono per definizione nulli.

**Risulta:**

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{w}_p = \vec{w} = \text{velocità del fluido}$$

**Per la generica variabile intensiva  $c[x_p(t), y_p(t), z_p(t), t]$  si ha:**

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \dot{x}_p \frac{\partial c}{\partial x} + \dot{y}_p \frac{\partial c}{\partial y} + \dot{z}_p \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla c$$

dove  $Dc/Dt$  è detta *derivata lagrangiana*.

### Esempio:

**Il bilancio di energia su di una massa di fluido (ad es., 1 kg) che percorre un condotto rappresenta una forma lagrangiana di bilancio.**

**Si ha anche un punto di vista “generale” di cui quelli visti sono casi particolari  $\vec{r}_{obs}(t) = \{x_{obs}(t), y_{obs}(t), z_{obs}(t)\}$  (obs=osservatore generico)**

### Esempio riassuntivo:

- **Monitorare la concentrazione di pesci nel tempo in diversi punti di un corso d'acqua (ad esempio da diversi pontili) traduce *un punto di vista euleriano*: si può ottenere una mappatura di valori di concentrazione in  $n$  punti ad  $m$  istanti temporali**

$$\begin{aligned} c_1(t_1) = c(x_1, y_1, z_1, t_1) & \quad \dots \quad c_n(t_1) = c(x_n, y_n, z_n, t_1) \\ & \quad \dots \\ c_1(t_m) = c(x_1, y_1, z_1, t_m) & \quad \dots \quad c_n(t_m) = c(x_n, y_n, z_n, t_m) \end{aligned}$$

- **Monitorare la concentrazione dei pesci nel tempo a bordo di una barca che viene trasportata dalla corrente d'acqua senza scorrimento relativo traduce *un punto di vista lagrangiano*: si può ottenere un insieme di valori ad  $m$  istanti temporali**

$$c(t_1) = c[x_p(t_1), y_p(t_1), z_p(t_1), t_1] \quad \dots \quad c(t_m) = c[x_p(t_m), y_p(t_m), z_p(t_m), t_m]$$

- **Monitorare la concentrazione dei pesci nel tempo a bordo di una barca a motore che segue un percorso arbitrario traduce *un punto di vista generale*: si può ottenere un insieme di valori ad  $m$  istanti temporali**

$$c(t_1) = c[x_{obs}(t_1), y_{obs}(t_1), z_{obs}(t_1), t_1] \quad \dots \quad c(t_m) = c[x_{obs}(t_m), y_{obs}(t_m), z_{obs}(t_m), t_m]$$



## 7. Equazioni di bilancio in forma integrale

- *Le equazioni di bilancio scritte in forma lagrangiana coincidono sostanzialmente con i principi di base della Fisica cui fanno riferimento*
  - si considera una massa che non varia nel tempo
  - gli scambi avvengono solo per meccanismi "non avvettivi" (senza scambio di fluido) cioè di tipo "diffusivo"
- *Le equazioni in forma euleriana possono essere ottenute da quelle in forma lagrangiana aggiungendo i termini di "flusso" attraverso le superfici delle aperture che collegano il sistema all'esterno*
  - si devono aggiungere i contributi dovuti all'ingresso e all'uscita di fluido
  - infatti, il fluido entrante o uscente trasporta con sé massa, quantità di moto, energia, ...
- *Bilancio di massa:*

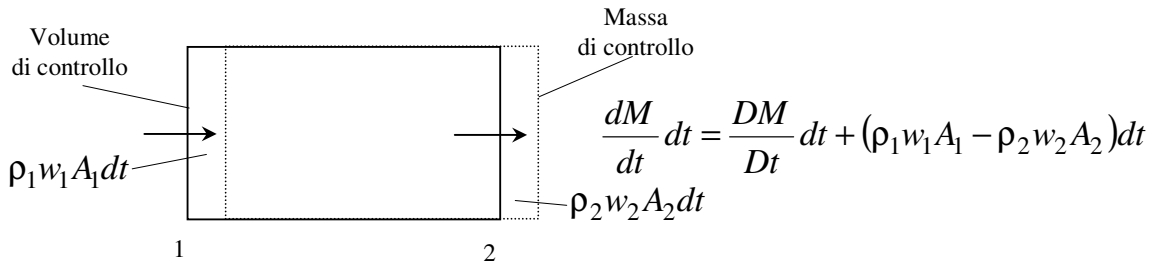
Per definizione, la massa di controllo non perde né acquista massa. Si considera un sistema aperto con  $N_j$  luci di entrata ed uscita del fluido

| Forma Lagrangiana                                                                                                                     | Forma Euleriana                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\boxed{\frac{DM}{Dt} = 0}$ <p>Con <math>D/Dt</math> intendiamo la derivata sulla "massa di controllo" <math>(d/dt)_{m.c.}</math></p> | $\frac{dM}{dt} = \frac{DM}{Dt} - \int_S \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS$ $\int_S \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS = - \sum_{j=1}^{N_j} W_j$ <p>(assumiamo <math>W_j &gt; 0</math> se entrante)</p> $\boxed{\frac{dM}{dt} = \sum_{j=1}^{N_j} W_j}$ |

Il termine  $\int_S \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS$  rappresenta il netto dei contributi in uscita della massa. Scritto per  $N_j$  luci di comunicazione con l'esterno viene espresso come somma di portate.

Per un sistema continuo si ha:

$$\boxed{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS = 0}$$

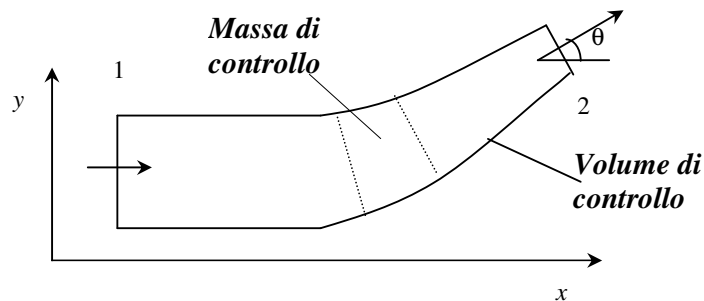


- **Bilancio di quantità di moto**

Per la massa di controllo, l'equazione si riduce alla 2<sup>a</sup> Legge della Dinamica

| Forma Lagrangiana                                                             | Forma Euleriana                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{D(M\vec{w})}{Dt} = M \frac{D\vec{w}}{Dt} = \sum_{k=1}^{N_F} \vec{F}_k$ | $\frac{d(M\vec{w})}{dt} = \frac{D(M\vec{w})}{Dt} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \vec{w}_j$     |
|                                                                               | $\frac{d(M\vec{w})}{dt} = \sum_{k=1}^{N_F} \vec{F}_k + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \vec{w}_j$ |

**Esempio: Fluido in un condotto curvo in moto stazionario**



Da un punto di vista euleriano, si ha:

$$\sum_{k=1}^{N_F} \vec{F}_k + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \vec{w}_j = 0$$

Questa relazione esprime che, non variando la quantità di moto nel tempo, forze e contributi in entrata ed uscita si devono fare equilibrio.

Le forze in gioco sono quelle di pressione sulle due aree terminali e quelle delle pareti. Trascureremo il peso (ad es., curva orizzontale).

$$\sum_{k=1}^{N_F} F_{k,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + F_{p,x} \qquad \sum_{k=1}^{N_F} F_{k,y} = -p_2 A_2 \sin \theta + F_{p,y}$$

**I contributi in ingresso ed uscita sono dati da:**

$$\sum_{j=1}^{N_j} W_j w_{j,x} = \rho_1 A_1 w_1^2 - \rho_2 A_2 w_2^2 \cos \theta \qquad \sum_{j=1}^{N_j} W_j w_{j,y} = -\rho_2 A_2 w_2^2 \sin \theta$$

**Si ha quindi:**

$$\sum_{k=1}^{N_F} F_{k,x} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j w_{j,x} = 0 \Rightarrow p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + F_{p,x} + \rho_1 A_1 w_1^2 - \rho_2 A_2 w_2^2 \cos \theta = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N_F} F_{k,y} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j w_{j,y} = 0 \Rightarrow -p_2 A_2 \sin \theta + F_{p,y} - \rho_2 A_2 w_2^2 \sin \theta = 0$$

**Le forze di parete agenti sul fluido sono:**

$$F_{p,x} = p_2 A_2 \cos \theta - p_1 A_1 + \rho_2 A_2 w_2^2 \cos \theta - \rho_1 A_1 w_1^2$$

$$F_{p,y} = p_2 A_2 \sin \theta + \rho_2 A_2 w_2^2 \sin \theta$$

**Le forze applicate alle pareti del condotto dal fluido sono uguali ed opposte a quelle applicate dal fluido al condotto:**

$$R_x = -F_{p,x} \qquad R_y = -F_{p,y}$$

**In forma lagrangiana, considerata una massa che attraversa il condotto, potremmo considerare le forze ad essa applicate in ogni configurazione come responsabili della variazione della sua q. di moto:**

- pressione
- sforzi tangenziali
- peso

**L'equazione di bilancio della quantità di moto in forma integrale euleriana può essere scritta con maggiore generalità:**

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{w} dV}_{\text{variazione temporale}} + \underbrace{\int_S \vec{w} \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS}_{\text{contributi in ingresso ed uscita}} = \underbrace{\int_S \vec{f}_s dS}_{\text{forze superficiali}} + \underbrace{\int_V \rho \vec{g} dV}_{\text{forza di massa}}$$

**in cui  $\vec{f}_s$  rappresenta la forza superficiale specifica agente sull'elemento di superficie  $dS$ .**

- **Bilancio di energia (termica + meccanica):**

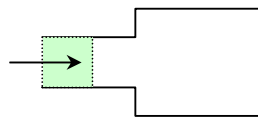
Per la massa di controllo si ha il 1° Principio della Termodinamica

Si considera l'energia totale, termica più meccanica,  
 $E = Me = M(u + w^2/2 + gz)$

| Forma Lagrangiana                                                                                                                                                                                                                                                                   | Forma Euleriana                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\boxed{\frac{DE}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} - \frac{DL}{Dt}}$ $\frac{DL}{Dt} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{albero} + \left(\frac{dL}{dt}\right)_{f.normali} + \left(\frac{dL}{dt}\right)_{f.tang.}$ $\frac{DQ}{Dt} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{ext} + \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{gen}$ | $\frac{dE}{dt} = \frac{DE}{Dt} + \sum_{j=1}^{N_j} W_j \left( u_j + \frac{w_j^2}{2} + gz_j \right)$ $\frac{DL}{Dt} = \frac{dL}{dt} - \sum_{j=1}^{N_j} W_j (pv)_j$ $\frac{DQ}{Dt} = \frac{dQ}{dt}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <math display="block">\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dL}{dt}</math> <math display="block">+ \sum_{j=1}^{N_j} W_j \left[ u_j + \frac{w_j^2}{2} + gz_j + (pv)_j \right]</math> </div> $\frac{dE}{dt} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{ext} + \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{gen}$ $- \left(\frac{dL}{dt}\right)_{albero} - \left(\frac{dL}{dt}\right)_{f.normali} - \left(\frac{dL}{dt}\right)_{f.tang.}$ $+ \sum_{j=1}^{N_j} W_j \left[ u_j + \frac{w_j^2}{2} + gz_j + (pv)_j \right]$ |

**Il lavoro di pulsione è il prodotto  $pv$  e rappresenta il lavoro fatto sul sistema o sull'esterno quando il fluido attraversa una delle luci di ingresso o uscita. Si ha:**

$$pdV = pwAdt = (pv)\rho wAdt = (pv)Wdt$$



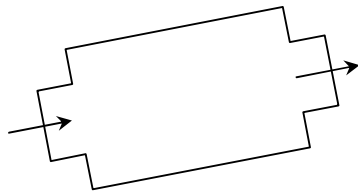
$$h = \text{entalpia} = u + pv$$

**Un modo equivalente di vedere le cose è scrivere direttamente il bilancio per un sistema continuo:**

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV}_{\text{variazione temporale dell'energia}} = \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{\text{variazione temporale della quantità di calore}} - \underbrace{\frac{dL}{dt}}_{\text{variazione temporale del lavoro verso l'esterno}} - \underbrace{\int_S (e + pv) \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS}_{\text{trasporto dell'energia dovuto al moto del fluido in uscita}}$$

in cui  $e = u + \frac{w^2}{2} + gz$ .

**Per un sistema stazionario con una entrata ed una uscita si ha:**



$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dL}{dt} = \int_S \left( pv + u + \frac{w^2}{2} + gz \right) \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dL}{dt} = \left[ p_2 v_2 + u_2 + \frac{w_2^2}{2} + gz_2 \right] W - \left[ p_1 v_1 + u_1 + \frac{w_1^2}{2} + gz_1 \right] W$$

**Dalla conservazione della massa si ha infatti:  $W_1 = W_2 = W$ . Per un fluido incompressibile, dividendo ambo i membri per  $W$ , cioè ragionando in termini di una massa unitaria che fluisce nel sistema (punto di vista lagrangiano) si ha:**

$$q - l = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + u_2 - u_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

$$-l = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \underbrace{u_2 - u_1 - q}_{\substack{\text{differenza tra} \\ \text{l'aumento di energia interna} \\ \text{ed il calore ceduto} \\ = gH_L}}$$

**Il termine  $gH_L$  rappresenta la perdita di carico derivante dalla conversione di energia meccanica in termica.**

**Per fluido incompressibile ed inviscido in assenza di lavoro si ha:**

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0$$

**che rappresenta una forma del teorema di Bernoulli per fluido incompressibile ed inviscido:**

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho w_2^2 + \rho g z_2 = \text{cost.}$$

Esso stabilisce che:

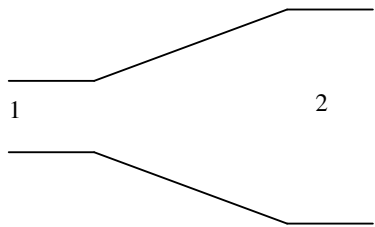
*La somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante in tutti i punti di un tubo di flusso elementare di un fluido non viscoso, incomprimibile e in condizioni di regime.*

Si può esprimere anche nella forma:

$$\underbrace{z}_{\substack{\text{altezza} \\ \text{geometrica}}} + \underbrace{\frac{p}{\rho g}}_{\substack{\text{altezza} \\ \text{piezometrica}}} + \underbrace{\frac{w^2}{2g}}_{\substack{\text{altezza} \\ \text{cinetica}}} = \text{cost}$$

### Applicazioni del T. di Bernoulli per fluido incomprimibile:

#### a) Variazioni di sezione in condotti



Dal T. di Bernoulli si ha

$$\frac{1}{2} \rho w_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho w_2^2 + p_2$$

Per la conservazione della massa in condizioni stazionarie

$$\rho w_1 A_1 = \rho w_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{A_1}{A_2} w_1 < w_1$$

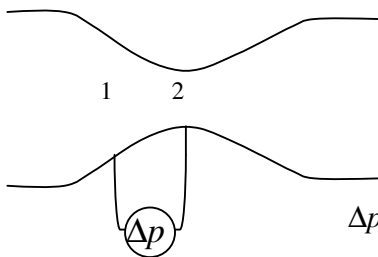
Perciò:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (w_1^2 - w_2^2) = p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] > p_1$$

Perciò in un allargamento (diffusore) la pressione aumenta grazie ad una corrispondente diminuzione di energia cinetica.

Dalle formule precedenti si nota che in un restringimento la pressione diminuisce perché l'energia cinetica aumenta (basta invertire il verso della velocità).

#### b) Il tubo di Venturi



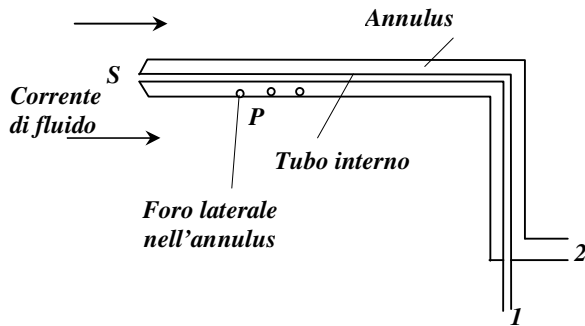
Lo scopo è misurare la portata nel condotto sulla base della variazione della pressione. Si ha ancora:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho w_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] < 0$$

Essendo  $Q = w_1 A_1$  cambiando segno si ha

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \frac{Q^2}{A_1^2} \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho (1/A_2^2 - 1/A_1^2)}}$$

### c) Il tubo di Pitot

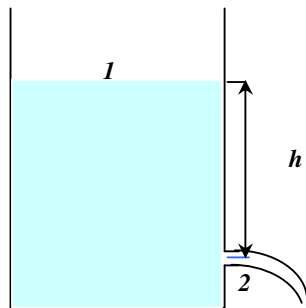


Lo scopo è misurare la velocità della corrente fluida. In S la velocità è nulla per cui:

$$p_s = \frac{1}{2} \rho w^2 + p$$

I forellini sull'annulus permettono la misura di  $p$  in 2 mentre  $p_s$  è misurato in 1. Se ne deduce  $w$ .

### d) Teorema di Torricelli



Si deve calcolare la velocità di uscita di un getto d'acqua proveniente da un recipiente con un'apertura. Applicando il T. di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2 si ha:

$$p_{atm} + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 = p_{atm} + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho w_2^2$$

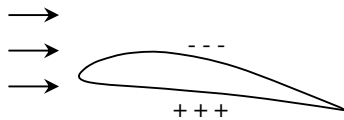
Essendo

$$z_1 - z_2 = h \quad w_1 \approx 0$$

si ha

$$w_2 = \sqrt{2gh}$$

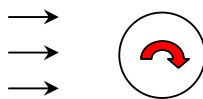
### e) Portanza su di un profilo alare



Il fluido si muove più velocemente lungo la parte convessa e più lentamente lungo quella concava.

La pressione perciò è più elevata sulla superficie inferiore che su quella superiore, dando luogo ad una forza diretta verso l'alto (*portanza*).

### f) Corpi rotanti in correnti fluide



Un cilindro rotante in una corrente di fluido tende a fare aumentare la velocità del fluido su di un lato e a farla diminuire sull'altro, con un corrispondente effetto sulla pressione che dà luogo ad una forza trasversale.

- Momento della quantità di moto

Dalla Fisica Generale sappiamo che la derivata temporale del momento angolare di un sistema è pari al momento delle forze agenti su di esso

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}$$

Nel caso di un punto materiale si ha

$$\vec{K} = \vec{r} \times M\vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

in cui il simbolo  $\times$  indica il prodotto vettoriale.

Una relazione analoga vale anche per i fluidi ed è importante nel caso di sistemi rotanti (pompe, turbine, ecc.). Essa può essere ottenuta in analogia al bilancio di quantità di moto

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \rho \vec{w} dV}_{\text{variazione temporale}} + \underbrace{\int_S \vec{r} \times \vec{w} \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS}_{\substack{\text{contributi in} \\ \text{ingresso ed} \\ \text{uscita}}} = \underbrace{\int_S \vec{r} \times \vec{f}_s dS}_{\text{forze superficiali}} + \underbrace{\int_V \vec{r} \times \rho \vec{g} dV}_{\text{forza di massa}}$$

Nel caso di sistemi che ruotano intorno ad un'asse (ad es., pompe, turbine, ecc.) in cui una portata di fluido entra ed esce dal sistema a raggi diversi, in condizioni stazionarie, trascurando l'effetto del peso si ha:

$$\underbrace{\int_S \vec{r} \times \vec{w} \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS}_{\substack{\text{contributi in} \\ \text{ingresso ed} \\ \text{uscita}}} = \underbrace{\int_S \vec{r} \times \vec{f}_s dS}_{\text{forze superficiali}}$$

Il secondo membro di questa relazione, rappresentando il momento delle forze agenti sul fluido, può essere interpretato anche come il momento (“coppia”)  $\vec{M}$  che è necessario applicare per mantenere in rotazione con velocità angolare costante il sistema.

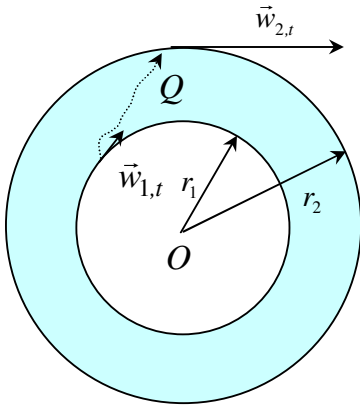
Il primo membro rappresenta invece la variazione del momento angolare del fluido tra ingresso ed uscita.



Con riferimento alla figura, nell'ipotesi di flusso verso l'esterno (pompa), la relazione precedente diventa

$$|\vec{M}| = \rho Q (r_2 w_{2,t} - r_1 w_{1,t}) \quad (^\circ)$$

in cui  $Q$  è la portata volumetrica che attraversa il sistema e  $w_{1,t}$  e  $w_{2,t}$  sono le velocità *tangenziali assolute* del fluido al raggio intero ed esterno.



Il motivo per cui solo le velocità tangenziali compaiono nella formula è ovviamente legato al fatto che il momento della quantità di moto rispetto al punto  $O$ , essendo definito come il prodotto vettoriale del raggio vettore per la quantità di moto, non è in alcun modo influenzato dalla presenza

di una componente radiale. Si ricorda infatti che si ha

$$|\vec{r} \times \vec{w}| = r w |\sin \varphi|$$

in cui  $\varphi$  è l'angolo compreso tra i due vettori. La formula  $(^\circ)$  si presta a trattare casi diversi, includendo quello di una pompa (v. figura) o di una turbina, in cui si può pensare che il flusso avvenga dall'esterno verso l'interno:

- nel caso della pompa, il momento applicato alla “girante” è “motore”, in quanto concorde alla velocità angolare di rotazione
- nel caso della turbina il momento applicato al “rotore” è “resistente”, in quanto discorde con la velocità angolare

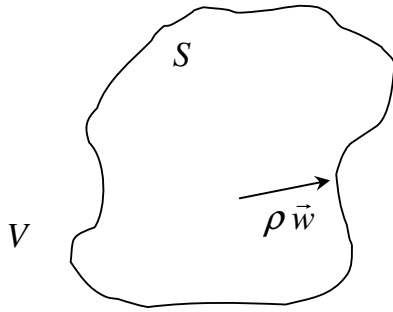
Nel primo caso, infatti, il fluido riceve energia che verrà opportunamente trasformata in un carico di pressione; nel secondo è il fluido a cedere energia per mantenere in rotazione il rotore soggetto ad un carico esterno (ad. es., coppia di una macchina elettrica)

Molti problemi possono essere risolti in base a considerazioni simili alle precedenti. Nel caso di turbomacchine, è consigliabile disegnare i vettori che rappresentano le velocità del fluido sia assolute e che relative in modo da comprendere esattamente le loro mutue relazioni, considerando anche la forma delle palette.

## *Equazioni di bilancio in forma differenziale*

- **Bilancio di massa**

Considerato un volume  $V$  delimitato da una superficie chiusa  $S$ , la variazione della massa nel tempo è uguale al flusso del fluido attraverso la superficie esterna.



$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS$$

ovvero

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Applicando il Teorema della divergenza (di Gauss) si ha:

$$\int_S \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \rho \vec{w} dV$$

Perciò:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{w} \right] dV = 0$$

Poiché il volume considerato è arbitrario, deve essere:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{w} = 0}$$

Nell'equazione si riconoscono:

- il termine di variazione temporale;
- il termine di flusso legato al moto del fluido.

Si ha:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{w} &= \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + w_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + w_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + w_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ &= \rho \nabla \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \nabla \rho \end{aligned}$$

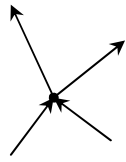
Perciò, si ha:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \nabla \rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla \rho \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

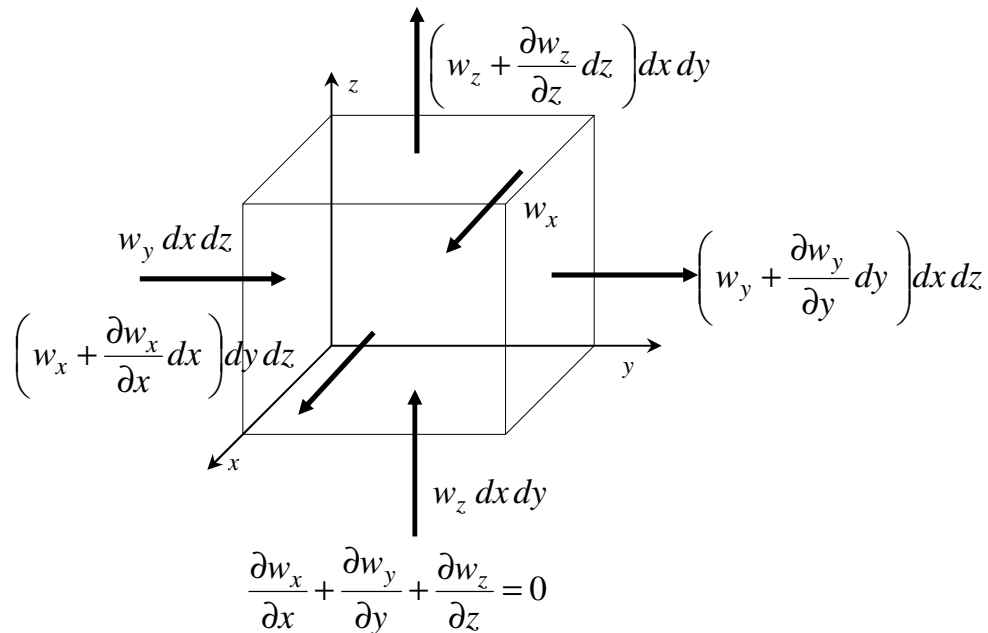
Per fluido incomprimibile si ha dunque:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{w} = 0}$$

Questa equazione ha un significato intuitivo:



in un fluido incomprimibile la somma delle portate entranti in un volume infinitesimo è uguale alla somma delle portate uscenti



- **Bilancio di quantità di moto**

Riprendiamo l'equazione scritta in termini integrali

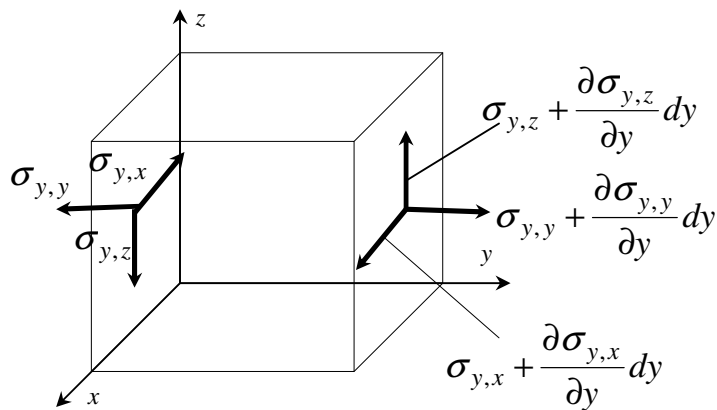
$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{w} dV}_{\text{variazione temporale}} + \underbrace{\int_S \bar{w} \rho \bar{w} \cdot \bar{n} dS}_{\text{contributi in ingresso ed uscita}} = \underbrace{\int_S \vec{f}_s dS}_{\text{forze superficiali}} + \underbrace{\int_V \rho \vec{g} dV}_{\text{forza di massa}}$$

Le forze agenti sulla superficie esterna del volume possono essere calcolate tenendo conto che in un continuo deformabile gli sforzi locali sono rappresentati dal  *tensore degli sforzi di Cauchy*

Il tensore degli sforzi,  $\bar{\bar{\sigma}}$  è costituito da 9 componenti  $\sigma_{i,j}$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z} \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_{z,z} \end{bmatrix}$$

che rappresentano gli sforzi agenti sulla superficie la cui normale è parallela all'asse *i*-esimo nella direzione positiva dell'asse *j*-esimo



La figura riporta le componenti del tensore degli sforzi sulle superfici ortogonali all'asse  $y$  di un volume elementare. Sulle altre facce la distribuzione è simile.

Si nota che sulla faccia che ha normale opposta al versore dell'asse le componenti del tensore sono dirette in senso opposto ai rispettivi assi.

Nonostante le componenti del tensore siano 9, solo 6 sono indipendenti perché *il tensore è simmetrico*; se così non fosse potrebbero sorgere accelerazioni angolari infinite:

$$\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$$

La forza per unità di area agente su ogni superficie  $S$  di normale  $\vec{n}$  è:

$$\vec{f}_s = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$$

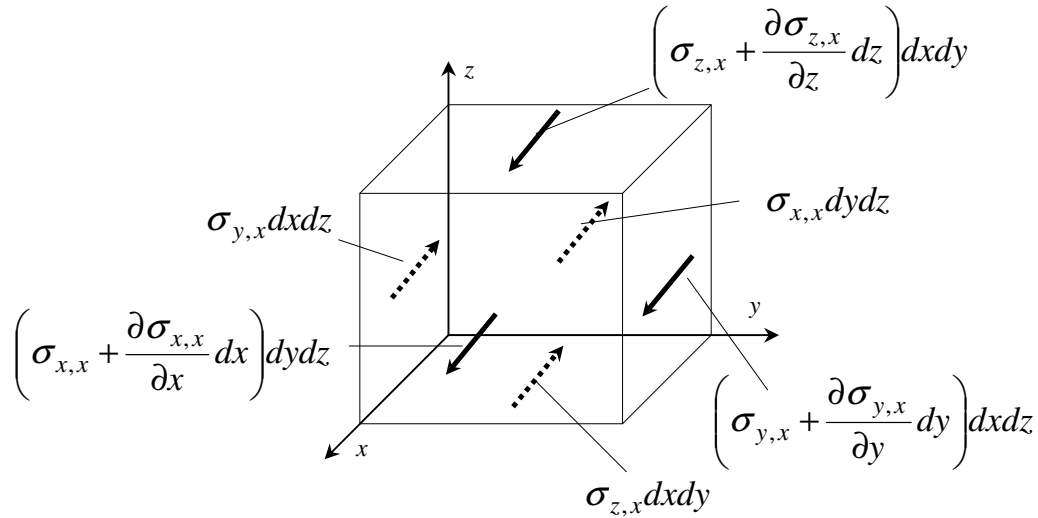
Se si esegue quindi un bilancio per la quantità di moto lungo l'asse  $x$  in un volume elementare di spigoli  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , che si esprime nella forma:

$$\left( \begin{array}{l} \text{variazione temporale} \\ \text{della q.di m. lungo x} \end{array} \right) = - \left( \begin{array}{l} \text{netto dei contributi} \\ \text{avvettivi (in uscita) della} \\ \text{q.di m. lungo x} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{somma delle forze} \\ \text{agenti sul sistema} \end{array} \right)$$

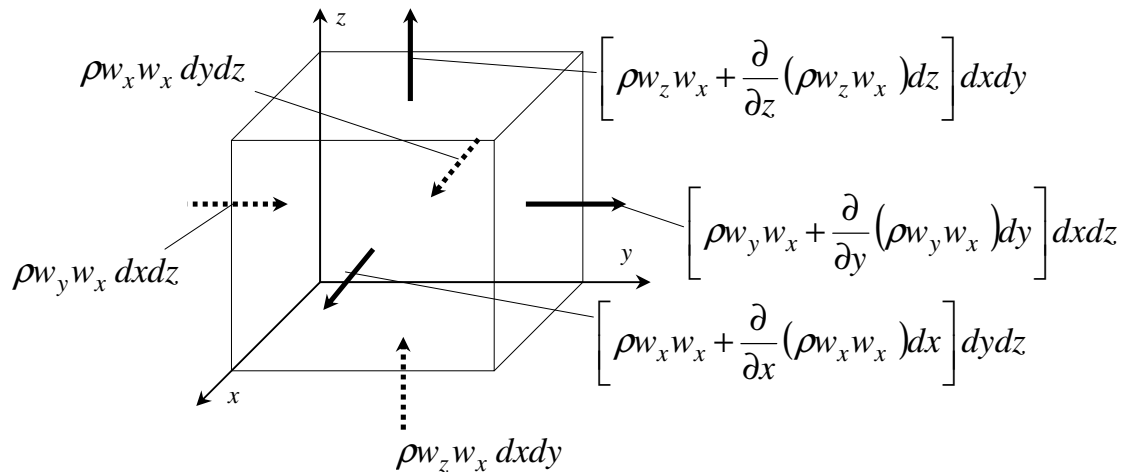
I contributi avvettivi sono rappresentati dalle portate in ingresso ed uscita da ciascuna faccia del volume elementare per la velocità lungo  $x$ .

Le forze agenti sul sistema sono la forza di massa e il netto delle forze superficiali.

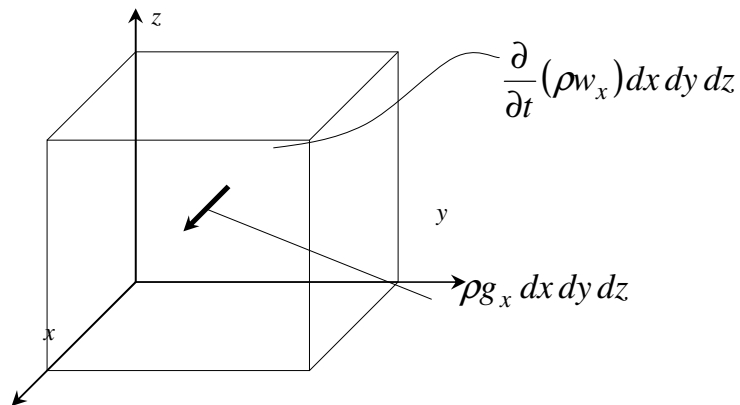
Le figure seguenti chiariscono la situazione.



**Forze superficiali agenti sul volume elementare nella direzione  $x$**



**Contributi avvevivi (dovuti al moto del fluido) alla quantità di moto lungo  $x$  nel volume elementare**



**Variazione per unità di tempo della quantità di moto lungo  $x$  e contributo della forza di massa lungo  $x$  nel volume elementare**

**Risulta quindi:**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w_x) dx dy dz = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x w_x) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y w_x) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z w_x) dx dy dz$$

$$+ \frac{\partial \sigma_{x,x}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{y,x}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{z,x}}{\partial z} dx dy dz + \rho g_x dx dy dz$$

**e quindi**

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho w_x)}_{\text{variazione temporale della } q.\text{di}.\text{m. lungo } x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y w_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z w_x)}_{\text{differenza tra gli apporti della } q.\text{di}.\text{m. lungo } x \text{ in ingresso ed uscita dalle superfici normali agli assi coordinati del volume elementare}}$$

variazione temporale della  $q.\text{di}.\text{m.}$  lungo  $x$

differenza tra gli apporti della  $q.\text{di}.\text{m.}$  lungo  $x$  in ingresso ed uscita dalle superfici normali agli assi coordinati del volume elementare

$$= \underbrace{\frac{\partial \sigma_{x,x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y,x}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z,x}}{\partial z}}_{\text{variazione delle componenti di } \vec{\sigma} \text{ lungo } x \text{ sulle superfici del volume elementare}} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{forza peso per unità di volume lungo } x}$$

**Il primo membro dell'equazione può essere elaborato come segue**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y w_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z w_x)$$

$$= w_x \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}$$

$$+ w_x \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_x \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) + \rho w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}$$

$$= w_x \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) \right]$$

$$+ \rho \left[ \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right]$$

$$= w_x \underbrace{\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w}) \right]}_{=0 \text{ per l'equazione di continuità}} + \rho \underbrace{\left[ \frac{\partial w_x}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla w_x \right]}_{= \text{derivata lagrangiana di } w_x}$$

**Perciò si ha**

$$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{x,x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y,x}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z,x}}{\partial z} + \rho g_x$$

**e, considerando tutte le componenti,**

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{g}}$$

La precedente rappresenta la forma lagrangiana dell'equazione del moto equivalente alla seconda Legge della Dinamica.

Scritta per componenti l'equazione assume la forma

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \sigma_{x,x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y,x}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z,x}}{\partial z} + \rho g_x \\ \rho \left[ \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \sigma_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y,y}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z,y}}{\partial z} + \rho g_y \\ \rho \left[ \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \sigma_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z,z}}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned}$$

In fluidodinamica il tensore degli sforzi viene poi decomposto in una componente viscosa ad una di pressione:

$$\vec{\sigma} = \vec{\tau} - p\vec{I}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z} \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_{z,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{x,x} & \tau_{x,y} & \tau_{x,z} \\ \tau_{y,x} & \tau_{y,y} & \tau_{y,z} \\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & \tau_{z,z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

La componente viscosa,  $\vec{\tau}$  è nulla se il fluido non è viscoso o non è in moto. La componente di pressione è diversa da zero anche in condizioni statiche.

Sostituendo nelle precedenti si ha:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \tau_{x,x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y,x}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z,x}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \\ \rho \left[ \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \tau_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y,y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z,y}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \\ \rho \left[ \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \tau_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z,z}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned}$$

che in forma vettoriale diventa:

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{\tau} - \nabla p + \rho \vec{g}$$

E' interessante notare che per  $\vec{w} = 0$  si ottiene la legge di Stevino già vista nella statica dei fluidi:

$$\nabla p = \rho \vec{g}$$

Invece, per **fluido inviscido** ( $\vec{\tau} = 0$ ) si ottengono le *equazioni di Eulero*:

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

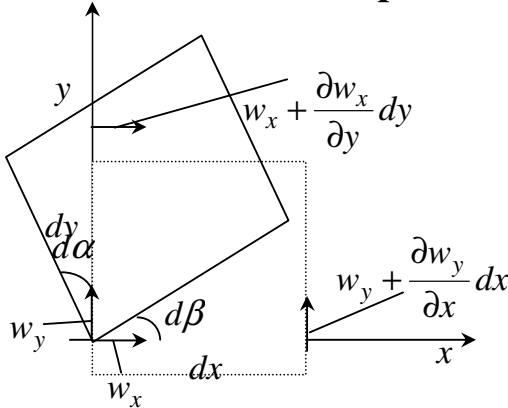
Da queste equazioni è possibile ottenere una *forma generalizzata del teorema di Bernoulli* valida per fluido comprimibile lungo una linea di flusso o tra due punti qualunque in moto se il moto è irrotazionale:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0$$

### Le Equazioni di Navier-Stokes

Se il *fluido è viscoso, newtoniano e in moto laminare* esiste una relazione lineare tra la componente viscosa del tensore degli sforzi e le derivate spaziali della velocità.

Per meglio comprendere la forma riflettiamo sul modo in cui il fluido si deforma e ruota per azione degli sforzi cui è sottoposto.



Dato l'elemento infinitesimo di fluido quadrato in figura, le rotazioni (in senso antiorario)  $d\alpha$  e  $d\beta$  dei lati inizialmente sugli assi coordinati nell'intervallo di tempo  $dt$  sono date da:

$$d\alpha = - \underbrace{\left[ \left( w_x + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy \right) dt - w_x dt \right]}_{\text{spostamento relativo infinitesimo del vertice inizialmente in } (0, dy)} \underbrace{\frac{1}{dy}}_{\text{raggio}}$$

$$d\beta = \underbrace{\left[ \left( w_y + \frac{\partial w_y}{\partial x} dx \right) dt - w_y dt \right]}_{\text{spostamento relativo infinitesimo del vertice inizialmente in } (dx, 0)} \underbrace{\frac{1}{dx}}_{\text{raggio}}$$

cioè

$$d\alpha = - \frac{\partial w_x}{\partial y} dt$$

$$d\beta = \frac{\partial w_y}{\partial x} dt$$

Le velocità di rotazione dei due lati sono quindi:

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{\partial w_x}{\partial y}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial w_y}{\partial x}$$



La *velocità di rotazione* media dell'elemento in senso antiorario è quindi:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)$$

La *velocità di deformazione* media dell'elemento è invece

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\beta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)$$

Il tensore  $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) può quindi essere decomposto *in una parte simmetrica*, che esprime la *deformazione* dell'elemento di fluido, ed *una antisimmetrica*, che ne esprime la *rotazione*

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) = e_{i,j} + \Omega_{i,j} \quad (i, j = x, y, z)$$

$$e_{i,j} = e_{j,i} \quad \Omega_{i,j} = -\Omega_{j,i} \quad (i, j = x, y, z)$$

Per un fluido newtoniano in moto laminare si assume che esista *una relazione lineare tra la componente viscosa del tensore degli sforzi ed il tensore di deformazione*. La forma completa di questa relazione è:

$$\tau_{i,j} = 2\mu e_{i,j} + \left[ \mu' - \frac{2}{3}\mu \right] (\nabla \cdot \vec{w}) \delta_{i,j} \quad (i, j = x, y, z)$$

in cui  $\mu'$  è detta *bulk viscosity* che è nulla per gas monoatomici, piccola per fluidi densi e viene generalmente trascurata

Introducendo questa formula nell'equazione di bilancio della quantità di moto

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{\tau} - \nabla p + \rho \vec{g}$$

si ha (si pone  $\mu' = 0$ )

$$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \vec{w}) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x$$

ed analoghe per le altre componenti

Assumendo ora che la densità e la viscosità siano costanti, si ha:

$$\mu = \text{cost.} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \mu = \mu \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \rho = \text{cost.} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{w} = 0$$

$$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w_y}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 w_z}{\partial z \partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

$= \nabla \cdot \vec{w} = 0$

perciò 
$$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x + \rho g_x$$

e, in forma vettoriale, si ha

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = \mu \nabla^2 \vec{w} - \nabla p + \rho \vec{g}} \quad (\text{eq. di Navier-Stokes})$$

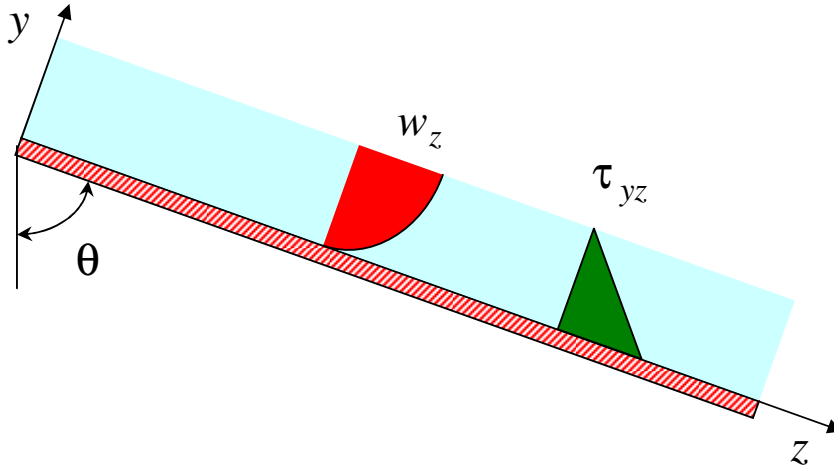
- ◆ Le condizioni al contorno con una parete rigida e impermeabile in moto con velocità sono quelle di “no slip” cioè nessuno scorrimento
- ◆ E’ importante riconoscere il significato dei termini che appaiono nelle equazioni

$$\underbrace{\rho \frac{D\vec{w}}{Dt}}_{\text{termine di inerzia}} = \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{w}}_{\text{termine dovuto alle forze viscosi}} - \underbrace{\nabla p}_{\text{termine dovuto alle forze di pressione}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{termine dovuto alla forza di massa}}$$

- ◆ In assenza di sforzi viscosi (viscosità trascurabile) si ottengono nuovamente le equazioni di Eulero

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}} \quad (\text{eq. di Eulero})$$

Moto di un film libero su piano inclinato



- Un fluido incomprimibile scorre in moto laminare stazionario lungo una piastra inclinata
- Essendo, evidentemente,  $w_x = w_y = 0$  l'unica equazione rilevante è quella relativa all'asse z

$$\rho \left[ \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z + \rho g_z$$

- La parete è molto larga rispetto allo spessore del film ed è sufficientemente lunga da rendere rappresentative le condizioni asintotiche, cioè

$$\frac{\partial w_z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

da cui si ha

$$- \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \rho g_z = 0$$

- Si assume, inoltre, che la distribuzione di pressione nel film sia uguale a quella (idrostatica) nel gas esterno

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_g g_z = \rho_g g \cos \theta$$

- Si ha, dunque

$$\mu \frac{d^2 w_z}{dy^2} = -(\rho - \rho_g) g \cos \theta$$

- Integrando si ha:

$$w_z(y) = -\frac{(\rho - \rho_g) g \cos \theta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

- Le condizioni al contorno esprimono la condizione di “no-slip” sulla parete e di film libero per  $y = \delta = \text{spessore del film}$

$$w_z(0) = 0 \quad \mu \frac{dw_z}{dy} \Big|_{y=\delta} = \tau(\delta) = 0$$

da cui  $C_2 = 0$   $C_1 = \frac{(\rho - \rho_g) g \cos \theta}{\mu} \delta$

e quindi  $w_z(y) = \frac{(\rho - \rho_g) g \cos \theta \delta^2}{2\mu} \left( 2 \frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)$

Si ha anche:

$$\tau_{yz}(y) = \mu \frac{\partial w_z}{\partial y} = (\rho - \rho_g) g \cos \theta \delta \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right)$$

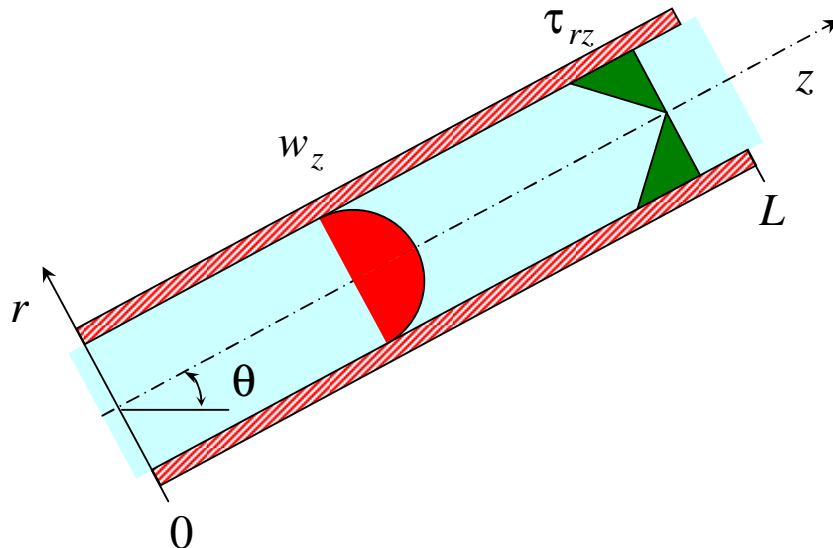
- Mediando su  $0 \leq y \leq \delta$ , si ha:

$$\begin{aligned} \bar{w}_z &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta w_z(y) dy = \frac{(\rho - \rho_g) g \cos \theta \delta}{2\mu} \int_0^\delta \left( 2 \frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) dy \\ &= \frac{(\rho - \rho_g) g \cos \theta \delta}{2\mu} \left[ \frac{y^2}{\delta} - \frac{y^3}{3\delta^2} \right]_0^\delta = \frac{(\rho - \rho_g) g \cos \theta \delta^2}{3\mu} \end{aligned}$$

- La portata per unità di perimetro della piastra e il numero di Reynolds del film sono dati da:

$$\Gamma = \rho \bar{w}_z \delta = \frac{\rho (\rho - \rho_g) g \cos \theta \delta^3}{3\mu} \quad Re = \frac{4\Gamma}{\mu}$$

## Moto di Poiseuille in un tubo circolare



- Si tratta del moto stazionario di un fluido incomprimibile in un tubo inclinato, lontano dalla sezione di imbocco, in condizioni di simmetria assiale. Si ha:

$$w_r = w_\varphi = 0 \quad \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

- Si ha, perciò:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z + \rho g_z = 0$$

ovvero

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z$$

- Ponendo

$$P = p - \rho g_z z$$

si elimina formalmente il termine gravitazionale ottenendo

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw_z}{dr} \right) = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_L - P_0}{L}$$

in cui si è assunto implicitamente che il gradiente di pressione non vari con  $r$  e  $z$

- **Integrando, si ottiene**

$$r \frac{\partial w_z}{\partial r} = \frac{\rho_L - \rho_0}{\mu L} \frac{r^2}{2} + C_1 \quad w_z(r) = \frac{\rho_L - \rho_0}{\mu L} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$$

- **Le condizioni al contorno richiedono**

$$w_z(r) \text{ limitata per } r \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad w_z(R) = 0$$

**da cui si ottiene**

$$C_1 = 0 \quad C_2 = -\frac{\rho_L - \rho_0}{\mu L} \frac{R^2}{4} = \frac{\rho_0 - \rho_L}{\mu L} \frac{R^2}{4}$$

**e quindi**

$$w_z(r) = \frac{(\rho_0 - \rho_L) R^2}{4 \mu L} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

- **Lo sforzo di taglio è dato da**

$$\tau_{rz}(r) = \mu \frac{dw_z}{dr} = -\frac{\rho_0 - \rho_L}{2L} r$$

- **La velocità massima e quella media sulla sezione sono date da**

$$w_{z,\max} = w_z(0) = \frac{(\rho_0 - \rho_L) R^2}{4 \mu L}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_z &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \frac{(\rho_0 - \rho_L) R^2}{4 \mu L} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2 \pi r dr = \frac{(\rho_0 - \rho_L)}{2 \mu L} \int_0^R \left( r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr \\ &= \frac{(\rho_0 - \rho_L)}{2 \mu L} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} \right) = \frac{(\rho_0 - \rho_L) R^2}{8 \mu L} \end{aligned}$$

- **La portata volumetrica risulta quindi**

$$Q = \pi R^2 \bar{w}_z = \frac{\pi (\rho_0 - \rho_L) R^4}{8 \mu L} \quad (\text{legge di Poiseuille-Hagen})$$

**Si nota che nel moto laminare in un tubo la portata è proporzionale alla caduta di pressione, cosa che permette di stabilire un'analogia con la legge di Ohm per la conduzione elettrica**

- Per la valutazione pratica *delle perdite di carico per attrito distribuito* in condotti di solito si fa uso di formule del tipo

$$\boxed{\frac{\Delta p}{L} = \frac{f}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p = f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2 \quad (\text{formula di}$$

*Darcy-Weisbach*)

in cui  $f$  è il *fattore di attrito (o di Darcy-Weisbach)*

- Dalla relazione per  $\bar{w}_z$  si ha

$$\frac{(p_0 - p_L)}{L} = \frac{8\mu \bar{w}_z}{R^2} = \frac{8\mu}{\rho \bar{w}_z} \frac{4}{D^2} \rho \bar{w}_z^2 = \frac{64\mu}{\rho \bar{w}_z D} \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2$$

per cui in moto laminare in un condotto circolare si ottiene

$$\boxed{f = \frac{64\mu}{\rho \bar{w}_z D} = \frac{64}{Re_D}} \quad (\text{legge di Poiseuille})$$

- Vi è un'altra definizione di "fattore di attrito" che viene detto *fattore di Fanning*

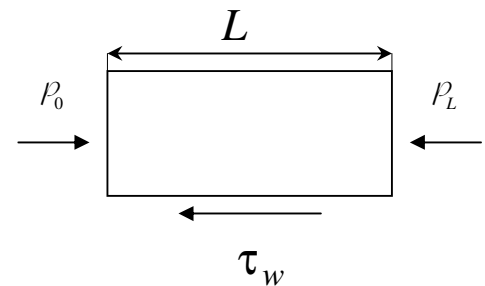
$$\boxed{\tau_w = f' \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2}$$

- La relazione con il fattore di Darcy-Weisbach può essere ottenuta da un bilancio di forze agenti sul fluido. Si ha:

$$\pi D L \tau_w = (p_0 - p_L) \pi \frac{D^2}{4}$$

$$\tau_w = \frac{p_0 - p_L}{L} \frac{D}{4}$$

$$f' \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2 = \frac{f}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2 \frac{D}{4} \Rightarrow \boxed{f' = \frac{f}{4}}$$



- Per sezioni di tubo diverse da quella circolare si pone

$$D_e = \frac{4A}{\Pi_f} = \frac{4 \times \text{area}}{\text{perimetro bagnato}}$$

sulla base del quale si valuta il numero di Reynolds da introdurre nella formula di Poiseuille con coefficiente appropriato ( $\neq 64$ )

Attività proposte:

- 1. Risolvere nuovamente gli esercizi precedenti applicando bilanci di forze a volumi di fluido opportuni ed utilizzando la legge di Newton della viscosità. Verificare che i risultati coincidono con quelli trovati tramite l'applicazione delle equazioni di Navier-Stokes.**

*Suggerimenti*

- **Nel caso di film su piastra piana considerare un parallelepipedo a base rettangolare con profondità unitaria (ortogonalmente al piano del disegno) ed altezza infinitesima lungo  $y$**
- **Nel caso del moto alla Poiseuille considerare un guscio cilindrico di spessore infinitesimo concentrico all'asse del condotto**

- 2. Risolvere nuovamente il problema del film su piastra piana introducendo uno sforzo di taglio superficiale  $\tau_i$  e discutere le distribuzioni di velocità ottenibili nel film a causa della sua variazione.**

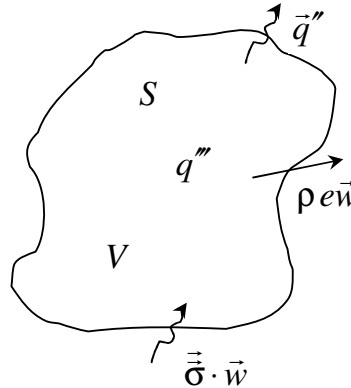
*Suggerimenti*

- **Assumere imposta la portata per unità di perimetro,  $\Gamma$ , e considerare la variazione dello spessore del film e della velocità in funzione dello sforzo di taglio all'interfaccia.**
- **Disegnare profili qualitativi di velocità nel film ottenuti al variare dello sforzo di taglio all'interfaccia.**



• **Bilancio di energia (termica + meccanica)**

Consideriamo un volume di controllo  $V$  delimitato da una superficie  $S$



Posto ancora  $e = u + w^2/2 + gz$  si ha:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV}_{\text{variazione temporale dell'energia in } V} = - \underbrace{\int_S \rho e \vec{w} \cdot \vec{n} dS}_{\text{contributo dovuto al fluido in entrata e uscita}} - \underbrace{\int_S \vec{q}'' \cdot \vec{n} dS}_{\text{contributo del flusso termico conduttivo in uscita}} + \underbrace{\int_S (\vec{\sigma} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{n} dS}_{\text{contributo delle forze superficiali}} + \underbrace{\int_V q''' dV}_{\text{contributo della potenza termica per unità di volume}}$$

Applicando il teorema della divergenza ed eliminando con le solite considerazioni l'integrazione sul volume arbitrario  $V$ , si ha

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}}_{\text{variazione temporale dell'energia in } V} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho e \vec{w})}_{\text{contributo dovuto al moto del fluido}} = - \underbrace{\nabla \cdot \vec{q}''}_{\text{contributo del flusso termico conduttivo}} + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{w})}_{\text{contributo delle forze superficiali}} + \underbrace{q'''}_{\text{contributo della potenza termica per unità di volume}} \quad (^\circ)$$

Decomponendo il tensore degli sforzi nella componente di pressione ed in quella di attrito

$$\nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{w}) = \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{w}) - \nabla \cdot (p \vec{I} \cdot \vec{w}) = \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{w}) - \nabla \cdot (p \vec{w}) = \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{w}) - \underbrace{\nabla \cdot (\rho p v \vec{w})}_{\rho v=1}$$

si ha

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}}_{\text{variazione temporale dell'energia in } V} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho(e + pv)\vec{w}]}_{\text{contributo dovuto al moto del fluido (con lavoro di pulsione)}} = - \underbrace{\nabla \cdot \vec{q}''}_{\text{contributo del flusso termico conduttivo}} + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{w})}_{\text{contributo delle forze superficiali di attrito}} + \underbrace{q'''}_{\text{contributo della potenza termica per unità di volume}} \quad (^\circ^\circ)$$

Riprendendo la  $(^\circ)$ , il primo membro può essere riformulato facendo uso dell'equazione di continuità

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{w}) = e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \nabla \cdot (\rho \vec{w}) + \rho \vec{w} \cdot \nabla e = e \underbrace{\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w}) \right]}_{=0, \text{ per l'equazione di continuità}} + \rho \underbrace{\frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{w} \cdot \nabla e}_{= \rho \frac{De}{Dt}}$$

per cui

$$\rho \frac{De}{Dt} = - \underbrace{\nabla \cdot \vec{q}''}_{\text{contributo del flusso termico conduttivo}} + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{w})}_{\text{contributo delle forze superficiali}} + \underbrace{q'''}_{\text{contributo della potenza termica per unità di volume}}$$

e tenendo conto della decomposizione del tensore degli sforzi

$$\rho \frac{De}{Dt} = - \underbrace{\nabla \cdot \vec{q}''}_{\text{contributo del flusso termico conduttivo}} + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{w})}_{\text{contributo delle forze superficiali di attrito}} - \underbrace{\nabla \cdot (p\vec{w})}_{\text{contributo delle forze superficiali di pressione}} + \underbrace{q'''}_{\text{contributo della potenza termica per unità di volume}} \quad ({}^{\circ\circ\circ})$$

Il nostro scopo è ora giungere ad un'equazione di bilancio dell'energia termica.

Per fare questo, sottrarremo membro a membro all'equazione di bilancio dell'energia totale (termica + meccanica) un'equazione di bilancio dell'energia meccanica

Questa è ottenibile da quella della quantità di moto moltiplicando scalarmente ambo i membri per la velocità

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} \cdot \vec{w} = (\nabla \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{w} - \nabla p \cdot \vec{w} + \rho \vec{g} \cdot \vec{w}$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{w^2}{2} \right) = (\nabla \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{w} - \nabla p \cdot \vec{w} + \rho \vec{g} \cdot \vec{w}$$

Tenendo conto che

$$\vec{g} = -\nabla(gz)$$

e che

$$\frac{\partial}{\partial t}(gz) = 0$$

si ha

$$\rho \vec{g} \cdot \vec{w} = -\rho \vec{w} \cdot \nabla(gz) = -\rho \frac{D}{Dt}(gz)$$

e quindi

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{w^2}{2} + gz \right) = (\nabla \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{w} - \nabla p \cdot \vec{w} \quad (\text{bilancio di energia meccanica})$$

Sottraendo membro a membro questa equazione alla ({}^{\circ\circ\circ}), si ha:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = - \underbrace{\nabla \cdot \vec{q}''}_{\text{contributo del flusso termico conduttivo}} + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{w}) - (\nabla \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{w}}_{\substack{\text{potenza meccanica per unità di volume} \\ \text{dissipata per attrito in energia termica} \\ = \Phi}} - \underbrace{p \nabla \cdot \vec{w}}_{\substack{\text{potenza per unità} \\ \text{di volume delle forze} \\ \text{di pressione}}} + \underbrace{q'''}_{\text{potenza termica volumetrica}}$$

e infine

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q}'' + \Phi - p \nabla \cdot \vec{w} + q'''$$

Ricordando che è

$$\nabla \cdot \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla \rho \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt}$$

si ha

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q}'' + \Phi - \rho p \frac{Dv}{Dt} + q'''$$

Introducendo a primo membro l'entalpia in luogo dell'energia interna, si ha

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left[ \frac{Dh}{Dt} - \frac{D(pv)}{Dt} \right] = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} - \rho p \frac{Dv}{Dt}$$

e quindi

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \vec{q}'' + \Phi + q'''$$

Poiché l'entalpia è può essere considerata funzione della pressione e della temperatura, si ha

$$h = h(p, T) \Rightarrow \frac{Dh}{Dt} = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{DT}{Dt} + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{Dp}{Dt}$$

ovvero

$$\frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} + \underbrace{v(1 - \beta T)}_{\text{da relazioni termodinamiche}} \frac{Dp}{Dt}$$

Per cui

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q}'' + \Phi + q''' + \beta T \frac{Dp}{Dt}$$

L'ultimo passo è ora introdurre la *legge di Fourier della conduzione* che definisce il flusso termico conduttivo

$$\vec{q}_c'' = -k \nabla T$$

e tenere conto dell'eventuale flusso termico dovuto all'irraggiamento  $\vec{q}_r''$ , ottenendo quindi

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot \vec{q}_r'' + \Phi + q''' + \beta T \frac{Dp}{Dt}$$

Normalmente, il termine contenente la pressione, quello di dissipazione per attrito e quello di irraggiamento possono essere trascurati, ottenendo

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q'''$$

Nel caso di un *fluido non in moto*, o di un *solido*, con *conducibilità termica uniforme* si ha:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + q'''$$

che rappresenta la cosiddetta *Equazione del Calore*.

### *L'Equazione di Bernoulli generalizzata*

Dalle equazioni di Navier-Stokes, proiettate lungo una linea di flusso, è possibile ottenere una forma generalizzata del teorema di Bernoulli, valida per fluido comprimibile, viscoso, in presenza di lavoro scambiato con l'esterno:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + l_s + l_f = 0$$

in cui:

- 1 e 2 sono le sezioni a monte e a valle (nel senso del moto del fluido) del tubo di flusso considerato
- $l_s$  rappresenta il lavoro per unità di massa prodotto verso l'esterno (positivo per una turbina e negativo per una pompa)
- $l_f$  rappresenta l'energia meccanica perduta per attrito per unità di massa ed è sempre positivo

Il termine  $l_f$  costituisce una *perdita di carico per attrito* e viene talora espresso in termini di una diminuzione di altezza, nel senso già visto per la somma delle altezze piezometrica, geometrica e cinetica:

$$l_f = gH_L$$

in cui  $H_L = [m]$ .

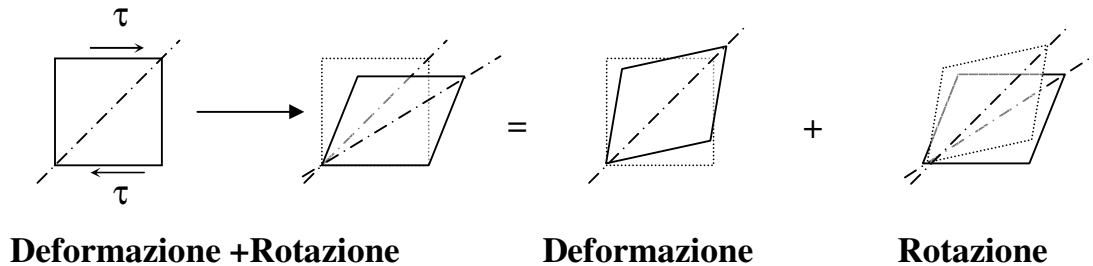
Come abbiamo visto, la legge di Poiseuille permette di valutare tale perdita di carico nel caso di un fluido laminare in un condotto cilindrico in termini di una equivalente perdita di pressione.

Impareremo a valutare tali perdite di carico anche per moto turbolento in tubi dritti (*perdite di carico distribuite*) e in caso di condotti con brusche restrizioni o allargamenti, curve, valvole, ecc. (*perdite di carico concentrate o singolari*).

# MOTO SU SUPERFICI ESTERNE ED IN CONDOTTI

## Vorticità e Circolazione

- In generale, il moto di un fluido in presenza di sforzi di taglio coinvolge sia *deformazioni* che *rotazioni* del generico elemento di fluido



$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) = e_{i,j} + \Omega_{i,j}$$

- La *vorticità* è definita come

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{w} = \nabla \times \vec{w}$$

Essa è legata alla velocità angolare di rotazione di un elemento di fluido dalla relazione

$$\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$$

- Un moto in cui la vorticità sia nulla viene detto *irrotazionale*, altrimenti il moto è detto *rotazionale*
- Esempi classici di moti rotazionali ed irrotazionali sono i seguenti:

### 1. Moto di rotazione di un fluido “a corpo rigido”

La velocità è data da  $\vec{w} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$  per cui risulta, come si verifica facilmente

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{\Omega} \times \vec{r} = 2\vec{\Omega}$$

e quindi il moto è *rotazionale*

### 2. Vortice potenziale

In coordinate cilindriche, la velocità ha le seguenti componenti

$$w_r = w_z = 0 \qquad w_\varphi = \frac{C}{r}$$

L'unica componente potenzialmente non nulla della vorticità è quella lungo l'asse z

$$\omega_z = \{\nabla \times \vec{w}\}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{C}{r} \right) = 0 \quad (r \neq 0)$$

perciò il moto è irrotazionale ovunque tranne che sull'asse z, su cui la vorticità è indeterminata (come vedremo, in realtà è infinita)

### 3. Moto piano di Couette

Abbiamo già parlato di questo moto quando abbiamo definito la viscosità dinamica; si ha

$$w_x = w_x(y) = \frac{y}{H} w_p \quad \Rightarrow \quad \omega_x = \omega_y = 0 \quad \omega_z = -\frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{w_p}{H}$$

perciò il moto è rotazionale ovunque.

- E' utile introdurre la *circolazione*, che è definita come la circuitazione del vettore velocità lungo una curva chiusa arbitraria

$$\Gamma = \oint \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

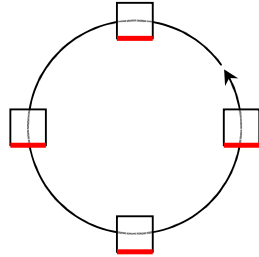
Il *teorema di Stokes* permette di mettere in relazione la circolazione con la vorticità del campo di moto

$$\Gamma = \oint_C \vec{w} \cdot d\vec{l} = \int_{S_c} \text{rot } \vec{w} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_c} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$$

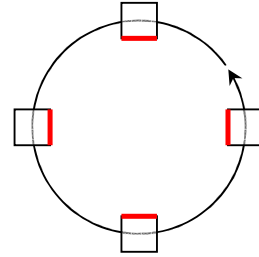
l'ultimo integrale essendo esteso ad una qualunque superficie  $S_c$  che si stacchi dal circuito su cui viene eseguita la circuitazione.

- E' quindi evidente che qualora la circolazione risulti diversa da zero il moto deve essere, almeno in qualche punto, rotazionale
- Il teorema (del vortice) di Kelvin afferma che, per ogni moto governato dalle equazioni di Eulero (fluido inviscido), la circolazione relativa ad un circuito materiale (cioè in moto col fluido) si conserva, ovvero:  $D\Gamma/Dt = 0$
- Ciò si comprende notando che nel caso di un fluido inviscido ( $\tau = 0$ ) non è possibile generare rotazione tramite le sole forze di pressione e se il fluido non possiede già "inizialmente" una vorticità diversa da zero esso si mantiene irrotazionale

- Da quanto sopra si ha che:
  - ◆ *il moto lungo una linea di flusso curva non è necessariamente rotazionale: l'elemento di fluido può non ruotare rispetto al sistema di riferimento fisso (v. vortice potenziale con  $r \neq 0$ )*



Moto irrotazionale



Moto rotazionale

- ◆ *un moto caratterizzato da linee di flusso chiuse non può essere ovunque irrotazionale: scegliendo una linea di flusso come circuito per calcolare la circolazione si ottiene infatti  $\Gamma \neq 0$  che, facendo uso del teorema di Stokes, mostra che in qualche punto “interno” al circuito la vorticità deve essere diversa da zero (v. vortice potenziale con  $r = 0$ )*

- ◆ *il moto di un fluido inviscido “inizialmente” irrotazionale si mantiene irrotazionale; ponendo  $\phi =$  potenziale di velocità risulta*

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{w} = \nabla \times \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{w} = -\text{grad } \phi = -\nabla \phi$$

*cioè la velocità ammette un potenziale. Se il moto è anche incomprimibile, si ha allora*

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

*(moto potenziale incomprimibile) che può essere risolto con assegnate condizioni al contorno, come ad esempio quelle viste per superficie impermeabile*

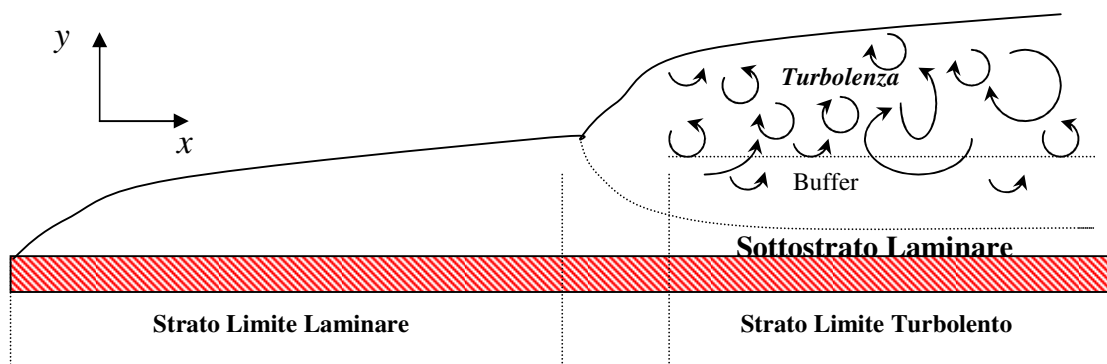
$$\vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \nabla \phi \cdot \vec{n} = \frac{d\phi}{dn} = 0$$

- *il moto di un fluido viscoso è, generalmente, rotazionale (anche se si svolge su linee di flusso rettilinee) perché gli sforzi di taglio possono generare rotazione; dalle equazioni di Navier-Stokes si ha*

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{w} + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{\omega}}_{\substack{\text{diffusione della vorticità} \\ \text{generata alla parete}}} \quad (\text{eq. della vorticità})$$

### Concetto Generale di Strato Limite nel Moto su Superfici Esterne

- La *condizione di adesione* (“no-slip”), applicabile se il fluido può essere considerato un “continuo” ed è viscoso, determina la creazione di una zona in prossimità di una parete in cui il fluido rallenta
- Questa zona, nella quale avviene la maggior parte della variazione della velocità rispetto alla corrente libera (convenzionalmente, il 99%), è detta *strato limite* (fluidodinamico)
- E’ importante sottolineare che la presenza dello s.l. divide la corrente fluida in due regioni:
  - ◆ lo strato limite, in cui il moto è *rotazionale* (le particelle ruotano su loro stesse) e non si possono trascurare gli effetti viscosi
  - ◆ una zona esterna, in cui il fluido può essere considerato sostanzialmente inviscido e *irrotazionale* (le particelle non ruotano)
- Nello s.l. il moto è inizialmente laminare, ma può subire una transizione a moto turbolento se il suo spessore aumenta oltre un certo valore; in questo caso si distinguono tre zone:
  - ◆ *un sottostrato laminare*, zona vicina alla parete in cui il moto è ordinato (laminare)
  - ◆ *una zona di transizione* (“*buffer layer*”) in cui si comincia a sviluppare turbolenza
  - ◆ *una zona turbolenta*





- La variazione della pressione nello s.l. in direzione ortogonale alla superficie è trascurabile, per cui si assume che la distribuzione di pressione in esso sia determinata da quella nella corrente libera, da calcolarsi sulla base della teoria del *moto potenziale*
- Dato il valore del gradiente di pressione lungo  $x$  calcolato nella corrente esterna lo strato limite viene classificato come segue:

◆  $\partial p / \partial x < 0 \Rightarrow$  *s.l. in gradiente di pressione favorevole*

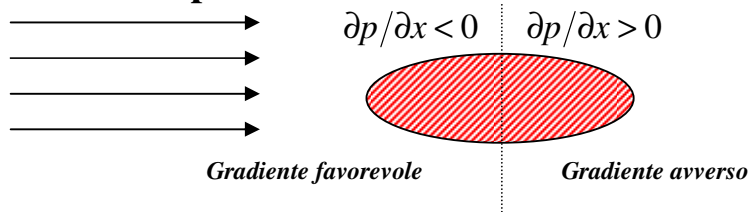
in questo caso il fluido esterno sta accelerando ( $\partial w_\infty / \partial x > 0$ )

$$w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x} + w_y \underbrace{\frac{\partial w_\infty}{\partial y}}_{\approx 0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

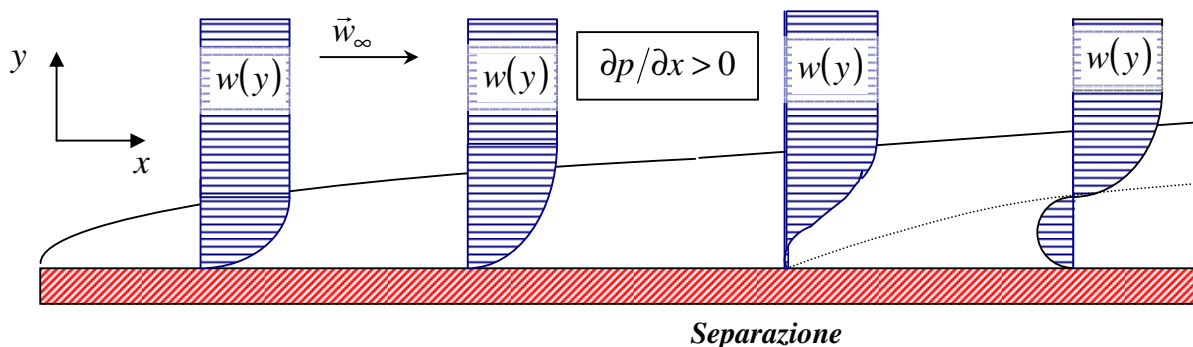
lo strato limite è relativamente sottile e allora l'insorgere di instabilità che portano alla turbolenza può essere ritardato

◆  $\partial p / \partial x > 0 \Rightarrow$  *s.l. in gradiente di pressione avverso*

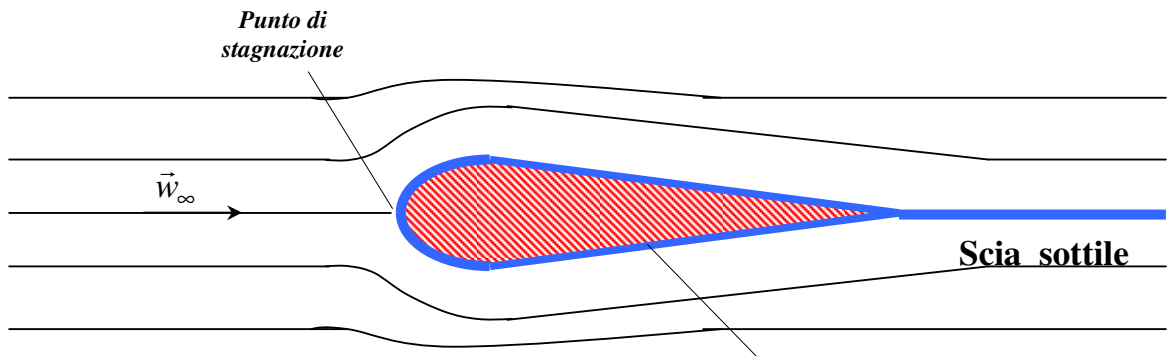
in questo caso il fluido esterno sta decelerando ( $\partial w_\infty / \partial x < 0$ ) e lo strato limite tende ad ingrossarsi ed, eventualmente, può anche separarsi dalla parete



- La separazione dello strato limite è contraddistinta dalla presenza di una regione a corrente invertita ( $\vec{w}$  cambia verso). Il punto di separazione sulla parete è quello in cui  $\partial w_x / \partial y = 0$



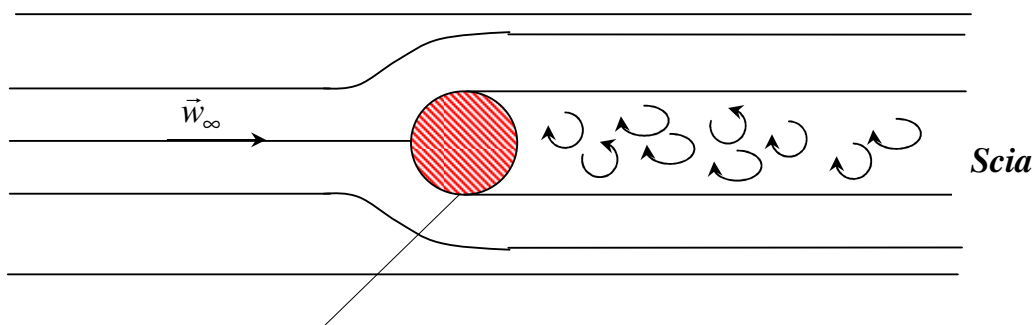
- Se il corpo esposto alla corrente è sufficientemente affusolato, allora la zona posteriore è caratterizzata da un piccolo valore di  $\partial p/\partial x > 0$  e lo strato limite può non separarsi



Strato limite

Il moto può allora essere studiato applicando le equazioni per fluido inviscido per la corrente esterna e le equazioni dello strato limite per la zona viscosa. Per  $M = w/w_{suono} < 1$ , la portanza (forza sul corpo normale alla direzione del moto) viene determinata con le equazioni per fluido inviscido, la resistenza (forza sul corpo parallela alla direzione del moto) tramite le eq. dello s.l..

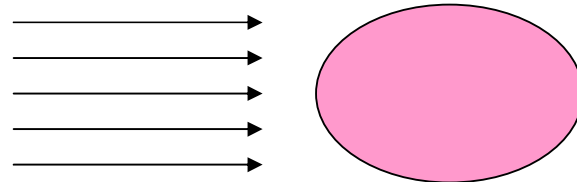
- La separazione dello strato limite modifica sensibilmente i campi di moto intorno al corpo dando luogo a maggiori cadute di pressione rispetto al caso in cui non si abbia separazione: non si può più applicare la teoria per fluido inviscido per il campo di moto esterno nella zona a valle del corpo (paradosso di D'Alembert)



Punto di separazione dello strato limite

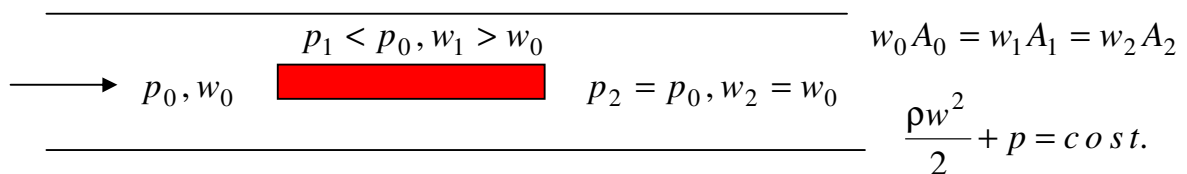
- D'Alembert espresse questo problema dichiarando di non essere in grado di calcolare tramite la teoria (eq. di Eulero, cioè per fluido inviscido) la forza di resistenza effettivamente osservata su un corpo esposto ad un flusso di fluido

- Infatti, il applicando le equazioni di Eulero al moto di un fluido attorno ad un corpo isolato si otteneva che la distribuzione delle pressioni su di esso produceva una forza risultante nulla, cosa contraria all'evidenza sperimentale



- Ciononostante, le equazioni di Eulero erano in grado di fornire indicazioni ragionevoli in relazione a molti altri parametri del moto (ad es., per la velocità a distanza sufficiente dal corpo)

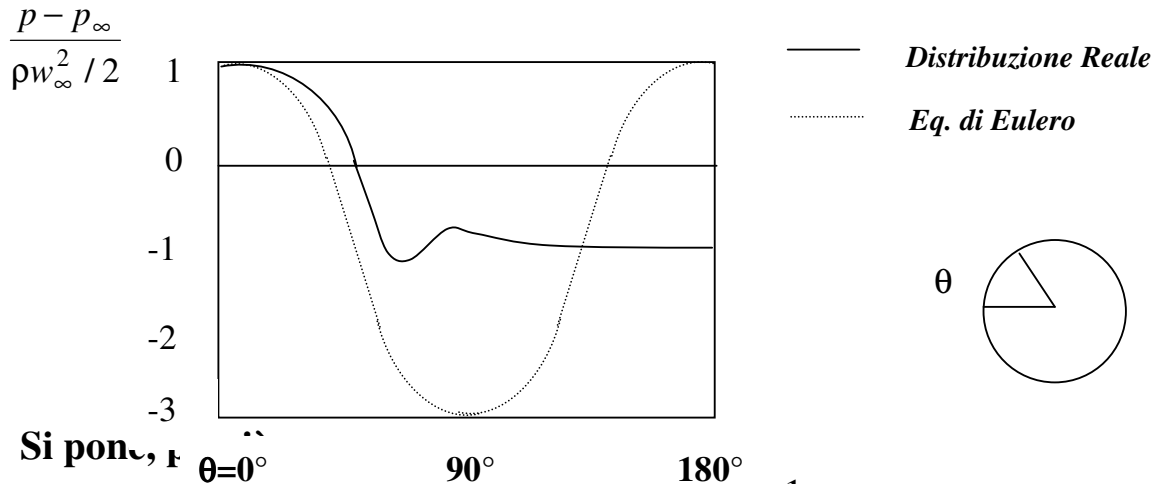
- La cosa può essere evidenziata anche applicando il teorema di Bernoulli al moto stazionario di un fluido incomprimibile in un tubo contenente un ostacolo



- La soluzione di questo apparente dilemma è legata alla presenza dello *strato limite* (Prandtl, 1904), la zona vicina al corpo in cui non è possibile trascurare l'effetto della viscosità, dovuta alla “no-slip condition”, cioè al fatto che il fluido aderisce al corpo

- Gli effetti di distacco dello strato limite e la formazione di scie turbolente sono ulteriori fenomeni che rendono ancor meno accettabile l'applicazione di formulazioni valide per fluidi inviscidi ad alcuni problemi pratici.

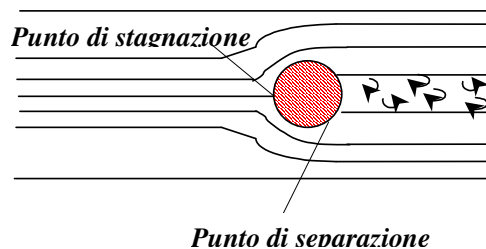
- Lo squilibrio tra la distribuzione delle pressioni sulla parte anteriore del corpo e su quella posteriore genera una resistenza proporzionale a  $\rho w_\infty^2 / 2$
- Infatti, nel caso di un cilindro esposto ad una corrente libera l'andamento qualitativo delle pressioni sulla superficie esterna è quello dato in Figura



- Si pone,  $F_D = \text{form drag force} = C_D A \frac{1}{2} \rho w_\infty^2$

in cui  $A$  è un'area di riferimento da definirsi caso per caso (ad es.,  $LD$  per un cilindro  $\pi D^2/4$  per una sfera)

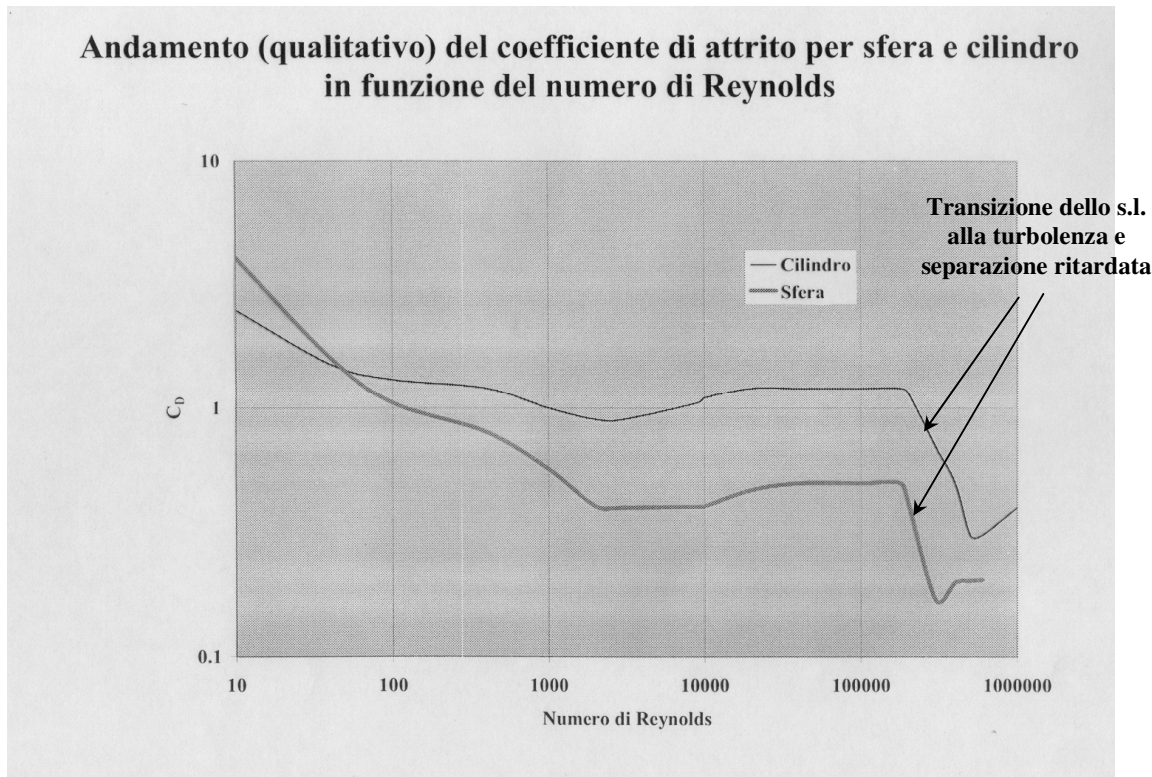
- Per uno strato limite laminare il distacco avviene anticipatamente rispetto al caso di uno strato limite turbolento; per questo in alcuni casi si favorisce la transizione alla turbolenza che tende a ritardare il distacco: ad es., le palline da golf hanno una resistenza all'aria molto minore di palline lisce dello stesso diametro perché la loro struttura superficiale favorisce la transizione alla turbolenza



Separazione ritardata a causa della turbolenza dello strato limite

- A bassi valori del numero di Reynolds, la resistenza è essenzialmente di natura viscosa (*resistenza viscosa = viscous drag o friction*)

$$\vec{F}_{frict} = \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS$$



- In alcuni casi, si stabilisce anche una forza ortogonale alla moto del fluido, detta portanza (“*lift*”). Essa è data da una espressione del tipo ( $A$  è diversa da quella che compare nella formula del drag)

$$F_L = lift\ force = C_L A \frac{1}{2} \rho w_\infty^2$$

- E' bene ricordare che risulta approssimativamente

$$\left| \vec{F}_{form\ drag} \right| \propto \frac{1}{2} \rho w_\infty^2 \quad \left| \vec{F}_{frict} \right| \propto \mu w_\infty$$

### Equazioni dello Strato Limite Laminare (Prandtl)

- Le equazioni del moto nell'approssimazione dello strato limite vengono ottenute semplificando le equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale stazionario sulla base di considerazioni di ordine di grandezza
- Per fluido incomprimibile, trascurando l'effetto della gravità, si ha:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right)$$

- Queste equazioni vengono semplificate tenendo conto dell'importanza quantitativa dei vari termini; ad esempio la derivata seconda della velocità lungo x e il gradiente di pressione lungo y vengono trascurati

- Si osserva che:

- ♦ la scala di  $w_x$  è  $w_\infty$ ; infatti,  $w_x$  varia tra 0 e  $w_\infty$ , cioè

$$w_x = O(w_\infty)$$

- ♦ la scala di lunghezza della coordinata  $x$  è  $L$

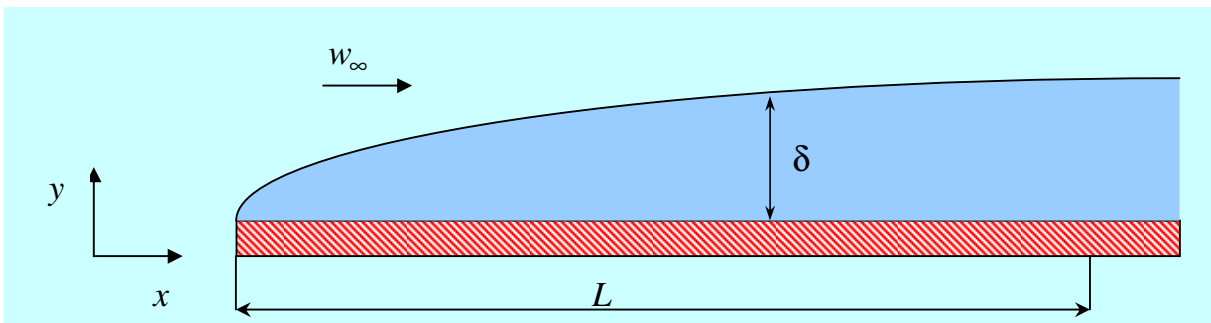
$$x = O(L)$$

- ♦ la scala di lunghezza della coordinata  $y$  è lo spessore dello strato limite  $\delta \ll L$

$$y = O(\delta)$$

- ♦ per le derivate prime di  $w_x$  risulta, quindi

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = O\left(\frac{w_\infty}{L}\right) \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = O\left(\frac{w_\infty}{\delta}\right)$$



- ◆ l'equazione di continuità permette allora di ottenere l'ordine di grandezza di  $w_y$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{\partial w_y}{\partial y} = O\left(\frac{w_\infty}{L}\right) \Rightarrow w_y = O\left(w_\infty \frac{\delta}{L}\right)$$

- ◆ per le derivate prime di  $w_y$  si ha allora

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} = O\left(w_\infty \frac{\delta}{L^2}\right) \quad \frac{\partial w_y}{\partial y} = O\left(w_\infty \frac{1}{L}\right)$$

- ◆ per le derivate seconde di  $w_x$  e  $w_y$  risulta, inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} &= O\left(\frac{w_\infty}{L^2}\right) & \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} &= O\left(\frac{w_\infty}{\delta^2}\right) \\ \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} &= O\left(w_\infty \frac{\delta}{L^3}\right) & \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} &= O\left(w_\infty \frac{1}{L\delta}\right) \end{aligned}$$

- Per i termini delle due equazioni del moto si ha, dunque

$$\begin{aligned} \underbrace{w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}}_{O\left(\frac{w_\infty^2}{L}\right)} + \underbrace{w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}}_{O\left(\frac{w_\infty^2}{L}\right)} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{v \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}}_{O\left(v \frac{w_\infty}{L^2}\right)} + \underbrace{v \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}}_{O\left(v \frac{w_\infty}{\delta^2}\right)} \\ \underbrace{w_x \frac{\partial w_y}{\partial x}}_{O\left(w_\infty^2 \frac{\delta}{L^2}\right)} + \underbrace{w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}}_{O\left(w_\infty^2 \frac{\delta}{L^2}\right)} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{v \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}}_{O\left(v w_\infty \frac{\delta}{L^3}\right)} + \underbrace{v \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}}_{O\left(v w_\infty \frac{1}{L\delta}\right)} \end{aligned}$$

- Sulla base di queste considerazioni si ha che:

- ◆ a primo membro delle due equazioni vi sono termini dello stesso ordine di grandezza
- ◆ nel laplaciano delle due equazioni la derivata seconda rispetto ad  $x$  può essere trascurata nei confronti di quella rispetto ad  $y$

$$v \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \ll v \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad v \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} \ll v \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}$$

- ◆ in ciascuna equazione, il termine di pressione avrà lo stesso ordine di grandezza del più grande degli altri termini

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = O\left(\frac{w_\infty^2}{L}\right) = O\left(v \frac{w_\infty}{\delta^2}\right) \gg \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = O\left(w_\infty^2 \frac{\delta}{L^2}\right) = O\left(v w_\infty \frac{1}{L\delta}\right)$$

perciò le variazioni di  $p$  lungo  $y$  possono essere trascurate

- Conseguentemente, si può assumere che il gradiente di pressione nello strato limite lungo  $x$  sia lo stesso che si ha nella corrente esterna

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial p_\infty}{\partial x}$$

Dalle equazioni di Eulero nella corrente esterna, tenendo conto che non si ha variazione di velocità lungo  $y$ , si ha

$$w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_\infty}{\partial x}$$

- Il procedimento mostra che, nei limiti di questa approssimazione, le equazioni sufficienti per descrivere il moto sono due sole, che sono le *equazioni dello strato limite*

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

- Queste equazioni sono state risolte da Blasius per gradiente di pressione nullo: si assume che non vi sia variazione di velocità e quindi di pressione nella corrente esterna e si risolvono le equazioni

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

con le condizioni al contorno

$$w_x = w_y = 0 \quad y = 0$$

$$w_x \rightarrow w_\infty \quad y \rightarrow \infty$$

- L'intuizione fisica suggerisce di cercare una soluzione del tipo

$$w_x = w_\infty F\left[y/\Delta(x)\right]$$

con  $\Delta(x) \propto \delta(x)$  = *spessore locale dello strato limite*.



- La soluzione sarà allora *autosimile*, cioè tale che per ogni valore di  $x$  il profilo di velocità abbia lo stesso andamento rispetto ad  $y/\Delta(x)$
- Allo scopo di ridurre le funzioni incognite ad una sola, si introduce la *funzione di corrente*  $\psi$  (“stream function”) che soddisfa le relazioni

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad w_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- Sulla base di questa definizione si nota che:
  - ◆ l’equazione di continuità è identicamente soddisfatta; infatti:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

- ◆ la funzione di corrente è costante sulle linee di flusso; infatti:

$$\left. \frac{d\psi}{ds} \right|_{\vec{w}} = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{w} = \frac{\partial \psi}{\partial x} w_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} w_y = -w_y w_x + w_x w_y = 0$$

- Si nota poi che ponendo

$$\psi(x, y) = w_\infty \Delta(x) f [y/\Delta(x)]$$

si ha

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = w_\infty f' [y/\Delta(x)]$$

che ha la forma  $w_x = w_\infty F [y/\Delta(x)]$  purché si ponga

$$f' = F$$

- In questo modo, Blasius mostrò che il problema alle derivate parziali poteva essere ricondotto a

$$ff'' + 2f''' = 0$$

che è una equazione differenziale ordinaria nella funzione incognita  $f(\eta)$  della sola variabile  $\eta$  tale che  $f' = w_x/w_\infty$  e può essere risolta numericamente con le condizioni al contorno

$$w_x = 0 \text{ per } y = 0 \Rightarrow f' = 0 \text{ per } \eta = 0$$

$$w_x \rightarrow w_\infty \text{ per } y \rightarrow \infty \Rightarrow f' \rightarrow 1 \text{ per } \eta \rightarrow \infty$$

ed una ulteriore condizione necessaria per definire univocamente il valore di  $f(\eta)$

$$f = 0 \text{ per } \eta = 0$$

- Si ottiene in particolare che

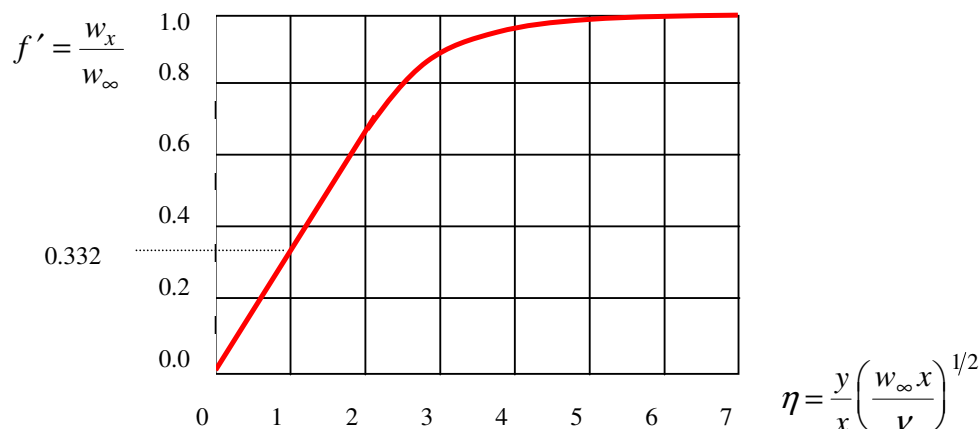
$$f' = 0.99 \text{ per } \eta = 4.99$$

per cui lo spessore dello strato limite, come definito classicamente, risulta

$$\delta(x) = 4.99 \left( \frac{\nu x}{w_\infty} \right)^{1/2} = 4.99 x \left( \frac{\nu}{w_\infty x} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\delta(x)}{x} = 4.99 Re_x^{-0.5} \quad Re_x = \frac{w_\infty x}{\nu}$$

ovvero lo strato limite è piccolo quando il numero di Reynolds è elevato



Profilo di Blasius

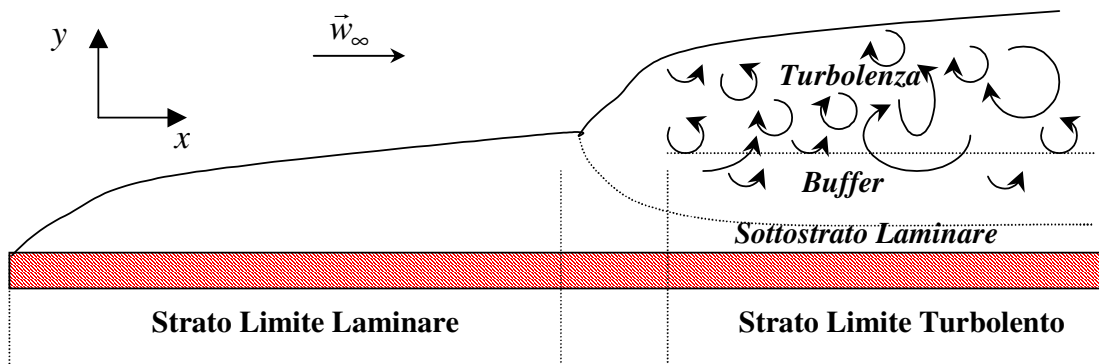
- Considerando il gradiente del profilo di velocità in prossimità della parete valutato da Blasius si ha (v. la derivata  $\approx 0.332$  in figura)

$$\tau_w = C_D \frac{1}{2} \rho w_\infty^2 \quad C_D = 0.664 Re_x^{-0.5}$$

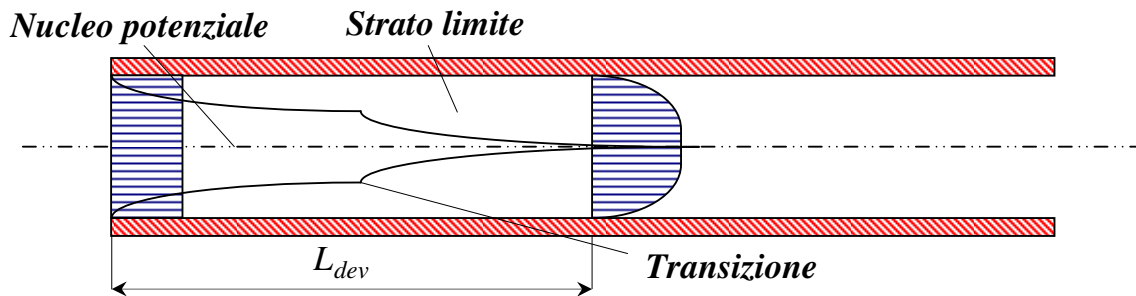
che esprimono lo sforzo di taglio alla parete ed il coefficiente di attrito nel caso di una piastra piana esposta ad una corrente laminare

### Transizione alla turbolenza nello strato limite

- Nello strato limite, il profilo di velocità di Blasius è soggetto ad instabilità



- Per studiare analiticamente la stabilità di un sistema, si adotta il procedimento dell'analisi di stabilità lineare che ha come scopo la *la determinazione delle condizioni di stabilità a seguito di perturbazioni infinitesime*
- Si nota che esiste un valore critico del numero di Reynolds al di sotto del quale nessuna perturbazione viene amplificata ( $Re = w_\infty \delta / \nu \approx 1500$ ); per valori superiori si ha transizione alla turbolenza
- Nel caso di un fluido in moto laminare in un tubo, la ben nota transizione alla turbolenza, dimostrata da Reynolds in un celebre esperimento, può essere spiegata con l'instabilità dello strato limite in formazione all'imbocco del condotto



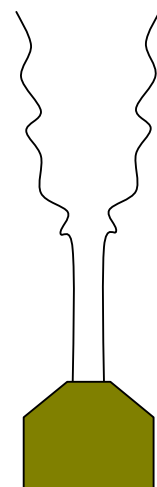
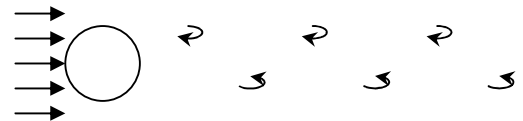
- Ciò dipende anche dalle modalità con cui il fluido entra nel condotto (ad es., forma della zona di ingresso) e dal livello di disturbi in gioco (ad es., vibrazioni del sistema)
- Ne risulta una notevole variabilità del numero di Reynolds a cui avviene la transizione

$$(Re_D)_{crit} = \left( \frac{\rho \bar{w} D}{\mu} \right)_{crit} \approx 2000 \div 10^4 \left( \begin{array}{l} \text{generalmente a } 4000 \\ \text{il moto è turbolento} \end{array} \right)$$

- Anche i getti sono soggetti alla transizione al moto turbolento; ciò avviene per valori del numero di Reynolds dell'ordine di 10 (contro  $10^3$  nel caso dello strato limite)
- Nel caso del moto esterno su cilindri investiti ortogonalmente all'asse, si ha dapprima il distacco di un pattern regolare di vortici di von Karman ( $Re \approx 40$ ) la cui frequenza segue la legge

$$St = fD/w_\infty \approx 0.2$$

( $St$ =numero di Strouhal); per  $Re > 300$  la regolarità viene progressivamente perduta e si ottiene una scia sempre più turbolenta



## Distribuzione della velocità in moto turbolento su piastra piana

- In moto turbolento, si fa spesso riferimento ad una scala di velocità caratteristica della regione della parete, detta *shear velocity* o *velocità di attrito*

$$w_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Sperimentalmente si è verificato che l'intensità di turbolenza (cioè l'intensità delle fluttuazioni della velocità) ha come scala  $w_\tau$

- La distribuzione di velocità in vicinanza della parete può quindi essere descritta come una funzione di tre grandezze

$$w_z(y) = F(w_\tau, y, \nu)$$

In forma adimensionale si ha

$$w_z^+(y^+) = F(y^+)$$

in cui

$$w_z^+(y^+) = \frac{w_z(y)}{w_\tau} \quad \text{e} \quad y^+ = \frac{w_\tau y}{\nu}$$

sono rispettivamente la *velocità adimensionale (universale)* e la *distanza dalla parete adimensionale*

- In prossimità della parete (nel sottostrato laminare,  $y^+ \leq 5 \div 8$ ) si può assumere che il profilo di velocità sia lineare

$$w_z(y) = \frac{\tau_w}{\mu} y$$

perciò

$$w_z(y) = \frac{\tau_w}{\rho} \frac{y}{\nu} = w_\tau^2 \frac{y}{\nu} \quad \Rightarrow \quad w_z^+(y^+) = w_\tau \frac{y}{\nu} = y^+$$

ovvero

$$w_z^+(y^+) = y^+ \quad (\text{vicino alla parete})$$

- Lontano dalla parete (oltre il sottostrato laminare,  $y^+ > 30$ ) la viscosità gioca un ruolo sempre meno importante; perciò, le variazioni di velocità non dipenderanno più da  $\nu$

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = F(w_\tau, y) \quad (\text{lontano dalla parete})$$

e si può porre

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{w_\tau}{K y}$$

in cui  $K$  è detta *costante di von Karman* e si trova sperimentalmente che essa ha un valore universale prossimo a **0.41**

- Perciò, a sufficiente distanza dalla parete l'andamento del profilo di velocità è di tipo logaritmico

$$\frac{dw_z}{dy} = \frac{w_\tau}{K y} \Rightarrow w_z(y) = \frac{w_\tau}{K} \ln y + C$$

e, in termini adimensionali, si pone

$$w_z^+(y^+) = \frac{1}{K} [\ln y^+ + A]$$

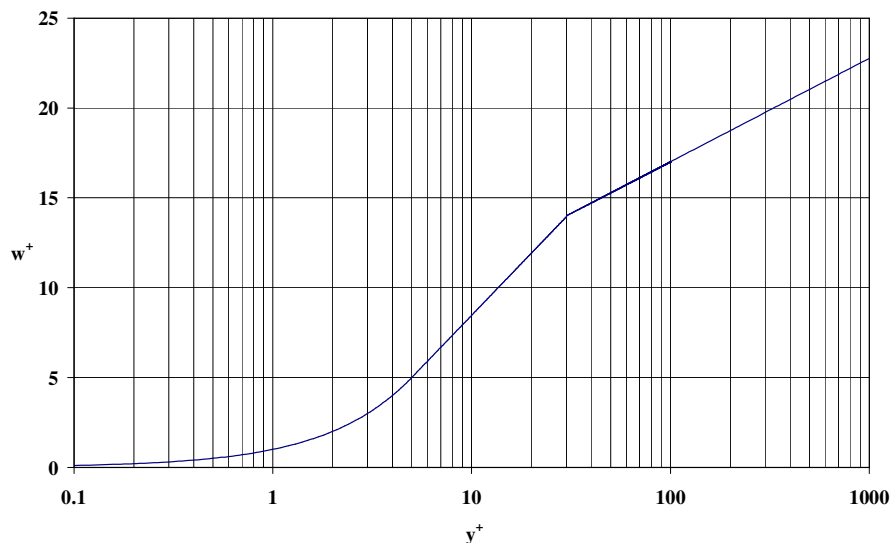
- Con riferimento alle tre zone in cui è suddiviso lo strato limite turbolento (sottostrato laminare, zona di transizione e zona turbolenta) è quindi possibile descrivere il profilo universale di velocità come segue

$$w_z^+(y^+) = y^+ \quad y^+ \leq 5$$

$$w_z^+(y^+) = -3.05 + 5.00 \ln y^+ \quad 5 < y^+ \leq 30$$

$$w_z^+(y^+) = 5.5 + 2.5 \ln y^+ \quad y^+ > 30$$

Si noti che  $2.5 \approx 1/0.41 \approx 1/K$

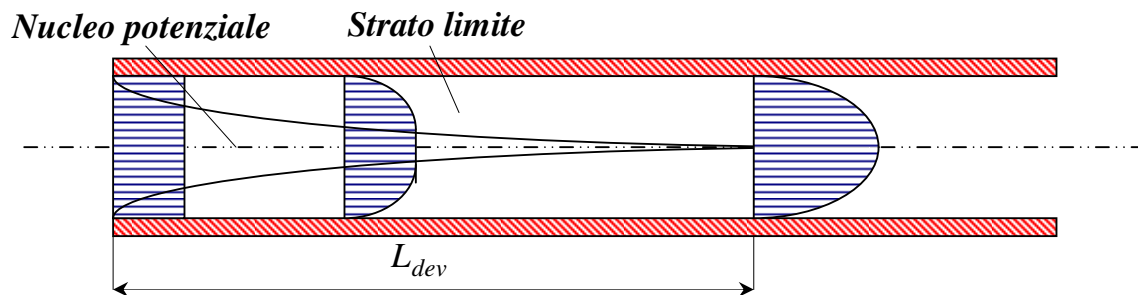


- La validità del profilo logaritmico cessa nella parte esterna dello strato limite

### Moto Interno ad un Condotto

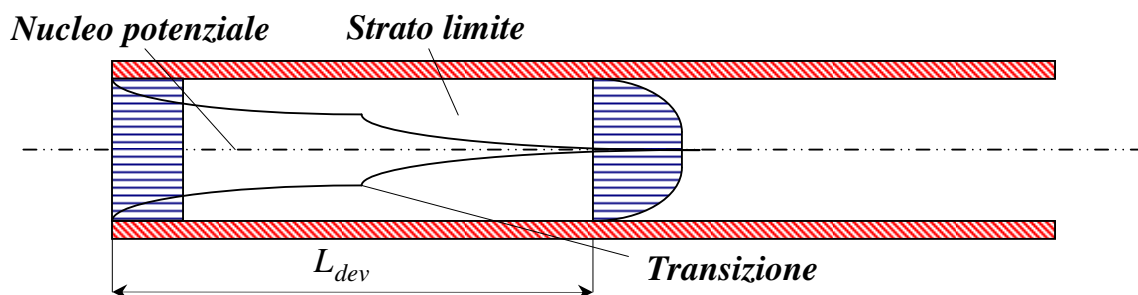
- Nel caso del moto di un fluido all'interno di un condotto, lo strato limite comincia a formarsi nella zona di imbocco determinando un'accelerazione del nucleo in moto potenziale al centro
- Si ha che:
  - ◆ per basso  $Re$  ( $Re < 2 \times 10^3$ ) lo strato limite si mantiene laminare e termina in una corrente laminare stazionaria; la lunghezza necessaria per lo sviluppo del moto è data da:

$$L_{dev} \approx (0.03 \div 0.05) \times Re_D D$$



- ◆ lo strato limite e la corrente possono subire transizione a moto turbolento ad un valore di  $Re$  dipendente anche dal livello di disturbo presente ( $Re > 2 \times 10^3 \div 10^4$ ); normalmente per  $Re > 4000$ , il moto può considerarsi turbolento; la lunghezza di sviluppo è di circa 30-60 diametri e il profilo di velocità è più piatto

$$L_{dev} \approx (30 \div 60)D$$



- Nel moto all'interno di condotti circolari il profilo di velocità si approssima con *leggi di potenza*

$$w_z(r) = w_{z,\max} \left[ \frac{y}{R} \right]^n = w_{z,\max} \left[ 1 - \frac{r}{R} \right]^n$$

in cui  $n$  assume valori appropriati. Una scelta frequente è quella del *profilo di potenza*  $1/7$

$$w_z(r) = w_{z,\max} \left[ 1 - \frac{r}{R} \right]^{1/7}$$

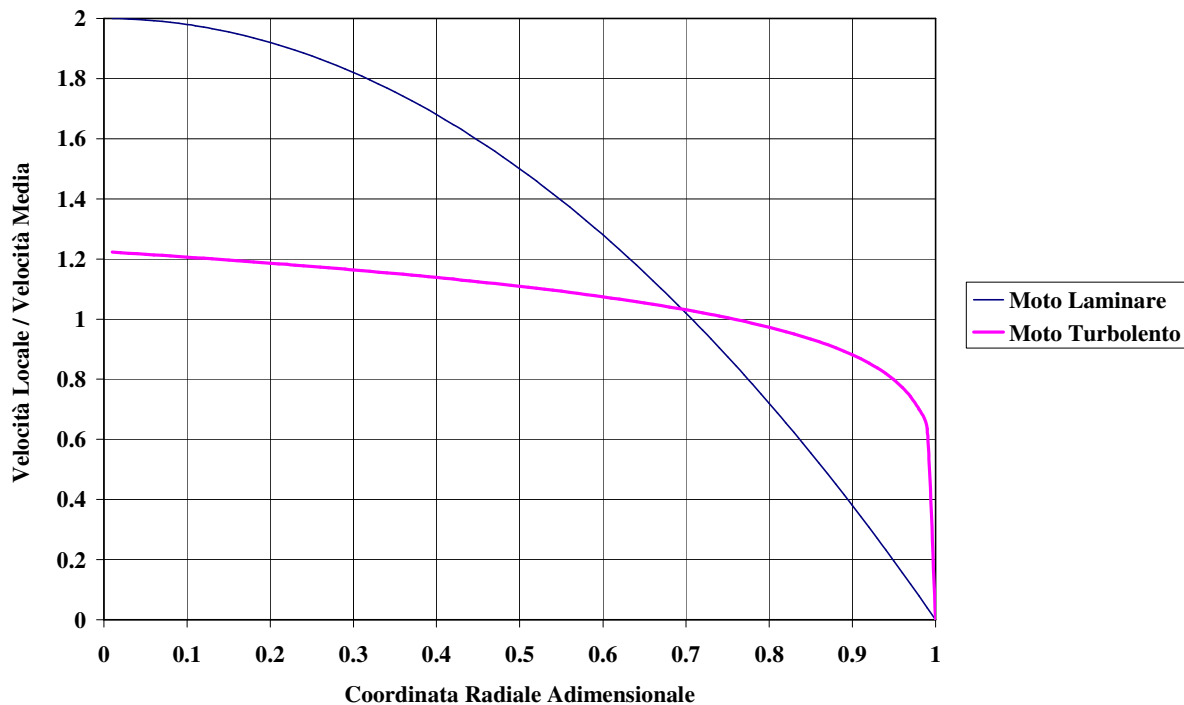
- Si nota che il profilo di velocità in moto turbolento in un condotto circolare è più appiattito che in caso di moto laminare; infatti:

◆ *in moto laminare*

$$w_z(r) = w_{z,\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad \bar{w}_z = 0.5 w_{z,\max}$$

◆ *in moto turbolento con profilo di potenza 1/7*

$$\bar{w}_z = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R w_{z,\max} \left[ 1 - \frac{r}{R} \right]^{1/7} 2\pi r dr = \frac{49}{60} w_{z,\max} = 0.817 w_{z,\max}$$



- Inoltre a parità di portata, nel moto turbolento le perdite di carico per attrito sono maggiori che nel moto laminare



## Perdite di carico distribuite e fattori di attrito in moto turbolento

- Abbiamo visto che le perdite di carico per attrito in un condotto,  $\Delta p_f$  (in termini di pressione) o  $H_f$  in termini di altezza, si possono valutare tramite la relazione di *Darcy-Weisbach*

$$\Delta p_f = f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2 = [Pa] \qquad H_f = f \frac{L}{D} \frac{\bar{w}_z^2}{2g} = [m]$$

in cui  $f$  è il fattore di attrito (di Darcy-Weisbach)

- Nel caso del moto laminare in un condotto cilindrico, vale la legge di Poiseuille che fornisce:

$$f = \frac{64}{Re} \qquad Re = \frac{\rho \bar{w}_z D}{\mu}$$

traducendo la diretta proporzionalità tra  $\Delta p_f$  e portata volumetrica espressa dalla legge di Poiseuille-Hagen (v. lez. precedenti)

- Per moto turbolento, si trova, invece, che per *tubi lisci* la relazione tra portata volumetrica,  $Q = A \bar{w}_z$ , e perdite di carico per attrito è del tipo

$$\Delta p_f \propto Q^m$$

con  $m$  dell'ordine di  $7/4$

- Essendo, perciò

$$\frac{\Delta p_f}{L} \propto Q^{7/4} \propto \bar{w}_z^{7/4}$$

per cui risulta

$$\frac{f}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2 = \frac{\Delta p_f}{L} \propto \bar{w}_z^{7/4} \Rightarrow f \propto \frac{\bar{w}_z^{7/4}}{\bar{w}_z^2} = \bar{w}_z^{-0.25}$$

- La *relazione di Blasius*, in particolare, ha la forma:

$$f = 0.316 Re^{-0.25} \qquad Re < 30000, \text{ tubi lisci}$$

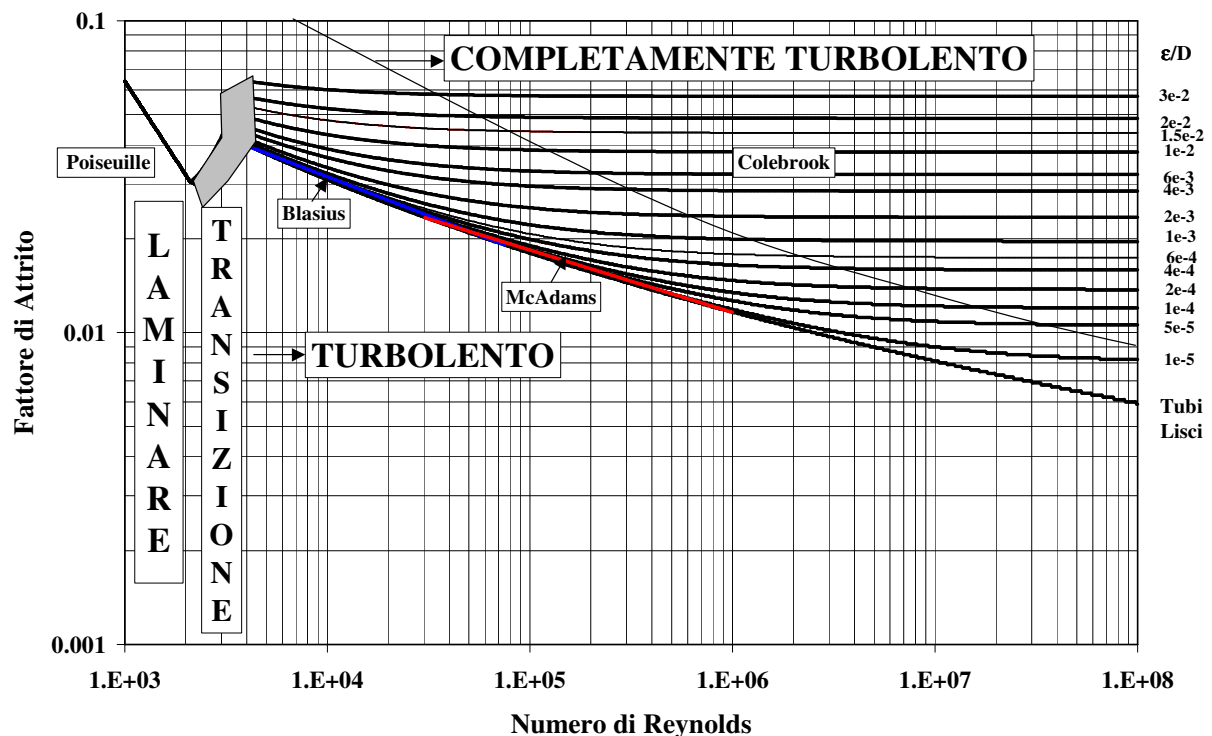
- Sempre per tubi lisci, ma a più elevato numero di Reynolds, si ha invece la *relazione di McAdams*

$$f = 0.184 Re^{-0.2} \qquad 30000 < Re < 1000000, \text{ tubi lisci}$$

- Per tubi con rugosità non trascurabile, invece, si nota che ad elevati numeri di Reynolds il fattore di attrito raggiunge un valore asintotico dipendente solo dal parametro di rugosità  $\varepsilon/D$ , in cui  $\varepsilon$  rappresenta la rugosità superficiale [m]
- Ciò rende ragione della forma assunta dalla formula di Darcy-Weisbach che suggerisce una dipendenza delle perdite di carico dal quadrato della velocità
- Valgono *formule empiriche* del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.70} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right] \quad (\text{Colebrook})$$

che rappresentano approssimazioni del *diagramma di Moody*



(riportato qualitativamente in figura)

- E' bene ricordare nuovamente che tra il *fattore di Darcy-Weisbach*,  $f$ , ed il *fattore di Fanning*,  $f'$ , sussiste la relazione

$$f' = \frac{f}{4}$$

Perciò, quando si voglia calcolare il fattore di Fanning, i valori forniti dalle relazioni precedenti devono essere divisi per 4

- Dal diagramma di Moody si può notare che:
  - ◆ per  $Re < 2000$ , si applica la legge di Poiseuille,  $f = 64/Re$
  - ◆ per  $2000 < Re < 4000$ , si ha una zona di transizione in cui non è possibile predire con precisione il regime di moto
  - ◆ per  $Re > 4000$ , si considera che il moto sia turbolento, anche se non completamente sviluppato: il fattore di attrito diminuisce con l'aumentare del numero di Reynolds anche per tubi rugosi
  - ◆ le relazioni di Blasius e McAdams forniscono approssimazioni "locali" del fattore di attrito per tubi lisci
  - ◆ per  $Re$  sufficientemente elevato e tubi rugosi si ha un moto turbolento completamente sviluppato:  $f$  non varia più con  $Re$
  - ◆ la transizione a moto turbolento completamente sviluppato avviene per valori di  $Re$  tanto più bassi quanto più elevata è la rugosità

L'ultima delle precedenti osservazioni trova la sua giustificazione nell'assottigliarsi del sottostrato laminare con l'aumentare di  $Re$  che produce una interazione diretta tra turbolenza e asperità superficiali.

- Valori tipici per la rugosità sono:

| Materiale                     | $\varepsilon$ [m]    |
|-------------------------------|----------------------|
| Vetro, plastica               | Liscio               |
| Rame, ottone, piombo (tubi)   | $1.5 \times 10^{-6}$ |
| Acciaio commerciale o saldato | $4.6 \times 10^{-5}$ |
| Acciaio lavorato              | $4.6 \times 10^{-5}$ |
| Acciaio dolce rivestito       | $1.2 \times 10^{-4}$ |
| Acciaio dolce non rivestito   | $2.4 \times 10^{-4}$ |
| Cemento                       | $1.2 \times 10^{-4}$ |
| Acciaio rivettato             | $1.8 \times 10^{-3}$ |

(v. R.L. Mott "Applied Fluid Mechanics", 5<sup>th</sup> Edition, Prentice Hall)

(valori medi per tubi nuovi e puliti)

- Un'altra formula pratica per la valutazione del coefficiente di attrito nel campo turbolento è quella di *P.K. Swamee and A.K. Jain*, che ha il vantaggio di essere esplicita

$$f = \frac{0.25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{1}{3.7(D/\epsilon)} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (5000 < Re < 10^8, 100 < D/\epsilon < 10^6)$$

- Una formula che copre l'intero intervallo di numeri di Reynolds è (sia in moto laminare che turbolento) è quella di *Churchill*

$$f = 8 \left[ \left( \frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{3/2}} \right]^{1/12}$$

in cui

$$A = \left[ 2.457 \ln \left\{ \frac{1}{(7/Re)^{0.9} + 0.27 (\epsilon/D)} \right\} \right]^{16} \quad B = \left[ \frac{37530}{Re} \right]^{16}$$

- E' possibile trovare in letteratura altre formulazioni che forniscono valori approssimati del fattore di attrito
- La formula di Darcy-Weisbach può essere utilizzata anche nel caso di tubazioni con sezione non circolare. In questo caso si definisce un "diametro idraulico" tramite la relazione:

$$D_h = \frac{4 \times \text{area}}{\text{perimetro bagnato}}$$

- Ad es., nel caso di un condotto anulare si ha:

$$D_h = \frac{4 \times \pi (R_e^2 - R_i^2)}{2\pi R_i + 2\pi R_e} = 2 \frac{R_e^2 - R_i^2}{R_i + R_e} = D_e - D_i$$

e similmente per altre geometrie.

- Esso viene utilizzato come diametro caratteristico del condotto per ottenere valori approssimati delle perdite di carico per attrito.

### Relazioni per la valutazione diretta della portata in un condotto

- Esistono anche formulazioni che forniscono direttamente la velocità o la portata volumetrica in una condotta percorsa da un fluido assegnato in determinate condizioni
- Ad esempio, la *formula di Hazen-Williams* fornisce il valore della velocità media in un tubo di diametro compreso tra 2" (circa 5 cm) e 6 ft (circa 1.8 m) percorso da acqua a 60° F (15.6 °C) nella forma

$$\bar{w} = 0.85 C_h R^{0.63} s^{0.54}$$

in cui  $C_h$  (60 - 150) dipende dalle condizioni della superficie del tubo,  $R$  è il raggio idraulico definito dalla relazione

$$R = \frac{\text{area della sezione}}{\text{perimetro bagnato}} = \frac{A}{\Pi_w}$$

ed è

$$s = \frac{H_L}{L} = \frac{\text{perdita di carico [m]}}{\text{lunghezza [m]}}$$

Per l'applicabilità di questa formula la velocità non dovrebbe essere superiore a 10 ft/s (circa 3 m/s)

- Il vantaggio di formulazioni pratiche di questo tipo rispetto all'applicazione del teorema di Bernoulli o dell'equazione della quantità di moto con la valutazione delle perdite di carico risiede nella possibilità di evitare il processo iterativo dovuto alla dipendenza del fattore di attrito dalla portata
- Per contro, l'uso della formula è limitato al caso dell'acqua nelle condizioni specificate e, ad esempio, nel caso di temperature troppo diverse da quella specificata si possono ottenere predizioni non accurate
- In termini di portata volumetrica, la formula di Hazen-Williams diventa, ovviamente

$$Q = 0.85 A C_h R^{0.63} s^{0.54}$$

- Sono anche disponibili nomogrammi per la valutazione diretta della portata in funzione degli altri dati (v. ad es., *R.L. Mott "Applied Fluid Mechanics", 5th Edition, Prentice Hall*)

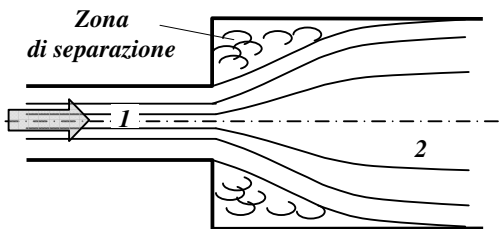
## Perdite di carico locali (o minori o singolari)

- All'interno di un condotto possono essere presenti anche ostacoli quali ostruzioni, restringimenti o allargamenti bruschi della sezione e tratti curvilinei
- La loro presenza causa *perdite di carico localizzate (o minori o singolari)* che si aggiungono a quelle dovute all'attrito distribuito
- Queste perdite di carico vengono valutate tramite relazioni del tipo

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_z^2 = [Pa] \quad H_L = K \frac{\bar{w}_z^2}{2g} = [m]$$

a seconda che si desideri averle in Pa o in metri, in cui  $K$  è un opportuno coefficiente che viene valutato sperimentalmente per la configurazione in esame

- Esistono manuali che ne riportano i valori per ogni tipo di ostacolo (v. ad es., “*Memento de pertes de charge*” di Idel'cik)
- Consideriamo alcune configurazioni tipiche che introducono perdite di carico concentrate:



### ◆ Brusco allargamento

In questo caso, viene a generarsi una regione di turbolenza e separazione che dissipa energia.

L'estensione di tale regione è maggiore quanto maggiore è il

rapporto tra i diametri delle due tubazioni

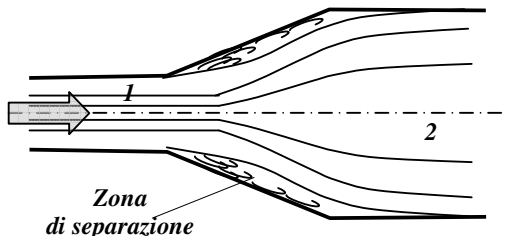
La perdita di carico relativa viene calcolata tramite la relazione

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_1^2$$

in cui compare la velocità al diametro più piccolo e si trova sperimentalmente che  $K$  dipende dal rapporto tra i diametri a monte e a valle e anche dalla velocità nel condotto.

Semplificando si può ottenere il seguente risultato

$$K = [1 - (A_1/A_2)]^2$$



#### ◆ Allargamento graduale

Se l'allargamento è graduale, la perdita di carico è minore perché viene a ridursi la zona di separazione in prossimità della parete. Si ha ancora:

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_1^2$$

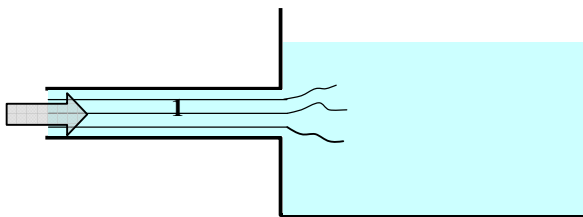
in cui  $K$  dipende fortemente dall'angolo di apertura del cono. Sono disponibili valori tabulati. La velocità di riferimento è ancora quella del tubo più piccolo.

Per un valore dell'angolo di apertura di  $7^\circ$  circa si ha un minimo delle perdite dovute all'attrito e all'allargamento.

Come si nota, sebbene i *diffusori ideali* di cui si è parlato applicando il teorema di Bernoulli permettano di convertire parte del carico cinetico in carico di pressione, nei *diffusori reali* sono presenti perdite di energia che danno luogo a valori inferiori della pressione nel tratto a maggior diametro rispetto a quelli predetti da Bernoulli.

#### ◆ Perdita di uscita

Quando una tubazione termina in una tanca di grosse dimensioni l'energia cinetica del fluido viene completamente dissipata.

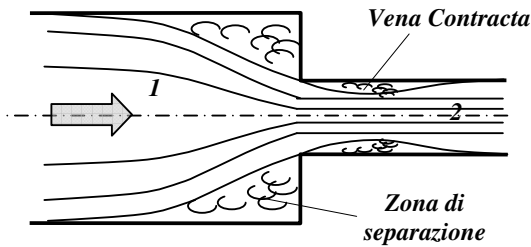


In questo caso si assume che tutta l'energia cinetica del fluido venga ad essere dissipata. Si ha perciò:

$$\Delta p_L = \frac{1}{2} \rho \bar{w}_1^2$$

cioè  $K=1$ ; come si vede la velocità di riferimento è quella del tubo in ingresso.

◆ **Brusco restringimento**



Nel caso di un brusco restringimento la perdita di energia avviene sia a causa della presenza di una zona di separazione che della formazione di una restrizione del tubo di flusso (*vena contracta*)

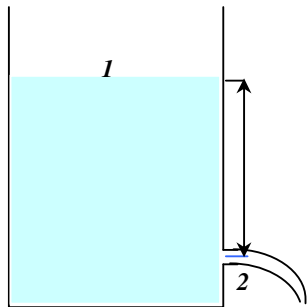
La ragione di questo fenomeno è legata all'incurvamento delle linee di flusso all'ingresso del restringimento che provano una separazione ed una nuova adesione dello strato limite alla parete.

Il coefficiente di perdita di carico concentrata dipende dal rapporto tra i diametri e dalla velocità. Si applica la formula

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_2^2$$

in cui la velocità di riferimento è quella della parte di tubo con diametro minore.

A proposito di *vena contracta* rivisitiamo un problema incontrato tra le applicazioni del teorema di Bernoulli. Per la tanca in figura il Teorema di Torricelli afferma che la velocità in uscita è



$$w = \sqrt{2gh}$$

La portata volumetrica attraverso l'orifizio, di area  $A_o$ , è però generalmente inferiore a  $A_o \sqrt{2gh}$  perché a seconda della

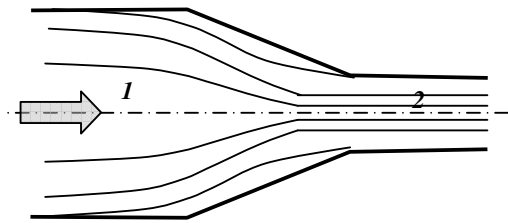
forma dell'orifizio si ha la formazione di una vena contracta che riduce l'area effettiva di efflusso. Si ha:

$$Q = C_{vc} A_o \sqrt{2gh}$$

in cui il coefficiente di vena contracta  $C_{vc}$  assume valori che vanno da circa 0.62 per un orifizio senza arrotondamento dei bordi ad 1 per un orifizio con bordi arrotondati in modo da seguire il flusso.



◆ **Restringimento graduale**



Per ridurre le perdite di carico in prossimità di un restringimento, si può adottare un tratto a forma di tronco conico.

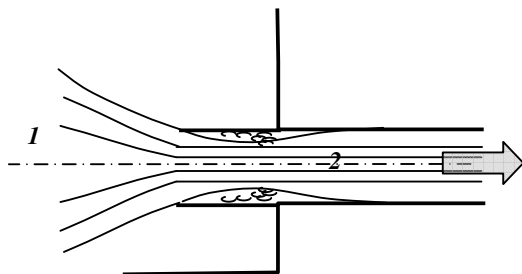
L'angolo di apertura del cono, il rapporto tra i diametri e  $Re$  sono i parametri da cui dipende  $K$  e la

formula per valutare la caduta di pressione è ancora

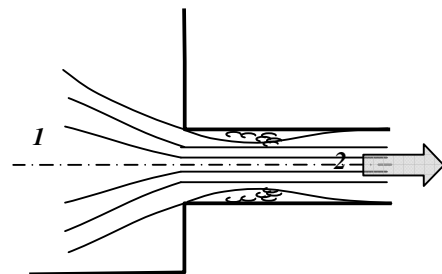
$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_2^2$$

Ad es., per aperture dell'ordine di  $15^\circ$ - $40^\circ$  il valore di  $K$  può essere molto piccolo ( $\leq 0.05$ ) per  $D_1/D_2 \leq 3$  e  $Re > 10^5$ .

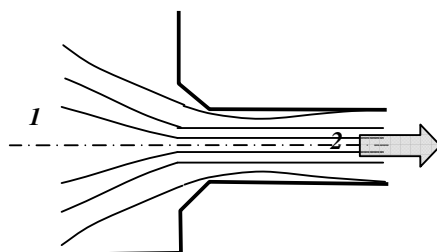
◆ **Perdite di ingresso**



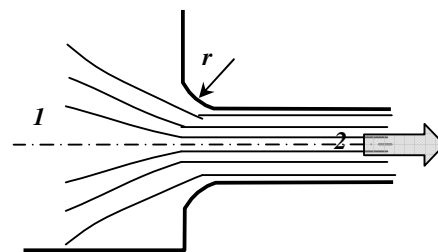
Tubo rientrante ( $K \approx 1$ )



Ingresso con spigoli vivi ( $K \approx 0.5$ )



Ingresso con raccordo conico ( $K = 0.25$ )



Ingresso con raccordo arrotondato ( $K = f(r / D_2)$ )

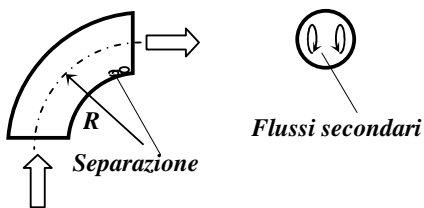
Si tratta di un caso particolare di contrazione, in cui il coefficiente di perdita di carico dipende molto dalla configurazione geometrica della zona di imbocco (ad es., raggio di raccordo). Si ha:

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}_2^2$$

### ◆ Tratti di tubazione curvilinei

Anche le curve sono sede di perdita di carico; ciò avviene essenzialmente per le seguenti ragioni:

- presenza di perdite di carico per attrito di tipo distribuito
- possibilità di separazione dello strato limite nella zona a valle della curva
- possibilità dell'instaurarsi di flussi secondari nei piani ortogonali all'asse a causa della forza centrifuga



La perdita di carico legata alla separazione e ai flussi secondari può essere valutata in funzione del rapporto  $R/D$  tra il raggio di curvatura dell'asse e il diametro del tubo

Talora i dati sono forniti per curve a  $90^\circ$  e possono essere estesi al caso di curve con diversa apertura tramite formule di conversione (v. *R.L. Mott, op. cit., pp. 293-294*)

Si ha ancora

$$\Delta p_L = K \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2$$

### ◆ Valvole ed altri componenti

Le tubazioni possono contenere anche valvole di vario genere e componenti quali giunzioni curve, a T, ecc..

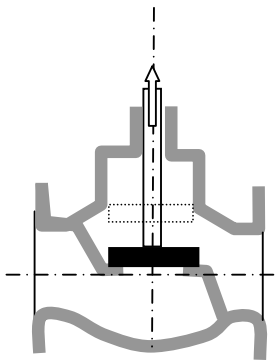
I coefficienti di perdita di carico relativi variano a seconda del tipo di componente e della sua geometria. Talora essi vengono forniti in termini di una lunghezza equivalente di tubo,  $L_e$ , nella forma

$$K = (L_e/D) f_T$$

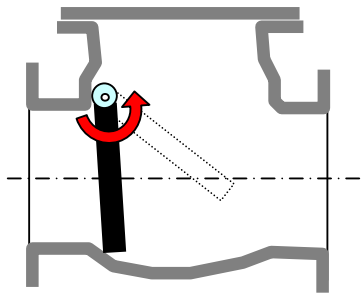
in cui  $f_T$  è il fattore di attrito per il tubo sul quale il componente è montato, valutato nella zona di completa turbolenza (elevato  $Re$ )

(v. *R.L. Mott, op. cit., pp. 284-293*)

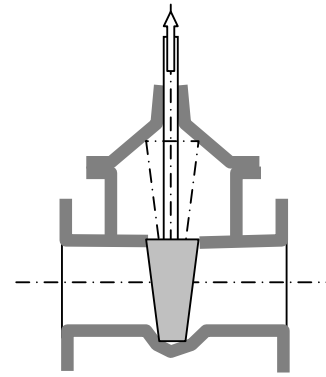
Alcune delle configurazioni tipiche per le valvole più comuni sono illustrate nel seguito.



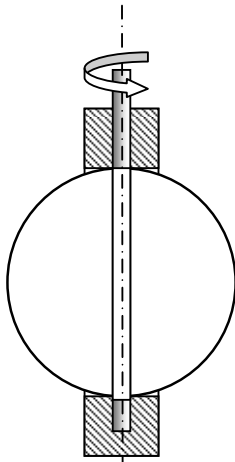
**Valvola ad otturatore**



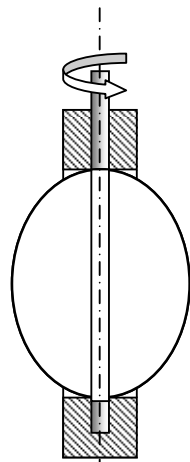
**Valvola di non-ritorno**



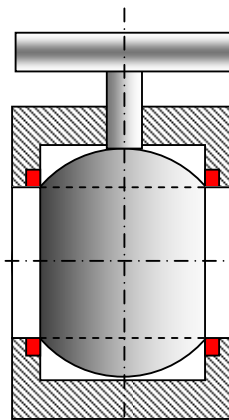
**Valvola a saracinesca**



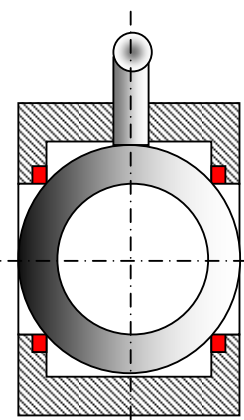
**Aperta**



**Parzialmente aperta**



**Aperta**



**Chiusa**

**Valvola a farfalla**

**Valvola a sfera**

**RIASSUMENDO: Allo scopo di dare un'idea grossolana dell'ordine di grandezza di  $K$  in casi di interesse si riporta la tabella seguente**

| <b>Tipo</b>                                            | <b>K</b>                        |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------|
| <b>Ingresso in un tubo circolare (bordo tagliente)</b> | <b>0.50</b>                     |
| <b>Ingresso in un tubo circolare (bordo smussato)</b>  | <b>0.25</b>                     |
| <b>Gomito a 45°</b>                                    | <b>0.42</b>                     |
| <b>Gomito a 90°</b>                                    | <b>0.90</b>                     |
| <b>Valvola ad otturatore (completamente aperta)</b>    | <b>10.0</b>                     |
| <b>Valvola a saracinesca (completamente aperta)</b>    | <b>0.19</b>                     |
| <b>Aumento brusco di sezione</b>                       | $(1 - A_{monte} / A_{valle})^2$ |

*(v. Hughes & Brighton, Fluid Dynamics, McGraw Hill, 3<sup>rd</sup> Ed.)*

## Cenni alle Caratteristiche delle Pompe

Le pompe sono elementi attivi utilizzati per permettere la circolazione dei liquidi all'interno di tubazioni.

In particolare, esse devono fornire la *prevalenza* necessaria a compensare le variazioni dei termini cinetici, piezometrici e geometrici nell'equazione di Bernoulli, nonché le perdite per attrito.

Considerate due sezioni del condotto identificate con 1 e 2, si ha:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} + z_1 + H_P - H_L = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + z_2$$

in cui  $H_L$  è la somma delle perdite di carico per attrito (distribuite e concentrate) in metri ed  $H_P$  è la *prevalenza* fornita dalla pompa.

La *potenza* fornita dalla pompa al fluido è data da

$$P_P = \Delta p_P Q = \left[ \frac{N}{m^2} \frac{m^3}{s} \right] = \left[ N \frac{m}{s} \right] = \text{forza} \times \text{velocità} = [W]$$

in cui  $Q$  è la portata volumetrica e  $\Delta p_P$  la variazione di pressione a cavallo della pompa; si ha anche

$$P_P = \rho g H_P Q \quad \text{ovvero} \quad P_P = \gamma H_P Q$$

in cui  $\gamma$  è il peso specifico del fluido.

La potenza così calcolata rappresenta quella ceduta al fluido. In realtà il motore applicato alla pompa deve fornire una potenza superiore perché una parte di tale potenza viene perduta:

- per l'attrito meccanico
- per la turbolenza indotta nel fluido al passaggio nella girante

Si definisce perciò un *rendimento*,  $0 < \eta_P < 1$ , che dipende dal tipo di pompa e permette di valutare la potenza richiesta al motore

$$P_M = \frac{P_P}{\eta_P}$$

Per pompe centrifughe si ha  $\eta_P \approx 0.50 \div 0.85$ .

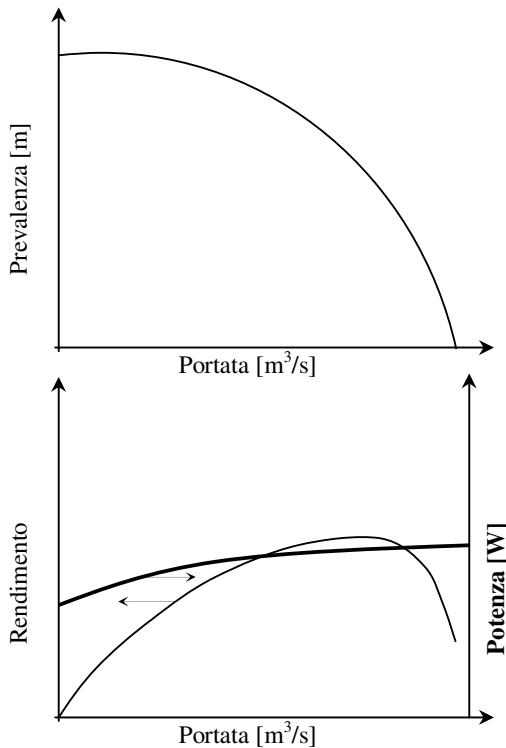
Esistono diversi tipi di pompe che vengono classificate in funzione del principio di funzionamento. Una possibile classificazione è la seguente:

- **Pompe Volumetriche (*positive displacement pumps*)**
  - ◆ con elementi rotanti (*rotary*)
  - ◆ alternative (*reciprocating*)
- **Pompe Cinetiche (*kinetic pumps*)**
  - ◆ a flusso radiale o centrifughe (*centrifugal*)
  - ◆ a flusso assiale o assiali (*propeller*)
  - ◆ a flusso misto
- **Pompe a getto o eiettori (*jet pumps*)**

(v. R.L. Mott, op. cit., pp. 368-378 per una descrizione più dettagliata)

Ci occuperemo nel seguito solo delle pompe centrifughe.

Il loro principio di funzionamento è basato sull'aumento di quantità di moto del fluido ottenuto tramite la rotazione della pale della girante e la conversione in pressione dell'energia cinetica acquisita tramite un diffusore.



Tipici andamenti qualitativi delle curve caratteristiche di una pompa centrifuga sono dati nelle figure.

La similitudine fluidodinamica permette di stabilire *leggi di affinità* che consentono di prevedere la variazione di portata, prevalenza e potenza in funzione del numero di giri al minuto  $N$  o del diametro della girante  $D$ .

Se  $N$  varia si ha ( $D$  costante) :

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2}} \quad \boxed{\frac{H_{P1}}{H_{P2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2} \quad \boxed{\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^3}$$

Se  $D$  varia si ha ( $N$  costante) :

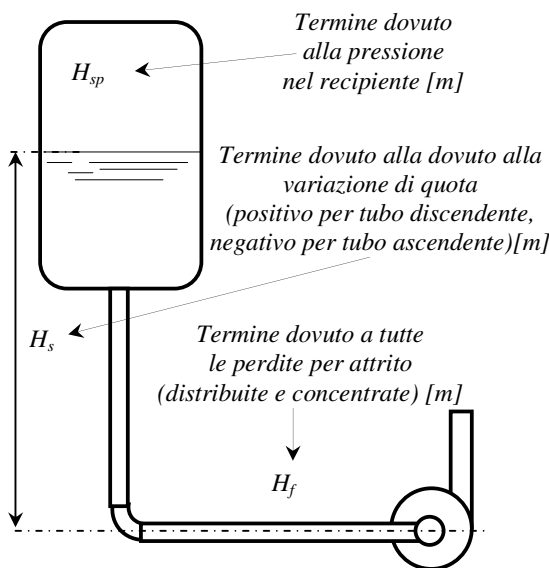
$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3} \quad \boxed{\frac{H_{P1}}{H_{P2}} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2} \quad \boxed{\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^5}$$

Un fattore molto importante per l'applicazione di una pompa è il cosiddetto *Net Positive Suction Head richiesto* ( $NPSH_R$ ) dalla pompa.

Esso è legato al possibile instaurarsi di condizioni di *cavitazione*, fenomeno che si presenta quando, a causa di una pressione troppo bassa in ingresso, si ha la formazione di bolle di vapore o gas disciolti all'ingresso o all'interno della pompa.

Ciò ha come conseguenza una ridotta efficienza della pompa e, a causa dell'implosione delle bolle nelle zone a più elevata pressione, rumorosità ed erosione.

L' $NPSH_R$ , perciò, rappresenta un valore caratteristico della pompa che deve essere sempre sufficientemente minore dell' $NPSH$  disponibile ( $NPSH_A$ ). Un margine minimo del 10% può essere considerato accettabile in molte applicazioni, ma si può essere molto più restrittivi (fino a richiedere margini del 100%).



Nella figura viene riportata una situazione tipica per la valutazione dell' $NPSH_A$ .

Si ha:

$$NPSH_A = H_{sp} + H_s - H_f - H_{vp}$$

in cui  $H_{vp}$  è il termine legato alla pressione di vapor saturo del liquido alla temperatura di pompaggio [m]. Nel caso in cui siano presenti gas disciolti compare un termine aggiuntivo ad essi relativo.

I termini  $H_{sp}$  e  $H_{vp}$  vengono ottenuti tramite le relazioni:

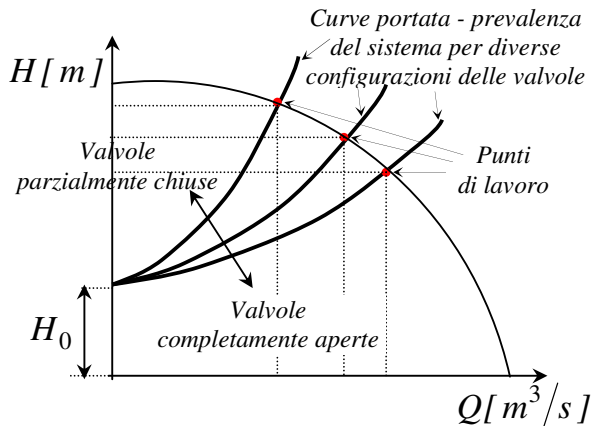
$$H_{sp} = \frac{p_{abs,tanca}}{\rho g} \quad H_{pv} = \frac{p_{v,sat}(T)}{\rho g}$$

in cui  $p_{abs,tanca}$  e  $p_{v,sat}(T)$  sono la pressione assoluta nella tanca e la pressione di saturazione del liquido alla temperatura di pompaggio.

L' $NPSH_R$  di una pompa varia con  $N^2$ :

$$NPSH_{R,2} = NPSH_{R,1} \times (N_2/N_1)^2$$

**Il punto di lavoro di una pompa in un determinato sistema si ottiene intersecando la caratteristica della pompa con la curva portata - prevalenza del sistema.**



**Le curve portata - prevalenza del sistema possono variare a seconda del grado di apertura delle valvole (ad es., di regolazione) presenti.**

**Variano, infatti, i relativi coefficienti di perdita di carico.**

**Si nota che:**

- **la portata aumenta con il grado di apertura delle valvole**
- **corrispondentemente la prevalenza fornita dalla pompa si adatta a quella, sempre inferiore, richiesta dal sistema esterno**
- **in generale, le curve portata - prevalenza del sistema non partono da prevalenza nulla per portata nulla; infatti, anche a portata nulla può essere presente un *carico statico***

$$H_0 = \frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z$$

**dovuto alla differenza di pressione e di quota del fluido tra le sezioni estreme del sistema.**

**I modi di regolare la portata in un circuito contenente pompe sono:**

- **introdurre valvole di regolazione *a valle* della pompa (si dissipa energia nella valvola)**
- **utilizzare velocità angolari diverse (ad esempio variando la frequenza della tensione di alimentazione al motore)**

**Si possono inoltre realizzare combinazioni interessanti utilizzando:**

- **pompe in parallelo  $\Rightarrow$  maggiore portata, stessa prevalenza**
- **pompe in serie  $\Rightarrow$  stessa portata, maggiore prevalenza**

## Analisi Dimensionale e Similitudine

### 8. Metodologie per definire parametri di similitudine

- In fluidodinamica è spesso utile definire *parametri adimensionali* che permettano di generalizzare i risultati ottenuti in un caso specifico ad una intera classe di problemi con dimensioni diverse stabilendo una *similitudine dinamica* tra di essi
- Per tale similitudine sono necessarie la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali di interesse
- Per definire i numeri adimensionali rilevanti si possono percorrere due possibili strade:
  - la prima viene utilizzata quando non si conoscano le equazioni che governano il processo, ma solo il tipo ed il numero di variabili coinvolte
  - la seconda si applica quando si conoscono le equazioni che governano il processo

### 1. Teorema $\pi$ di Buckingham: il numero di gruppi adimensionali indipendenti necessario per descrivere un fenomeno è dato dal numero di variabili in gioco meno il numero delle dimensioni fondamentali (lunghezza, massa, ecc.) richieste

Questo metodo può essere applicato quando si conosca con esattezza quali sono (tutte e sole) le variabili in gioco:

Es.: scambio termico da una parete

**Variabili:**  $w, h_{conv}, D, \rho, c_p, \mu, k$  (7 in tutto)

**Dimensioni:**  $kg, m, s, K$  (4 in tutto)

Ci aspettiamo di trovare perciò  $7 - 4 = 3$  numeri adimensionali

Supponiamo che:

$$\Pi_i = \text{gruppo a dimensionale} = w^a h_{conv}^b D^c \rho^d c_p^e \mu^f k^g$$



**Ricordiamo ora che dimensionalmente si ha:**

$$w = \left[ \frac{m}{s} \right] \quad h_{conv} = \left[ \frac{W}{m^2 K} \right] = \left[ \frac{kg \ m^2}{s^3 m^2 K} \right] = \left[ \frac{kg}{s^3 K} \right] \quad D = [m]$$

$$\rho = \left[ \frac{kg}{m^3} \right] \quad c_p = \left[ \frac{J}{kg K} \right] = \left[ \frac{kg \ m^2}{s^2 kg K} \right] = \left[ \frac{m^2}{s^2 K} \right]$$

$$\mu = \left[ \frac{kg}{m s} \right] \quad k = \left[ \frac{W}{m K} \right] = \left[ \frac{kg \ m}{s^3 K} \right]$$

**Perciò, essendo  $\Pi_i$  adimensionale, deve essere:**

$$\left[ \frac{m}{s} \right]^a \left[ \frac{kg}{s^3 K} \right]^b [m]^c \left[ \frac{kg}{m^3} \right]^d \left[ \frac{m^2}{s^2 K} \right]^e \left[ \frac{kg}{m s} \right]^f \left[ \frac{kg \ m}{s^3 K} \right]^g = 1$$

**Eguagliando a zero l'esponente di ogni dimensione fondamentale, si ottiene un sistema che può essere risolto per ogni  $\Pi_i$  assegnando ogni volta alcuni degli esponenti.**

**Nel nostro caso, con un po' di algebra, si trovano i seguenti numeri adimensionali:**

$$\Pi_1 = \frac{h_{conv} D}{k} \quad \Pi_2 = \frac{\rho w D}{\mu} \quad \Pi_3 = \frac{c_p \mu}{k}$$

**che rappresentano rispettivamente il *numero di Nusselt*, il *numero di Reynolds* ed il *numero di Prandtl* che avremo modo di incontrare di nuovo**

**E' bene notare ancora che l'uso del T. di Buckingham ha successo solo se consideriamo tutte e sole le variabili che hanno influenza sul nostro sistema: in caso contrario potremmo essere indotti in errore.**

2. Espressione delle equazioni che descrivono il fenomeno in forma adimensionale

- Consideriamo il moto di un fluido viscoso incompressibile  
(Eq. di Navier – Stokes)

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = \mu \nabla^2 \vec{w} - \nabla p + \rho \vec{g}$$

si sceglie una scala di grandezza per ogni variabile in gioco

$$x = L \cdot x^* \quad y = L \cdot y^* \quad z = L \cdot z^* \quad \vec{w} = w_0 \cdot \vec{w}^*$$

$$t = \frac{L}{w_0} \cdot t^* \quad p = \rho w_0^2 p^* \quad \vec{g} = g \vec{k}$$

ottenendo anche

$$\nabla_{\circ} = \frac{1}{L} \nabla^*_{\circ} \quad \nabla^2_{\circ} = \frac{1}{L^2} \nabla^{*2}_{\circ} \quad \frac{D}{Dt}_{\circ} = \frac{w_0}{L} \frac{D}{Dt^*}_{\circ}$$

- Sostituendo nelle equazioni del moto, si ha:

$$\frac{w_0}{L} \nabla^* \cdot \vec{w}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^* \cdot \vec{w}^* = 0}$$

$$\rho \frac{w_0}{L} w_0 \frac{D\vec{w}^*}{Dt^*} = \mu \frac{w_0}{L^2} \nabla^{*2} \vec{w}^* - \frac{\rho w_0^2}{L} \nabla^* p^* + \rho g \vec{k}$$

$$\frac{D\vec{w}^*}{Dt^*} = \frac{\mu}{\rho w_0 L} \nabla^{*2} \vec{w}^* - \nabla^* p^* + \frac{gL}{w_0^2} \vec{k}$$

- Ponendo

$$Re = \frac{\rho w_0 L}{\mu} = \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscosse}} = \left[ \frac{\rho w_0^2}{\mu w_0 / L} \right] \quad (\text{numero di Reynolds})$$

$$Fr = \frac{w_0^2}{gL} = \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze di gravità}} = \left[ \frac{\rho w_0^2}{\rho g L} \right] \text{ (numero di Froude)}$$

si ha infine

$$\frac{D\vec{w}^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{w}^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{Fr} \vec{k}$$

- **E' bene ricordare che:**
  - Il numero di Reynolds ha importanza fondamentale nello stabilire il regime di moto del fluido (laminare o turbolento) e quindi nella definizione di molti parametri di interesse pratico
  - Il numero di Froude è coinvolto in molte relazioni riguardanti problemi di “stratificazione” o “miscelamento”
  - Dati due sistemi geometricamente simili (ad es., due condotti con la stessa forma), la similitudine dinamica permette di risolvere un problema per uno solo di essi applicandone i risultati ad una intera classe di problemi “simili”
- Consideriamo ora lo scambio termico in un fluido viscoso

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi + q'''$$

- Eseguiamo l'analisi dimensionale dell'equazione ottenuta

Si pone

$$x = L \cdot x^* \quad y = L \cdot y^* \quad z = L \cdot z^* \quad \vec{w} = w_0 \cdot \vec{w}^*$$

$$t = \frac{L}{w_0} \cdot t^* \quad T = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot T^* = T_0 + \Delta T \cdot T^*$$

$$\Phi = \mu \varphi = \mu \left( \frac{w_0}{L} \right)^2 \cdot \varphi^*$$

con  $T_0$  e  $T_1$  temperature di riferimento;

da ciò risulta anche

$$\nabla_{\circ} = \frac{1}{L} \nabla^{*} \circ \quad \nabla^2_{\circ} = \frac{1}{L^2} \nabla^{*2} \circ \quad \frac{D}{Dt}_{\circ} = \frac{w_0}{L} \frac{D}{Dt^{*}} \circ$$

Ponendo  $q''' = 0$ , si ottiene

$$\rho c_p \Delta T \frac{w_0}{L} \frac{DT^{*}}{Dt^{*}} = \frac{k \Delta T}{L^2} \nabla^{*2} T^{*} + \mu \left( \frac{w_0}{L} \right)^2 \phi^{*}$$

da cui

$$\frac{DT^{*}}{Dt^{*}} = \frac{L}{\rho c_p \Delta T w_0} \frac{k \Delta T}{L^2} \nabla^{*2} T^{*} + \frac{L \mu}{\rho c_p \Delta T w_0} \left( \frac{w_0}{L} \right)^2 \phi^{*}$$

Si riconosce che

$$\frac{L}{\rho c_p \Delta T w_0} \frac{k \Delta T}{L^2} = \frac{1}{w_0 L} \frac{k}{\rho c_p} = \left( \frac{\mu}{\rho w_0 L} \right) \left( \frac{k}{c_p \mu} \right) = \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr}$$

in cui compaiono il *numero di Reynolds* ed il *numero di Prandtl*

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\rho}{\rho c_p} \frac{\mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{diffusività molecolare della quantità di moto}}{\text{diffusività molecolare del calore (termica)}}$$

Inoltre, risulta

$$\frac{L \mu}{\rho c_p \Delta T w_0} \left( \frac{w_0}{L} \right)^2 = \frac{k}{c_p \mu} \frac{\mu}{\rho w_0 L} \frac{\mu w_0^2}{k \Delta T} = \frac{Br}{Re Pr}$$

in cui compare anche il *numero di Brinkmann*

$$Br = \frac{\mu w_0^2}{k \Delta T} = \frac{\text{produzione di calore per dissipazione viscosa}}{\text{scambio termico per conduzione}} = \frac{\mu w_0^2 / L^2}{k \Delta T / L^2} = \frac{[W / m^3]}{[W / m^3]}$$

- Si ha perciò

$$\frac{DT^{*}}{Dt^{*}} = \frac{1}{Re Pr} \nabla^{*2} T^{*} + \frac{Br}{Re Pr} \phi^{*}$$

- Il prodotto  $RePr$  si dice *numero di Peclet*; si ha

$$Pe = RePr = \frac{\rho C_p w_0 L}{k} = \frac{\rho w_0 L C_p \mu}{\mu k} = \frac{\rho C_p w_0 \Delta T}{k \frac{\Delta T}{L}} = \frac{\text{scambio termico per avvezione}}{\text{scambio termico per conduzione}}$$

Perciò il numero di Peclet misura l'importanza relativa dello scambio termico dovuto al moto del fluido e la conduzione

- Nei metalli liquidi, l'elevata conducibilità permette il trasporto del calore anche per mezzo della conduzione oltre che della avvezione (valori moderati di  $Pe$ )
- Per i fluidi con bassa conducibilità (ad esempio, l'acqua) il contributo della conduzione al trasporto del calore (ad esempio, in direzione assiale in un tubo) è invece trascurabile per  $w \neq 0$  ( $Pe \gg 1$ )
- Considerando il moto di un fluido compressibile si aggiunge un ulteriore numero adimensionale

$$M = \frac{w}{w_s} = \frac{\text{velocità del fluido}}{\text{velocità del suono}} = \text{Numero di Mach}$$

La velocità del suono è definita dalla relazione

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s}}$$

Per un gas perfetto è

$$w_s = \sqrt{\gamma RT} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

- Nello scambio termico in convezione libera alcuni numeri adimensionali di rilievo sono:

- il numero di Grashof,  $Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2}$ , e il numero di Rayleigh,  $Ra = Gr Pr$ , spesso utilizzati nelle correlazioni di scambio termico per convezione libera

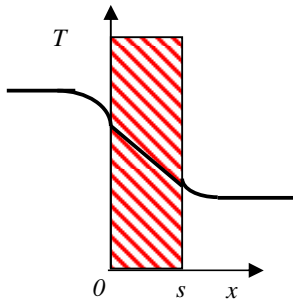
- il rapporto  $Gr/Re^2$

$$Gr/Re^2 = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2} \frac{\mu^2}{\rho^2 w_0^2 L^2} = \frac{g \beta \Delta T L}{w_0^2} = \frac{\rho g \beta \Delta T L}{\rho w_0^2} = \frac{\text{galleggiamento}}{\text{inerzia}}$$

il cui valore permette di stabilire quando la “convezione libera” o la “convezione forzata” predominano

- in particolare se  $Gr/Re^2 \ll 1$  predomina la convezione forzata
- se  $Gr/Re^2 \gg 1$  è la convezione libera ad essere più importante
- se  $Gr/Re^2 \approx 1$  si è in regime di convezione mista.

- Parametri adimensionali nella conduzione



- ◆ Consideriamo una parete solida monodimensionale con condizioni al contorno di tipo convettivo in assenza di potenza termica volumetrica
- ◆ Il problema differenziale relativo è

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha_w} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ -k_w \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_0 [T_{f0}(t) - T(0,t)] \\ -k_w \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=s} = h_s [T(s,t) - T_{fs}(t)] \\ T(x,0) = T_{in}(x) \end{cases}$$

in cui il pedice  $w = \text{wall}$  ricorda che le proprietà considerate sono quelle della parete

- ◆ La definizione del coefficiente di scambio termico convettivo  $h$  è data dalla “legge di Newton dello scambio termico”

$$h = \frac{q''}{T_w - T_f}$$

- ◆ La soluzione del precedente sistema differenziale può essere ottenuta
  - analiticamente: sviluppo in serie di autofunzioni
  - numericamente: discretizzando nello spazio e nel tempo

◆ Ponendo

$$x = s \cdot x^* \quad T = T_0 + \Delta T \cdot T^*$$

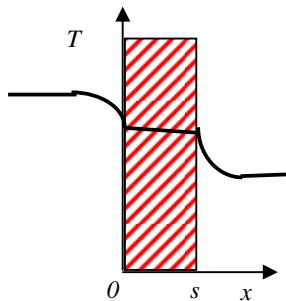
con  $T_0$  e  $\Delta T$  valori di riferimento, si ha

$$\begin{cases} s^2 \frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \\ -\left. \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right|_{x=0} = \frac{h_0 s}{k_w} [T_{f0}^*(t) - T^*(0,t)] \\ -\left. \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right|_{x=s} = \frac{h_s s}{k_w} [T^*(s,t) - T_{fs}^*(t)] \\ T^*(x,0) = T_{in}^*(x) \end{cases}$$

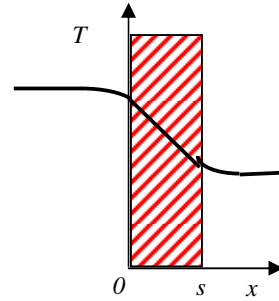
◆ Si introduce il *numero di Fourier*, come variabile temporale adimensionale

$$Fo = \frac{\alpha_w t}{s^2} = t^*$$

◆ Il numero di Biot, invece, esprime il rapporto tra le resistenze termiche in gioco



$$Bi_0 < 1, Bi_s < 1$$



$$Bi_0 > 1, Bi_s > 1$$

Distribuzione stazionaria di temperatura con numeri di Biot diversi

$$Bi = \frac{hs}{k_w} = \frac{s/k_w}{1/h} = \frac{\text{resistenza termica della struttura}}{\text{resistenza termica tra parete e fluido}}$$

◆ In particolare,  $Bi$  traduce quantitativamente l'importanza relativa della conduzione e della convezione per la struttura in esame; in particolare:

- $Bi \ll 1 \Rightarrow$  scambio termico "limitato" dalla convezione
- $Bi \gg 1 \Rightarrow$  scambio termico "limitato" dalla conduzione  
(il fenomeno che "limitato" è quello più limitante)

◆ Ad esempio, se  $Bi < 0.1$  si può trascurare la conduzione del calore nella struttura, assumendo un solo valore di temperatura

rappresentativo per l'intero spessore (*modello a parametri concentrati*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \\ -\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \Big|_{x=0} = Bi_0 [T_{f0}^*(t) - T^*(0,t)] \\ -\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \Big|_{x=s} = Bi_s [T^*(s,t) - T_{fs}^*(t)] \\ T^*(x,0) = T_{in}^*(x) \end{array} \right.$$

- Si ottiene quindi la forma adimensionale del problema differenziale della conduzione
- La soluzione di problemi di conduzione, anche 2D o 3D, viene eseguita con tecniche analitiche e numeriche simili a quelle adottate per la diffusione dei neutroni
- Ulteriori numeri adimensionali di uso comune

### Numero di Nusselt

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

L'interpretazione del significato di questo adimensionale si ottiene considerando che in prossimità della parete lo scambio è puramente conduttivo (il fluido è quasi fermo), perciò

$$q_w'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T_w - T_{f\infty}) \Rightarrow h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{(T_w - T_{f\infty})}$$

Ne risulta che il numero di Nusselt può essere espresso come un gradiente adimensionale



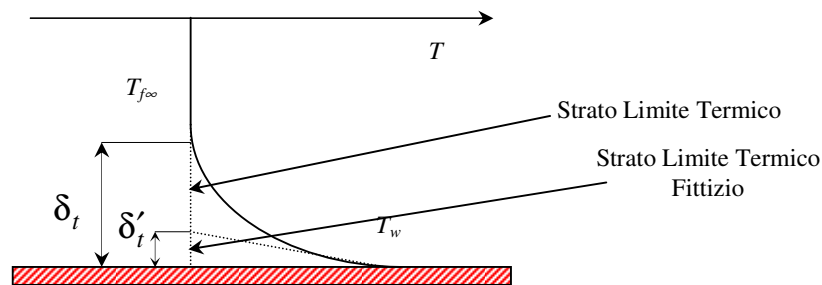
$$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{-\frac{\partial T}{\partial y}\big|_{y=0}}{(T_w - T_{f\infty})} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\big|_{y^*=0} \quad y^* = y/L \quad T^* = \frac{T_w - T}{T_w - T_{f\infty}}$$

Un'altra interessante interpretazione di  $h$  si ottiene scrivendo

$$q_w'' = k \frac{T_w - T_{f\infty}}{\delta_t'} = h(T_w - T_{f\infty})$$

in cui  $\delta_t'$  è uno *strato limite termico* fittizio (introdurremo questo concetto) che si avrebbe nel caso di pura conduzione; si ha perciò

$$Nu = \frac{h(T_w - T_{f\infty})}{k(T_w - T_{f\infty})/L} = \frac{h(T_w - T_{f\infty})}{k(T_w - T_{f\infty})/\delta_t'} \frac{L}{\delta_t'} = \frac{L}{\delta_t'}$$



L'analisi dimensionale mostra che il numero di Nusselt può essere valutato in funzione del *numero di Reynolds* e del *numero di Prandtl* nel caso di *convezione forzata* e del *numero di Grashof* e del numero di Prandtl per *convezione naturale* (o libera), cioè:

$$Nu = f(Re, Pr) \quad Nu = f(Gr, Pr)$$

### Numero di Stanton

$$St = \frac{h}{\rho c_p w} = \frac{Nu}{Re Pr}$$

E' il rapporto tra il calore scambiato e la capacità termica del fluido. E' un parametro di estrema importanza nelle equazioni di scambio termico, perché grazie all'analogia di Reynolds modificata da Colburn tra scambio termico e scambio di quantità di moto si ha

$$j_H = St Pr^{2/3} = \frac{f}{8}$$

valida per un condotto, in cui  $f$  è il fattore di attrito di Darcy-Weisbach e  $j_H$  è detto fattore di Colburn

Questa formulazione è alla base di alcune delle correlazioni più note per lo scambio termico in condotti in moto turbolento e convezione forzata (Colburn, Dittus-Boelter).

Infatti, assegnata una correlazione per il fattore di attrito

$$f = f(Re, \dots)$$

si ha una corrispondente correlazione per il coefficiente di scambio.

### Numero di Weber

$$We = \frac{\rho w^2 D}{\sigma}$$

Rappresenta il rapporto tra le forze di inerzia e la forza dovuta alla tensione superficiale ed è utilizzato, ad esempio, nella correlazione del diametro di bolle di vapore o di gocce di liquido

Numero di Eulero

$$Eu = \frac{\Delta p_{frict}}{\rho w^2}$$

E' il rapporto tra la perdita di carico per attrito e il carico cinetico.

### Numero di Archimede

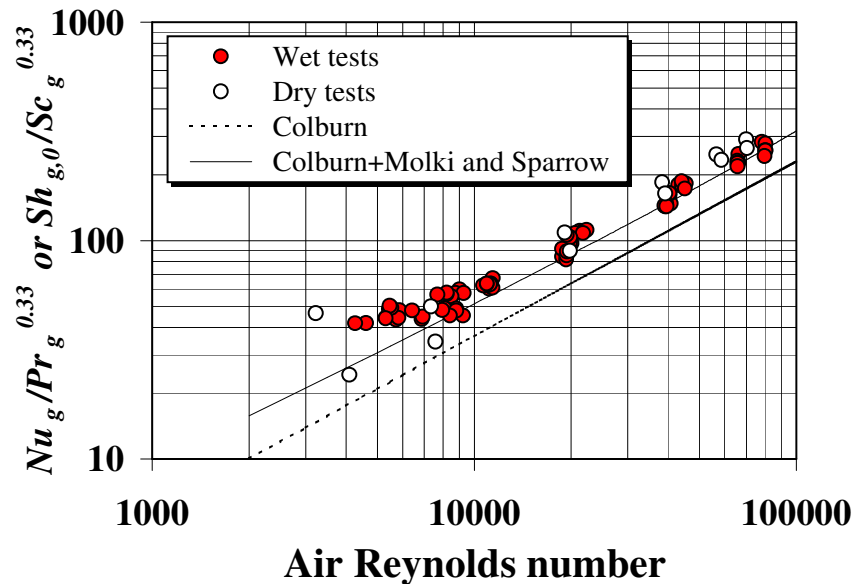
$$Ar = \frac{g \rho_s (\rho_s - \rho_f) L^3}{\mu_f^2}$$

E' il rapporto tra la forza peso meno quella di galleggiamento agenti su di un corpo di densità  $\rho_s$  immerso in un fluido di densità  $\rho_f$  e viscosità  $\mu_f$  e le forze viscosive (notare la somiglianza con Grashof)

## RIASSUMENDO:

### A COSA SERVONO IN PRATICA I NUMERI ADIMENSIONALI?

1. A permettere di correlare dati sperimentali fornendo loro una maggiore generalità



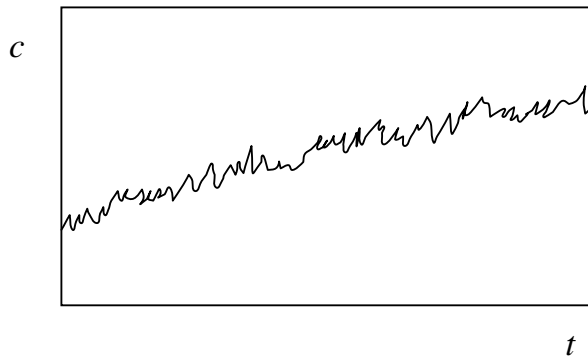
Nella figura oltre ai numeri di Reynolds, Nusselt e Prandtl compaiono anche i numeri di Sherwood e di Schmidt che riguardano i processi di trasferimento di massa (ad es., evaporazione e condensazione)

2. A permettere di presentare risultati relativi a problemi posti in forma adimensionale in modo che altri possono utilizzarli nei loro casi particolari
  - fare il “best-fit” di dati sperimentali in maniera sufficientemente generale richiede di identificare numeri adimensionali idonei
  - scoprire regolarità nei dati che suggerisca una dipendenza da fenomeni fisici di interesse

## Trattazione Statistica del Moto Turbolento

(metodo di Reynolds)

- Il moto turbolento è caratterizzato dalla fluttuazione caotica delle variabili in gioco (velocità, pressione, temperatura, ecc.) intorno a valori “medi” che possono essere anch’essi variabili (più lentamente) nel tempo



- La descrizione del comportamento istantaneo del fluido è generalmente di scarso interesse per le applicazioni, anche perché i valori misurati ad un dato istante non saranno mai gli stessi
- E’ allora preferibile descrivere la variazione dei valori “medi” delle variabili di interesse, caratterizzando la turbolenza in modo statistico
- A tale scopo si definisce il valore “medio” della generica variabile intensiva  $c$  tramite la relazione

$$\bar{c} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} c \, dt$$

e si decompone il valore istantaneo di  $c$  nella somma del valore medio più una componente fluttuante a media nulla

$$c = \bar{c} + c' \quad \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} c' \, dt = 0$$

- L’intervallo di tempo  $\Delta t$  deve essere scelto abbastanza lungo da mediare le fluttuazioni dovute alla turbolenza, ma deve risultare sufficientemente breve rispetto alla scala di variazione temporale delle grandezze medie

- L'entità delle fluttuazioni viene generalmente valutata tramite le loro medie quadratiche  $\overline{c'^2}$
- In particolare, nel caso della velocità si considerano le quantità

$$\sqrt{\overline{w_i'^2}} \quad \text{intensità della turbolenza per la componente } i\text{-esima}$$

$$\sqrt{\overline{w_x'^2 + w_y'^2 + w_z'^2}} \quad \text{intensità della turbolenza}$$

$$\overline{w_i' w_j'} \quad (i, j = x, y, z) \quad \text{doppia correlazione}$$

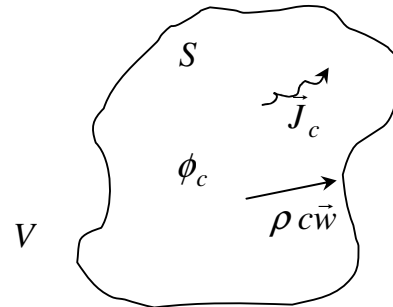
- L'intensità della turbolenza è direttamente legata all'energia cinetica per unità di massa legata alle fluttuazioni

$$k = \frac{1}{2} (\overline{w_x'^2} + \overline{w_y'^2} + \overline{w_z'^2})$$

### Equazioni di bilancio in termini di variabili mediate

Rivisitiamo le equazioni differenziali di bilancio già viste a suo tempo derivandole da un bilancio macroscopico.

Sia data la generica proprietà estensiva  $C$  e sia  $c(\vec{r}, t)$  il suo valore specifico per unità di massa. Il bilancio di  $C$  su di un volume  $V$  arbitrario delimitato da una superficie chiusa  $S$  assume la forma:



$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho c dV}_{\text{variazione di } C \text{ nel volume } V} = - \underbrace{\int_S \rho c \vec{w} \cdot \vec{n} dS}_{\text{portata di } C \text{ in uscita col fluido (avvezione)}} - \underbrace{\int_S \vec{J}_c \cdot \vec{n} dS}_{\text{flusso superficiale di } C \text{ (non avvettivo)}} + \underbrace{\int_V \rho \phi_c dV}_{\text{sorgente volumetrica di } C}$$

Si è posto:  $\vec{J}_c(\vec{r}, t) =$  flusso superficiale non-avvettivo di  $C$

$\phi_c(\vec{r}, t) =$  sorgente di  $C$  per unità di massa

Poiché  $V$  è fisso, si ha:  $\frac{d}{dt} \int_V \rho c dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho c) dV$

Si applica ora il teorema della divergenza agli integrali superficiali

$$\int_S \rho c \vec{w} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho c \vec{w}) dV \quad \int_S \vec{J}_c \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{J}_c dV$$

ottenendo

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho c) + \nabla \cdot (\rho c \vec{w}) + \nabla \cdot \vec{J}_c - \rho \phi_c \right] dV = 0$$

Per l'arbitrarietà di  $V$ , deve essere nulla la funzione integranda

|                                                                               |       |                                                                                                     |     |                                                                                 |     |                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------|
| $\frac{\partial}{\partial t} (\rho c)$<br><small>variazione temporale</small> | $= -$ | $\nabla \cdot (\rho c \vec{w})$<br><small>termine avvevivo<br/>(trasporto dovuto al fluido)</small> | $-$ | $\nabla \cdot \vec{J}_c$<br><small>termine non avvevivo<br/>(diffusivo)</small> | $+$ | $\rho \phi_c$<br><small>termine di sorgente</small> |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------|

*forma locale – istantanea del bilancio di C*

• **Ponendo:**

- $c=1, \vec{J}_c=0, \phi_c=0$  si ha (*bilancio di massa*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{w} = 0$$

- $c \rightarrow \vec{w}, \vec{J}_c \rightarrow -\vec{\sigma} = -\vec{\tau} + p\vec{I}, \phi_c \rightarrow \vec{g}$  si ha (*bilancio di quantità di moto*)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{w}) + \nabla \cdot (\rho \vec{w} \vec{w}) = \nabla \cdot \vec{\tau} - \nabla p + \rho \vec{g}$$

- $c = u^0 = u + \frac{w^2}{2}, \vec{J}_c = \vec{q}'' - \vec{\sigma} \cdot \vec{w}, \phi_c = \frac{q'''}{\rho} + \vec{g} \cdot \vec{w}$  si ha

*(bilancio di energia)*

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^0) + \nabla \cdot (\rho u^0 \vec{w}) = -\nabla \cdot \vec{q}'' + \nabla \cdot [\vec{\sigma} \cdot \vec{w}] + q''' + \rho \vec{g} \cdot \vec{w}$$

- Nel caso di moto turbolento, la forma locale ed istantanea delle equazioni di bilancio per la variabile estensiva  $C$  di valore specifico  $c$  può essere espressa in termini di variabili mediate
- A tale scopo, si applica l'operatore di media temporale ad ambo i membri della equazione, ottenendo

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho c)} + \overline{\nabla \cdot (\rho c \vec{w})} + \overline{\nabla \cdot \vec{J}_c} = \overline{\rho \phi_c}$$

in cui si è sfruttata la linearità dell'operatore integrale

- Per le ipotesi fatte su  $\Delta t$  si ha

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho c)} \approx \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho c})$$

- Inoltre, per un sistema di coordinate stazionario, si ha

$$\overline{\nabla \cdot (\rho c \vec{w})} = \nabla \cdot (\overline{\rho c \vec{w}}) \quad \overline{\nabla \cdot \vec{J}_c} = \nabla \cdot \overline{\vec{J}_c}$$

- Perciò, risulta

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho c}) + \nabla \cdot (\overline{\rho c \vec{w}}) + \nabla \cdot \overline{\vec{J}_c} = \overline{\rho \phi_c}$$

- A questo punto si introduce l'ipotesi che ogni variabile sia decomponibile in un contributo medio ed uno fluttuante

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad w = \bar{w} + w' \quad u^0 = \bar{u}^0 + u^{0'}$$

e si tiene conto che la media di ogni componente fluttuante è nulla

- Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho c}) = \frac{\partial}{\partial t}[(\bar{\rho} + \rho')(\bar{c} + c')] = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \bar{c} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} c' + \frac{\partial}{\partial t} \rho' \bar{c} + \frac{\partial}{\partial t} \rho' c'$$

Tenendo conto che

$$\overline{\rho' \bar{c}} = \bar{\rho} c' \quad \mathbf{e} \quad \overline{\rho c'} = \overline{\rho' c} = 0$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho c}) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \bar{c} + \frac{\partial}{\partial t} \rho' c'$$

- Per il termine avveffivo, si ha:

$$\begin{aligned} \overline{(\rho c \bar{w})} &= \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{c} + c')(\bar{w} + \bar{w}')} \\ &= \overline{\bar{\rho} \bar{c} \bar{w}} + \overline{\bar{\rho} \bar{c} \bar{w}'} + \overline{\bar{\rho} c' \bar{w}} + \overline{\bar{\rho} c' \bar{w}'} + \overline{\bar{\rho} c' \bar{w}'} + \overline{\bar{\rho}' \bar{c} \bar{w}} + \overline{\bar{\rho}' c' \bar{w}} + \overline{\bar{\rho}' c' \bar{w}'} \end{aligned}$$

in cui è

$$\begin{aligned} \overline{\bar{\rho} \bar{c} \bar{w}} &= \bar{\rho} \bar{c} \bar{w} & \overline{\bar{\rho} \bar{c} \bar{w}'} &= \bar{\rho} \bar{c} \bar{w}' = \bar{\rho}' \bar{c} \bar{w} = 0 \\ \overline{\bar{\rho} c' \bar{w}'} &= \bar{\rho} \bar{c}' \bar{w}' & \overline{\bar{\rho}' \bar{c} \bar{w}'} &= \bar{c} \bar{\rho}' \bar{w}' & \overline{\bar{\rho}' c' \bar{w}} &= \bar{\rho}' c' \bar{w} \end{aligned}$$

Si ha perciò:

$$\overline{(\rho c \bar{w})} = \bar{\rho} \bar{c} \bar{w} + \bar{\rho} \bar{c}' \bar{w}' + \bar{c} \bar{\rho}' \bar{w}' + \bar{\rho}' c' \bar{w} + \bar{\rho}' c' \bar{w}'$$

- Si pone quindi

$$\bar{J}_c^t = \bar{\rho} \bar{c}' \bar{w}' + \bar{c} \bar{\rho}' \bar{w}' + \bar{\rho}' c' \bar{w} + \bar{\rho}' c' \bar{w}'$$

che, pur derivando da un termine *avveffivo*, è espresso formalmente come un flusso superficiale *non avveffivo* (diffusivo) di origine *turbolenta*

- Operando in modo analogo a quanto visto sopra, risulta poi

$$\overline{\rho \phi_c} = \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{\phi}_c + \phi'_c)} = \bar{\rho} \bar{\phi}_c + \bar{\rho}' \phi'_c$$

- Con queste definizioni la generica equazione di bilancio in termini di variabili mediate diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \bar{c}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{c} \bar{w}) + \nabla \cdot \bar{J}_c = \bar{\rho} \bar{\phi}_c + \left\{ \bar{\rho}' \phi'_c - \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}' c') - \nabla \cdot \bar{J}_c^t \right\}$$

in cui, oltre ai termini dipendenti dalle sole variabili mediate, compaiono termini dovuti alla presenza delle fluttuazioni

- Assumendo che le fluttuazioni della densità siano trascurabili (oppure che il fluido sia incomprimibile), si ha

$$\rho' = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\rho}' \phi'_c = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}' c') = 0 \quad , \quad \bar{J}_c^t = \bar{\rho} \bar{c}' \bar{w}'$$

per cui, l'equazione di bilancio in termini di variabili mediate assume la forma

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \bar{c}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{c} \bar{w}) + \nabla \cdot \bar{J}_c = \bar{\rho} \bar{\phi}_c - \nabla \cdot \bar{\rho} \bar{c}' \bar{w}'}$$



che è formalmente simile alla forma locale-istantanea originale, differendone principalmente per la presenza del termine

$$-\nabla \cdot \rho \overline{c' \vec{w}'}$$

- La presenza di questo termine ricorda che, sebbene le equazioni siano espresse in termini di variabili mediate, le fluttuazioni turbolente giocano un ruolo importante nel trasporto di  $C$
- Ciò diviene più chiaro scrivendo l'equazione nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{c}) + \nabla \cdot (\rho \bar{c} \vec{w}) + \nabla \cdot (\vec{J}_c + \vec{J}'_c) = \rho \bar{\phi}_c$$

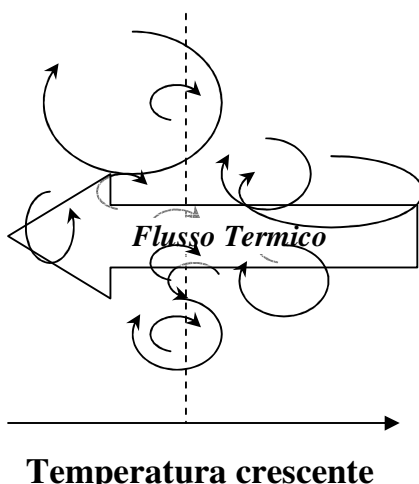
da cui si nota che le equazioni in termini di variabili mediate possono essere trattate come quelle locali-istantanee purché si adotti per il termine di flusso effettivo una definizione appropriata

$$\vec{J}_c^{eff} = \vec{J}_c + \vec{J}'_c$$

che tenga conto sia dello scambio molecolare (di quantità di moto o energia) che di quello turbolento. Si ha quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{c}) + \nabla \cdot (\rho \bar{c} \vec{w}) + \nabla \cdot \vec{J}_c^{eff} = \rho \bar{\phi}_c$$

- Infatti, lo scambio di quantità di moto e di calore in un moto turbolento avviene non solo a causa dei meccanismi molecolari ma anche per il mescolamento del fluido



◆ zone a maggiore e minore velocità scambiano fluido tra loro dando luogo ad un trasporto netto di quantità di moto

◆ zone più fredde e più calde scambiano fluido tra loro dando luogo ad un trasporto netto di energia termica

- Ciò accade anche in presenza di avvezione media nulla, cioè anche se  $\nabla \cdot (\rho \bar{c} \vec{w}) = 0$ , poiché anche in tal caso può risultare  $\nabla \cdot \rho \overline{c' \vec{w}'} \neq 0$

- Questo rende ragione della scelta di trattare il termine  $\rho \overline{c'w'}$  come un termine di flusso superficiale *non avvettivo*
- A questo punto, con le scelte già viste per  $c$ ,  $\vec{J}_c$  e  $\phi_c$  si ottengono le equazioni di bilancio di massa, quantità di moto ed energia in termini di variabili mediate:

◆ massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w}) = 0$$

◆ quantità di moto

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{w}) + \nabla \cdot (\rho \vec{w} \vec{w}) = \nabla \cdot \left( \vec{\tau} - p \vec{I} \right) + \rho \vec{g} - \nabla \cdot (\rho \overline{w' w'})$$

◆ energia (di stagnazione)

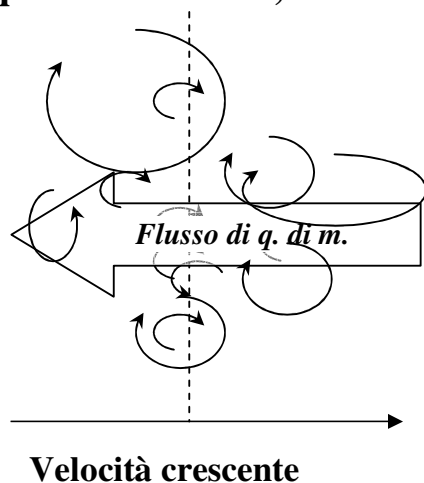
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^0) + \nabla \cdot (\rho u^0 \vec{w}) = \nabla \cdot \left[ -\vec{q}'' + \left( \vec{\tau} - p \vec{I} \right) \cdot \vec{w} \right] + \vec{q}''' + \rho \vec{g} \cdot \vec{w} - \nabla \cdot \left( \rho \overline{u^0 w'} \right)$$

*Scambio di quantità di moto in moto turbolento*

- Come abbiamo visto, l'equazione di bilancio di quantità di moto in termini di variabili mediate è

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{w}) + \nabla \cdot (\rho \vec{w} \vec{w}) = \nabla \cdot \left( \vec{\tau} - p \vec{I} \right) + \rho \vec{g} - \nabla \cdot (\rho \overline{w' w'})$$

- Secondo quanto detto in precedenza, il termine  $\rho \overline{w' w'}$  può essere interpretato come il contributo turbolento al flusso superficiale di quantità di moto, ovvero al *tensore degli sforzi*  $\vec{\tau}$



- Questo contributo turbolento prende il nome di *tensore degli sforzi di Reynolds* (si tratta ancora di un prodotto diadico di velocità)

$$\vec{\tau}_{Re} = -\rho \overline{w' w'}$$

ed il suo significato può essere descritto con riferimento alla figura a lato, ottenuta per analogia da quella relativa allo scambio termico

- Il valore effettivo del tensore degli sforzi, risulta quindi dalla sovrapposizione dei contributi viscoso e turbolento

$$\bar{\bar{\tau}}_{eff} = \bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\tau}}_{Re} = \bar{\bar{\tau}} - \rho \overline{\bar{w}'\bar{w}'}$$

- L'equazione di bilancio di quantità di moto diventa quindi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{w}) + \nabla \cdot (\rho \bar{w} \bar{w}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\tau}}_{Re}) + \rho \bar{g}$$

- La valutazione del tensore degli sforzi di Reynolds può essere fatta in analogia con il caso laminare

$$(\bar{\bar{\tau}}_{Re})_{i,j} = -(\rho \overline{\bar{w}'\bar{w}'})_{i,j} = \rho (v_T)_{i,j} \left[ \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right]$$

in cui  $(v_T)_{i,j}$  è detta *diffusività turbolenta della quantità di moto* (“*eddy diffusivity for momentum transfer*” o “*eddy viscosity*”)

- Risulta perciò che

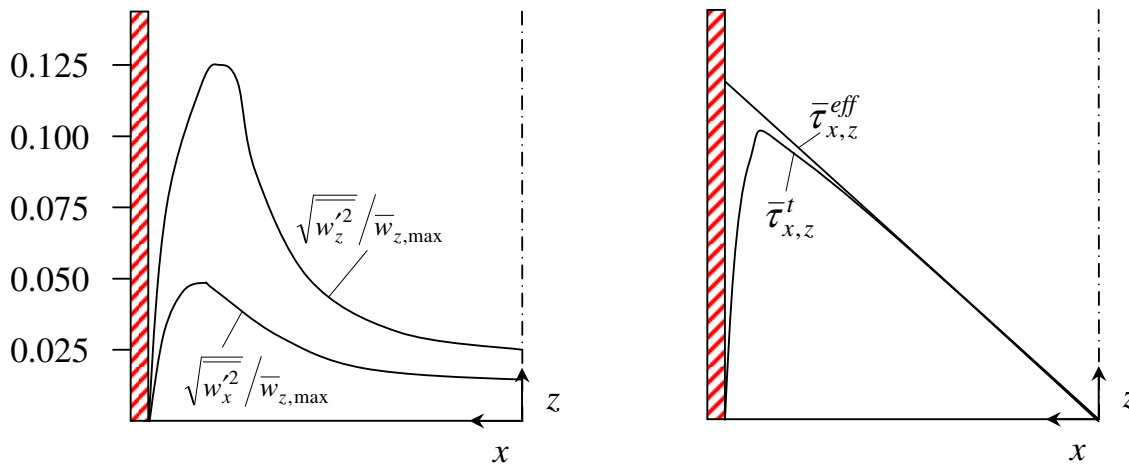
$$(\bar{\bar{\tau}}_{eff})_{i,j} = (\bar{\bar{\tau}})_{i,j} + (\bar{\bar{\tau}}_{Re})_{i,j} = \left[ \mu + \rho (v_T)_{i,j} \right] \left[ \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right] \quad (1)$$

- $(v_T)_{i,j}$  ha le stesse unità di misura di  $\nu$  cioè  $[m^2/s]$ , ma a differenza della viscosità cinematica *non è una proprietà termofisica del fluido, poiché dipende anche dal campo di moto*
- Dovendo valutare la viscosità turbolenta è necessario distinguere tra diversi tipi di turbolenza:
  - ◆ *turbolenza isotropa*: le grandezze caratteristiche della turbolenza restano inalterate se si cambia il sistema di riferimento in un dato punto
  - ◆ *turbolenza omogenea*: le grandezze caratteristiche della turbolenza restano inalterate spostandosi da un punto all'altro
  - ◆ *turbolenza omogenea ed isotropa*: è una situazione idealizzata che unisce le caratteristiche dei due casi precedenti; si può ottenere ad esempio in una galleria del vento a valle di una griglia

---

(<sup>1</sup>) **ATTENZIONE.** 1) La forma anisotropa è utilizzata in questa relazione solo per generalità; in realtà  $V_T$  è sempre considerata una grandezza isotropa. 2) In seguito introdurremo anche una componente diagonale nella relazione che definisce il tensore degli sforzi di Reynolds; per ora accontentiamoci di questa definizione generica.

- ◆ **turbolenza di parete:** il moto turbolento è influenzato dalla presenza di un confine solido; la turbolenza è quindi anisotropa
- ◆ **turbolenza libera:** si verifica nel moto turbolento di un fluido non direttamente influenzato da un confine materiale (ad es., nei getti e nelle scie)
- Per quanto riguarda gli effetti di parete sulla turbolenza si considerino i grafici seguenti relativi al moto tra due piastre piane:
- Dai grafici si nota che nel caso considerato:



- ◆ l'intensità di turbolenza normalizzata alla velocità media nel canale è dell'ordine di qualche % (fino al 10% lungo la direzione del moto)
- ◆ in prossimità della parete l'intensità di turbolenza lungo  $z$  è maggiore di quella lungo  $x$  (turbolenza anisotropa)
- ◆ in prossimità della parete l'intensità di turbolenza varia considerevolmente, raggiungendo un massimo ad una certa distanza; poi diminuisce andando verso il centro del canale
- ◆ l'intensità di turbolenza nel centro del canale assume valori paragonabili nelle due direzioni; la variazione con  $x$  è inoltre più blanda (tendenza alla turbolenza isotropa ed omogenea)
- ◆ lo sforzo di taglio effettivo decresce linearmente andando dalla parete verso il centro dove è nullo, come deriva da un bilancio di forze
- ◆ lo sforzo di taglio turbolento è nullo alla parete (nel sottostrato laminare, dove il contributo viscoso predomina) ma diviene

rapidamente uguale allo sforzo totale con l'aumentare della distanza dalla parete

- Sono stati proposti diversi modelli per definire la diffusività turbolenta della quantità di moto. Ne citiamo alcuni.

- ◆ *Viscosità turbolenta di Boussinesq*

E' una delle prime soluzioni proposte per il problema (1877) che consiste nella definizione di una *viscosità turbolenta*  $\mu^t$  da definirsi punto per punto

$$\tau_{yx}^t = \mu^t \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}$$

- ◆ *Lunghezza di miscelamento di Prandtl (1925)*

Prandtl ha assunto una formulazione del tipo

$$\tau_{yx}^t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}$$

in cui  $l$  è la *lunghezza di miscelamento*, cioè la distanza che deve essere coperta da una particella per produrre lo sforzo di taglio turbolento dato l'assegnato gradiente di velocità

Il modello è analogo alla teoria cinetica, che vede la viscosità molecolare come una velocità (molecolare media) per una lunghezza (cammino libero medio)

Prandtl assunse  $l$  dipendente linearmente dalla distanza dalla parete, con una legge del tipo  $l = ky$ .

- ◆ *Ipotesi di similitudine di von Karman (1930)*

Sulla base di considerazioni dimensionali, von Karman propose una formulazione del tipo

$$\tau_{yx}^t = \rho k_2^2 \left| \frac{(\partial \bar{w}_x / \partial y)^3}{\left( \partial^2 \bar{w}_x / \partial y^2 \right)^2} \right| \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}$$

in cui  $k_2$  è una costante universale il cui valore per flusso turbolento in tubi è circa 0.36-0.40

◆ **Formula empirica di Deissler per la zona vicina ad una parete (1955)**

Per trattare la zona prossima ad una parete Deissler ha proposto la seguente relazione empirica

$$\tau_{yx}^t = \rho n^2 \bar{w}_x y \left[ 1 - \exp(-n^2 \bar{w}_x y / \nu) \right] \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}$$

Sulla base della distribuzione delle velocità in tubi, Deissler ha stimato  $n \approx 0.124$

**Scambio termico in moto turbolento**

- Come abbiamo visto, l'equazione di bilancio di energia (di stagnazione) in termini di variabili mediate risulta

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}^0) + \nabla \cdot (\rho \bar{u}^0 \bar{w}) = \nabla \cdot \left[ -\bar{q}'' + \left( \bar{\tau} - p \bar{I} \right) \cdot \bar{w} \right] + \bar{q}''' + \rho \bar{g} \cdot \bar{w} - \nabla \cdot \left( \rho \bar{u}^0 \bar{w}' \right)$$

- Da questa equazione è possibile ottenere l'equazione di bilancio di energia termica che per un fluido incomprimibile in moto stazionario assume la forma

$$\nabla \cdot (\rho C_p \bar{T} \bar{w}) = -\bar{\nabla} \cdot \bar{q}'' + \bar{q}''' + \bar{\Phi} - \nabla \cdot (\rho C_p \bar{T}' \bar{w}')$$

- Si nota che il vettore

$$\rho C_p \bar{T}' \bar{w}'$$

rappresenta il contributo turbolento allo scambio termico

$$\bar{q}_{eff}'' = \bar{q}'' + \rho C_p \bar{T}' \bar{w}'$$

- In analogia con la legge di Fourier dello scambio termico conduttivo, è allora possibile scrivere

$$\rho C_p \left\{ \bar{T}' \bar{w}' \right\}_j = -\rho C_p (\alpha_T)_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$$

in cui  $(\alpha_T)_j$  rappresenta la **diffusività termica turbolenta**  $[m^2/s]$ . Si ha perciò

$$\{\vec{q}_{eff}''\}_j = -\rho C_p [\alpha + (\alpha_T)_j] \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$$

in cui compaiono i contributi molecolare (conduzione) e turbolento

- Per la natura di  $\alpha_T$  valgono considerazioni analoghe a quelle viste per  $\nu_T$ ; in particolare, essa non dipende solo dal fluido, ma anche dal campo di moto
- Poiché i vortici che danno luogo al trasporto turbolento di quantità di moto sono gli stessi che trasportano anche l'energia, è ragionevole ipotizzare che

$$Pr_t = \frac{\nu_T}{\alpha_T} = \text{numero di Prandtl turbolento} \approx 1$$

- Ciò vale con accettabile approssimazione per fluidi con numero di Prandtl (molecolare) prossimo ad 1. In questo caso si ha dunque

$$\alpha_T = \nu_T$$

- Per metalli liquidi si ha  $\alpha_T < \nu_T$  e vale la relazione di Dwyer

$$\frac{\alpha_T}{\nu_T} = 1 - \frac{1.82}{Pr \left( \frac{\nu_T}{\nu} \right)_{\max}^{1.4}}$$

in cui “max” indica il valore massimo nel canale